فصلنامه علمی پژوهشی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال نهم، شماره سی‌ودوم
زمستان ۱۳۹۵

الگوسازی رفتار قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی با نوسان تصادفی

صابر مولایی[۱]
محمد واعظ برزانی[۲]
سعید صمدی[۳]

تاریخ دریافت: ۹۴/۵/۲۲ تاریخ پذیرش: ۹۴/۱۰/۱۵

چکیده

هدف این مقاله الگوسازی رفتار قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی است. داده‌های این پژوهش شامل مشاهدات روزانه شاخص کل قیمت بازار سهام، شاخص ۵۰ شرکت برتر و شاخص ۳۰ شرکت بزرگ بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۵ فروردین ۱۳۸۵ تا ۲٦ فروردین ۱۳۹٤ است. به منظور مدل‌سازی رفتار شاخص قیمت از دو معادله دیفرانسیل تصادفی استفاده شده است که عبارت‌اند از: حرکت براونی هندسی و حرکت براونی هندسی همراه با گارچ غیرخطی. براساس نتایج این پژوهش، (۱) با توجه به معیار لگاریتم تابع درستنمایی، حرکت براونی هندسی همراه با گارچ غیرخطی در هر سه گروه از داده‌های مورد بررسی دارای عملکرد بهتر نسبت به حرکت براونی هندسی است. (۲) براساس الگوی معادلات دیفرانسیل تصادفی با نوسان تصادفی، شاخص کل قیمت بیشتر تحت تاثیر اخبار خوب است. (۳) تاثیر اخبار بد بر شاخص ۳۰ شرکت بزرگ بورس بیش از تاثیر اخبار خوب است. (٤) واریانس غیرشرطی شاخص کل در دو نقطه زمانی دارای شکست ساختاری است، واریانس غیرشرطی شاخص ۵۰ شرکت برتر در یک نقطه زمانی دارای شکست ساختاری است و واریانس غیرشرطی شاخص ۳۰ شرکت بزرگ بورس پایدار بوده و فاقد شکست ساختاری است.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی، گارچ غیرخطی، شکست ساختاری، شاخص قیمت سهام.

۱- دانشجوی دکترا اقتصاد دانشگاه اصفهان saber.molai@yahoo.com
۲- دانشیار اقتصاد دانشگاه اصفهان(نویسنده مسئول) vaez@ase.ui.ac.ir
۳- دانشیار اقتصاد دانشگاه اصفهان s.samadi@ase.ui.ac.ir

۱- مقدمه

الگوسازی قیمت سهام همواره مورد توجه اقتصادادن‌ها، آماردان‌ها و فعالین در بازار مالی بوده است. در دهه‌های اخیر پژوهش‌های فراوانی در زمینه توسعه و آزمون الگوهای رفتار قیمت سهام انجام شده است که الگوی گام تصادفی یکی از مهمترین الگوهای شبیه‌سازی رفتار قیمت سهام است. الگوی گام تصادفی در حالت پیوسته در قالب فرآیند براونی نشان داده می‌شود. محققین حوزه اقتصاد مالی با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی موفق به شبیه‌سازی رفتار قیمت سهام شده‌اند، به این معادلات فرآیند انتشار نیز گفته می‌شود.

هدف اصلی پژوهش حاضر الگوسازی رفتار قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی است.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

در چند دهه گذشته فرآیندهای انتشار[1] بخش مهمی از ادبیات اقتصاد مالی را به خود اختصاص داده است. به ویژه، در هسته اقتصاد مالی جهت الگوسازی نرخ بهره، قیمت‌گذاری دارایی‌ها، قیمت‌گذاری مشتقات مالی، ارزش‌گذاری در معرض ریسک[2]، انتخاب سبد بهینه و الگوسازی نوسانات از فرآیندهای انتشار استفاده می‌شود. در اکثر الگوهای قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی، از معادلات دیفرانسیل تصادفی جهت توضیح رفتار دارایی پایه استفاده شده است. به عنوان مثال در نخستین الگوی قیمت‌گذاری اختیارها که توسط ریاضی‌دان فرانسوی باچیلیر[3] ارائه شده است، قیمت سهام یا دارایی پایه از فرآیند براونی با میانگین صفر پیروی می‌کند. از آن زمان، مطالعات متعددی در مورد رفتار قیمت سهام و سایر دارایی‌های مالی صورت گرفته است. مهمترین ویژگی الگوهای ارائه شده نحوه رفتار دارایی پایه است، در برخی از الگوها دارایی پایه دارای مسیر پیوسته در طی زمان است و در برخی دیگر از الگوهای قیمت‌گذاری، دارایی پایه دارای مسیر گسسته همراه با پرش قیمتی است در این الگوها به تاثیر ورود اطلاعات و اخبار مرتبط با دارایی پایه در بازار مالی توجه شده است. هر اندازه الگوسازی رفتار دارایی پایه یا رفتار قیمت سهام به مشاهدات تجربی نزدیکتر باشد، خطای قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی کمتر شده و امکان آربیتراژ در بازار کاهش می‌یابد، حتی می‌توان ادعا نمود امکان وقوع بحران مالی نیز کمتر می‌شود. به منظور توضیح رفتار دارایی پایه در قالب الگوهای انتشار و معادلات دیفرانسیل تصادفی، بایستی عوامل موثر بر تغییر قیمت دارایی پایه مورد توجه قرار گرفته شوند.

الگوسازی قیمت دارایی‌های مالی با استفاده از معادلات انتشار قسمت اصلی ادبیات اقتصاد مالی را به خود اختصاص داده است. به ویژه، در هسته اقتصاد مالی مانند، الگوسازی نرخ بهره، قیمت‌گذاری دارایی‌ها، قیمت‌گذاری مشتقات، ارزش‌گذاری ریسک، انتخاب سبد بهینه از معادلات انتشار استفاده می‌شود. الگوسازی قیمت دارایی‌های مالی براساس الگوهای نوین قیمت‌گذاری منجر به کاهش خطای قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی می‌شود، از این رو امکان آربیتراژ در بازار مالی کاهش یافته است. به علاوه قیمت‌گذاری دقیق دارایی‌های مالی منجر به کاهش وقوع بحران‌های مالی می‌شود.

با توجه به ارتباط متقابل بازارهای مالی با سایر بازارها و بخش‌های اقتصادی در نتیجه وقوع بحران در بازار مالی، سایر بخش‌های اقتصاد نیز دچار

بحران خواهند شد. بنابراین الگوسازی بهینه قیمت دارایی‌های مالی منجر به کاهش وقوع بحران‌های اقتصادی می‌شود. هر اندازه الگوی ارائه شده به مشاهدات تجربی نزدیکتر باشد، خطای پیش‌بینی قیمت‌های آتی دارایی‌های مالی کاهش می‌یابد. درنتیجه ریسک سرمایه‌گذاران کاهش می‌یابد و سرمایه‌گذاران تصمیمات بهینه‌تری را اخذ می‌کنند. هم‌چنین در الگوهای نوین تعیین سبد بهینه، قیمت دارایی‌های مالی در طی زمان به صورت پیوسته هستند و قیمت‌ها از فرآیند انتشار پیروی می‌کنند. از این رو تعیین سبد بهینه رابطه تنگاتنگی با فرآیند انتشار ارائه شده دارد، الگوسازی دقیق قیمت دارایی مالی منجر به وزن‌دهی دقیق‌تر به دارایی‌های مالی و تعیین سبد بهینه می‌شود. به منظور الگوسازی بهینه قیمت دارایی‌های مالی، در گام نخست بایستی تاثیر عوامل اقتصادی، فیزیکی و رفتاری بر قیمت دارایی مالی در قالب معادلات انتشار بیان شود و در گام بعد باید ضرایب معادله انتشار برآورد شود. با کاهش اریب ضرایب معادله انتشار، خطای قیمت‌گذاری نیز کاهش می‌یابد بنابراین رویکرد استفاده شده در برآورد ضرایب معادلات انتشار نیز دارای اهمیت بسزایی در کاهش خطای قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی به ویژه مشتقات مالی است. حرکت براونی هندسی و حرکت براونی هندسی همراه با نوسانات تصادفی دو معادله دیفرانسیل متداول در الگوسازی رفتار قیمت دارایی‌های مالی هستند. حرکت براونی هندسی دارای دو اشکال اساسی است نخست در این الگو نوسانات بازده دارایی‌های مالی در طی زمان ثابت است که نتایج تجربی ثابت بودن نوسانات را تایید نمی‌کنند(باکشی[4]،۱۹۹۷). دوم در این الگو بازده دارایی دارای توزیع نرمال است که نتایج تجربی حاکی عدم نرمال بودن توزیع بازده دارند. در حرکت براونی هندسی همراه با نوسان تصادفی اگر چه نوسانات به صورت تصادفی هستند اما در این الگو معمولا به شکست واریانس غیرشرطی توجه نمی‌شود. شوک‌های بزرگ همواره منجر به شکست واریانس غیرشرطی می‌شوند بنابراین برآورد ضرایب الگوی گارچ بدون توجه به مسئله شکست نوسانات و شکست ساختاری ضرایب منجر به اریب ضرایب برآوردی و خطای اندازه‌گیری واریانس شرطی می‌شود.

خالوزاده و صدیقی(۱۳۸٤) در پژوهشی تحت عنوان " الگوسازی و پیش بینی قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی " بازده سهام در بازار بورس تهران با هدف الگوسازی براساس معادلات دیفرانسیل تصادفی مورد بررسی قرار داده است. در این پژوهش نوسانات قیمت سهام به شکل تصادفی در نظر گرفته شده است و براساس الگوی بلک- شولز، الگوسازی دینامیک فرآیند مولد قیمت سهام در بازار بورس تهران را با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی پیشنهاد کرده. پیش‌بینی بلندمدت رویکرد ارائه شده با رویکرد خطی خود توضیح مقایسه شده. براساس معیار خطای پیش‌بینی، رویکرد معادله دیفرانسیل تصادفی دارای عملکرد بهتر نسبت به روش خود توضیح است.

خداویسی(۱۳۹۲)، با استفاده از رویکرد معادلات دیفرانسیل تصادفی، مدل شبکه عصبی و مدل‌های اقتصادسنجی خودرگرسیون، گارچ و گارچ آستانه‌ای تورم ماهانه در ایران را پیش‌بینی کرد. براساس معیار ریشه مربعات خطا، مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی خطای کمتری در پیش‌بینی تورم دارد.

رنه و باندی[5] (۲۰۰۸) در پژوهشی تحت عنوان " نوسانات تصادفی ناپارامتریک " با به کارگیری

رویکرد ناپارامتریک ضرایب الگوی نوسان تصادفی[6] را برآورد نمود.

بر اساس مطالعات وایت[7] (۱۹۸۷) و اندرسون[8] (۱۹۹۷) الگوی نوسانات تصادفی عملکرد بهتری نسبت الگوهای با نوسانات ثابت در الگوسازی قیمت سهام، شاخص سهام و قیمت ارز دارد. معادله انتشار با نوسانات تصادفی به صورت زیر است.

(۱)

$$ds_t = \mu(s,t)s_t dt + \sigma(s,t)s_t dw$$
$$d\sigma_t^2 = m(\sigma_t)dt + \Lambda(\sigma_t)dw$$

هدف اصلی در پژوهش فوق برآورد $m(.), \Lambda(.)$ با استفاده از رویکرد ناپارامتریک است. نتایج شبیه سازی تجربی تایید کننده سازگاری برآوردگر ناپارامتریک ارائه شده توسط رنه است.

تانگ و چن[9](۲۰۰۹) در پژوهشی تحت عنوان " برآورد پارامتریک و تصریح اریب فرآیندهای انتشار " با استفاده از ترکیب رویکرد پارامتریک حداکثر ستنمایی و روش بوت استرپ ضرایب معادله انتشار را برآورد کردند. بدین صورت که در ابتدا با استفاده از روش حداکثر درستنمایی ضرایب الگوی انتشار برآورد می‌شود در ادامه به منظور کاهش اریب از رویکرد بوت استرپ استفاده می‌شود. از داده‌های ماهانه نرخ بهره امریکا در دوره زمانی ۱۹۶۳ تا ۱۹۹۸ به منظور آزمون روش پیشنهادی استفاده شد. نتایج حاکی از کاهش اریب روش پیشنهاد شده در فرآیندهای تک متغیره و چند متغیره دارد.

ساهالیا و جاکود[10] (۲۰۱۰) در پژوهشی تحت عنوان " آیا استفاده از فرآیند براونی در الگوسازی داده‌هایی با تناوب بالا ضروری است؟ " هدف این پژوهش آزمون وجود عنصر براونی در داده‌هایی با تناوب بالا است. فرآیند تصادفی دارایی پایه یا قیمت سهام از چهار عنصر تشکیل شده است که عبارتند از عامل انتقال[11] ، بخش پیوسته یا فرآیند براونی، عامل پرش که خود شامل جز پرش کوچک و پرش بزرگ است. در این پژوهش دو آزمون به منظور تعیین وجود فرآیند براونی در داده‌های با تناوب بالا مانند داده‌های دارایی‌های مالی معرفی شد. نتایج تجربی نشان داد که آزمون‌های معرفی شده به خوبی قادر به تعیین عنصر براونی در داده‌های با تناوب بالا است.

تحقیقات و مطالعات انجام شده در ایران در زمینه الگوسازی قیمت سهام عموما براساس الگوی بلک- شولز هستند، این مطالعات دو اشکال عمده دارند نخست به هیچ وجه ضرایب معادلات برآورد نشده‌اند. هم‌چنین میانگین و انحراف معیار بازده سهام جایگزین ضرایب معادله انتشار شده است. دومین اشکال ارائه الگو براساس نوسانات ثابت و نادیده‌گرفتن تاثیر اطلاعات و اخبار خوب و بد بر قیمت‌ها است. در مطالعات خارجی مرتبط با نوسان تصادفی به مشکل شکست ساختاری واریانس غیرشرطی توجه نشده است، در این پژوهش علاوه بر بررسی تاثیر اخبار خوب و بد بر قیمت دارایی مالی و تصادفی بودن نوسانات به آزمون وجود شکست ساختاری نوسانات پرداخته می‌شود و در صورت وجود شکست ساختاری، ضرایب معادله دیفرانسیل تصادفی با نوسان تصادفی با توجه به نتایج این آزمون برآورد می‌شوند.

۳- روش‌شناسی پژوهش

یکی از روش‌های الگوسازی قیمت دارایی‌های مالی، استفاده از تئوری گام تصادفی است. به منظور درک بهتر تئوری گام تصادفی، در ابتدا به دو روش

که جهت پیش‌بینی قیمت سهام توسط فعالین بازار سهام استفاده می‌شود اشاره می‌شود. این دو روش عبارت‌اند از (۱) تئوری تکنیکال (۲) تئوری بنیادی یا تحلیل ارزش ذاتی (فاما، ۱۹۶۵).

فرض اصلی تئوری تکنیکال تکرار روند تاریخی است، به عبارت دیگر الگوی رفتار قیمت سهام در آینده تابع الگوی رفتار قیمت در گذشته است یا الگوی گذشته رفتار قیمت سهام در آینده نیز تکرار می‌شود. بنابراین به منظور پیش‌بینی قیمت سهام بایستی الگوی قیمت سهام در گذشته شناسایی شود. در واقع روش تکنیکال از رفتار سهام در گذشته برای پیش‌بینی رفتار آینده استفاده می‌شود. وابستگی تغییرات قیمت یکی از فروض اصلی روش تکنیکال است. در رویکرد تحلیل بنیادی یا تحلیل ارزش ذاتی، فرض می‌شود در هر نقطه از زمان یک ورقه بهادار دارای ارزش ذاتی بوده که وابسته به عایدی بالقوه ورقه بهادار است. عایدی بالقوه وابسته به عوامل بنیادی همچون کیفیت مدیریت، چشم انداز صنعت و چشم انداز اقتصاد است در مقابل تئوری گام تصادفی بر پیش‌بینی ناپذیری قیمت اوراق بهادار تاکید می‌کند. به بیان آماری این تئوری می‌گوید که تغییرات متوالی قیمت، متغیرهای تصادفی مستقل، با توزیع یکسان هستند. به بیان ساده‌تر تغییرات متوالی قیمت بدون حافظه است یعنی از اطلاعات گذشته نمی‌توان جهت پیش‌بینی قیمت استفاده نمود (فاما، ۱۹۶۵).

تئوری گام تصادفی در قیمت‌های سهام شامل دو فرضیه جداگانه است: (۱) تغییرات متوالی قیمت مستقل هستند (۲) تغییرات قیمت دارای توزیع احتمال است. تصادفی بودن تغییرات قیمت سهام به معنای غیرمنطقی بودن سطح قیمت‌ها نیست. اگر قیمت‌ها منطقی باشند، فقط اطلاعات جدید موجب تغییر قیمت می‌شود. بنابراین الگوی گام تصادفی نشان می‌دهد که قیمت‌ها تمام اطلاعات مربوط را منعکس می‌نماید. در عوض اگر تغییرات قیمت قابل پیش‌بینی باشد، بازار کارا نخواهد بود زیرا توانایی پیش‌بینی قیمت سهام گویای این مطلب است که قیمت‌ها تمام اطلاعات اثر گذار بر قیمت را نشان نمی‌دهند. گام تصادفی در حالت پیوسته به فرآیند براونی تبدیل می‌شود از این رو به منظور الگوسازی قیمت دارایی‌های مالی می‌توان از فرآیند تصادفی استفاده نمود. حرکت براونی هندسی، رفتار تصادفی قیمت سهام را در طی زمان توضیح می‌دهد. حرکت براونی هندسی در قالب معادله دیفرانسیل تصادفی به صورت زیر است:

$$ds_t=\mu(s,t)s_t dt+\sigma(s,t)s_t dW \qquad (۲)$$

در رابطه فوق s_t قیمت سهام در زمان t است، W حرکت براونی استاندارد است، μ و σ هم ضرایب الگو هستند. حرکت براونی استاندارد، یک فرآیند انتشار است که دارای میانگین صفر و واریانس t می‌باشد. فرآیند براونی دارای توزیع نرمال می‌باشد. هم‌چنین حرکت براونی در طی زمان به صورت پیوسته بوده و تغییرات آن مستقل از هم هستند. براساس مطالعه‌ی فاما[۱۲](۱۹۶۵)، قیمت سهام در حالت گسسته از فرآیند گام تصادفی پیروی می‌کند و تصادفی بودن قیمت نشان دهنده وجود کارایی در بازار سهام است. همان‌طور که قبلا بیان شده گام تصادفی در حالت پیوسته به فرآیند برآونی تبدیل می‌شود. به منظور حل رابطه(۲) از فرمول ایتو[۱۳] استفاده می‌شود. جواب معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر است:

$$d\log s_t=(\mu-\frac{1}{2}\sigma_t^2)dt+\sigma(s,t)dW \qquad (۳)$$

براساس رابطه(۳) دیفرانسیل قیمت سهام (بازه قیمت سهام) دارای توزیع نرمال با میانگین $(\mu-\frac{1}{2}\sigma_t^2)$ و واریانس σ_t^2 است. با انتگرال‌گیری در بازه صفر تا T از دو سمت رابطه(۳) و آنتی لگاریتم گرفتن از جواب به رابطه زیر می‌توان رسید

$$S(T)=S(0)^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma W(T)} \quad (٤)$$

براساس رابطه (٤)، قیمت سهام دارای توزیع لگاریتمی نرمال است. با توجه به معین بودن توزیع قیمت سهام می‌توان از رویکرد حداکثر درستنمایی به منظور برآورد ضرایب معادله دیفرانسیل تصادفی (۲) استفاده نمود. یکی از ویژگی‌های رابطه (۲)، پیروی این رابطه از فرآیند مارکف است. بنابراین می‌توان تابع درستنمایی رابطه (۲) را به صورت حاصل‌ضرب چگالی راستنمایی نوشت. هرگاه $X(t_i)=\log s(t_i)-\log s(t_{i-1})$ باشد. تابع لگاریتم راستنمایی به صورت زیر است:

$$L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\log f_\theta(X_i) \quad (٥)$$

که $f_\theta(X_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ تابع چگالی توزیع نرمال است و $\theta=(\mu,\sigma)$بردار ضرایب است. از ویژگی‌های رابطه (۲) می‌توان به موارد زیر اشاره نمود: (۱) براساس این الگو قیمت سهام دارای توزیع نرمال است و بازه هم دارای توزیع لگاریتم نرمال است. (۲) یکی از فروض الگوی (۲) ثابت بودن نوسانات قیمت سهام(σ) است. نتایج اکثر مطالعات تجربی نشان دهنده تصادفی بودن نوسانات قیمت سهام هستند. (۳) با توجه به مشخص بودن تابع چگالی مشاهدات، می‌توان با استفاده از رویکرد حداکثر درستنمایی ضرایب رابطه (۲) را برآورد نمود.

نتایج اکثر مطالعات تجربی تایید کننده فروض الگوی حرکت برآونی هندسی نیستند. براساس نتایج این مطالعات(باکشی، ۱۹۹۷)، نوسانات قیمت سهام در طی زمان ثابت نیستند و به صورت تصادفی هستند. به عبارت دیگر نوسانات قیمت سهام در طی زمان، وابسته به فرآیند قیمت سهام هستند. هم‌چنین توزیع قیمت نرمال نیست و دارای دم پهن‌تر از توزیع نرمال است. بنابراین الگوسازی قیمت براساس فرآیند براونی هندسی دارای اریب است. به منظور رفع این مشکل از معادله دیفرانسیل تصادفی با نوسات تصادفی استفاده می‌شود. براساس این الگو نوسانات قیمت از فرآیند گارچ غیرخطی پیروی می‌کند. با توجه به اینکه اخبار خوب و بد بر قیمت سهام موثر هستند، بنابراین یکی از دلایل استفاده از الگوی گارچ غیرخطی، توجه به تاثیر اخبار بر قیمت است. هم‌چنین می‌توان از الگوی گارچ آستانه‌ای و گارچ نمایی هم استفاده نمود. الگوی معادله دیفرانسیل تصادفی با نوسانات تصادفی به صورت زیر است

$$ds(t_i)=\mu(t_i)sdt_i+\sigma(t_i)sdW(t_i) \quad (٦)$$
$$\sigma(t_i)^2=\omega+\alpha\sigma(t_{i-1})^2+\beta(\varepsilon(t_{i-1})-\gamma\sigma(t_{i-1}))^2$$
$$\varepsilon(t_{i-1})^2=\sigma(t_i)dW(t_i)$$

در رابطه فوق ω، α و βمثبت هستند و قید $\alpha+\beta(1+\gamma^2)<1$به منظور اطمینان از مانایی یا پایداری الگو بر ضرایب اعمال می‌شود. در الگوی گارچ غیرخطی هرگاه γ مثبت باشد تاثیر اخبار خوب $(\varepsilon(t_{i-1})>0)$کاهش یافته و تاثیر اخبار بد $(\varepsilon(t_{i-1})<0)$ بر قیمت سهام افزایش می‌یابد و اگر γ منفی باشد انگاه اخبار بد تاثیر بیشتری بر قیمت

سهام خواهد داشت. به منظور برآورد ضرایب معادله دیفرانسیل تصادفی با نوسانات تصادفی از رویکرد حداکثر درستنمایی استفاده می‌شود. تابع لگاریتم درستنمایی برای مشاهدات $x_n,\ldots,x_2,x_1$ به صورت زیر است.

(۷)

$$L(\theta)=\sum_{i=0}^{n}\log f_\theta(X_i)=\sum_{i=0}^{n}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$L(\theta)=-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\log(\sigma_i^2)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

در رابطه فوق f_θ تابع چگالی توزیع نرمال و $L(\theta)$ تابع لگاریتم درستنمایی است.

در ادامه الگوریتم مجموع مربعات تجمعی به منظور تعیین شکست ساختاری واریانس غیرشرطی بازده دارایی‌های مالی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نوسانات بازده دارایی‌های مالی معمولا با استفاده از فرآیند گارچ الگوسازی می‌شوند. الگوسازی صحیح نوسانات بازده دارای کاربرد فراوان در قیمت‌گذاری اختیارها، الگوسازی قیمت اوراق بهادار و مدیریت ریسک پرتفوی هستند. در مطالعات معمولا فرض می‌شود فرآیند گارچ به صورت پایدار است، در نتیجه واریانس غیرشرطی ثابت است. اما بازارهای مالی همواره در معرض شوک‌های بزرگ قرار دارند. این شوک‌ها می‌توانند منجر به شکست ناگهانی در واریانس غیرشرطی بازده دارایی مالی شوند که معادل با شکست ساختاری در ضرایب فرآیند گارچ حاکم بر واریانس شرطی بازده دارایی است. نتایج مطالعه هیل برند[۱۴] (۲۰۰۵) نشان داد عدم توجه به شکست ساختاری ضرایب مدل گارچ منجر به اریب در برآورد فرآیند گارچ می‌شود. همچنین در نظر نگرفتن شکست ساختاری منجر به برآورد ضعیف واریانس غیرشرطی بازده دارایی مالی می‌شود.

اینکلان و تیاو[۱۵] (۱۹۹٤)، آماره مجموع مربعات تجمعی را برای آزمون فرض صفر ثابت بودن واریانس غیرشرطی در مقابل فرض شکست ساختاری واریانس غیرشرطی ارائه دادند. آماره اینکلان و تیاو به صورت زیر است:

$$IT=\sup\left|\left(\frac{T}{2}\right)^{0.5}D_k\right| \qquad (۸)$$

که $D_k=\frac{C_k}{C_T}-\frac{k}{T}$ ، $C_k=\sum_{t=1}^{k}e_t^2$ و T تعداد مشاهدات است، e بازده دارایی مالی است و $k=1,2,\ldots,T$ است. مقداری از k که حداکثر کننده رابطه (۸) باشد نقطه شکست ساختاری است. در ادامه مبانی نظری مرتبط با الگوسازی اخبار خوب و بد در بازار اوراق بهادار ارائه می‌شود. در بازار اوراق بهادار انتشار عمومی یک خبر خوب درباره بازده آتی یک ورقه بهادار منجر به افزایش قیمت ورقه بهادار می‌شود. فرض کنید دو ورقه بهادار وجود دارد: یک ورقه بدون ریسک که دارای بازده یک خواهد بود و یک ورقه بهادار ریسکی که دارای بازده تصادفی $\tilde{\theta}$است. فرض می‌شود تمامی سرمایه‌گذاران یکسان هستند و دارای تابع مطلوبیت مقعر و مشتق‌پذیر U هستند. هر سرمایه‌گذار دارای یک ورقه بهادار بدون ریسک و یک ورقه بهادار ریسکی است. اگر قیمت ورقه بهادار بدون ریسک یک باشد، قیمت ورقه بهادار ریسکی با توجه به شرط مرتبه اول سرمایه‌گذار به صورت زیر است:

$$p=\frac{E[\tilde{\theta}U'(1+\tilde{\theta})]}{E[U'(1+\tilde{\theta})]} \qquad (۹)$$

فرض کنید $g(.)$چگالی $\tilde{\theta}$ باشد و تابع چگالی دیگری مانند $\bar{g}$ به صورت زیر باشد:

$$\bar{g}(\theta)=\frac{g(\theta)U^{'}(1+\theta)}{E[U^{'}(1+\tilde{\theta})]} \quad (10)$$

فرض کنید $\bar{E}$ امید ریاضی نسبت به چگالی $\bar{g}(\theta)$ باشد انگاه قیمت ورقه ریسکی برابر با :

$$p=\bar{E}(\tilde{\theta}) \quad (11)$$

حال فرض کنید خبر x به صورت عمومی انتشار یابد. سپس با توجه به دلایل قبل و تئوری بیز، قیمت جدید ورقه بهادار برابر است با:

$$p=\frac{E[\tilde{\theta}U^{'}(1+\tilde{\theta})\,|\,x]}{E[U^{'}(1+\tilde{\theta})\,|\,x]}=\bar{E}(\tilde{\theta}\,|\,x) \quad (12)$$

فرض کنید x و y دو سیگنال باشند بطوریکه که x مطلوب‌تر از y باشد. براساس مفهوم مطلوب‌تر لازم است که برای هر توزیع پیشین برای $\tilde{\theta}$، شامل پیشین $\bar{g}$، توزیع پسین با توجه به x به طور تصادفی غالب بر توزیع پسین به شرط y باشد. یعنی $\bar{E}(\tilde{\theta}\,|\,x)>\bar{E}(\tilde{\theta}\,|\,y)$، بنابراین خبر مطلوب‌تر منجر به قیمت بالاتر می‌شود. به ویژه خبر خوب x منجر به افزایش قیمت می‌شود و خبر بد منجر به کاهش قیمت می‌شود(میلگرام[16]، ۱۹۸۱).

در این مقاله از رویکرد مونت کارلو به منظور شبیه‌سازی رفتار قیمت سهام استفاده شده است. بدین منظور لازم است که الگوی مورد استفاده برای شبیه‌سازی رفتار قیمت سهام در ابتدا تعیین شود. به منظور شبیه‌سازی با استفاده از این روش بایستی گام‌های زیر اجرا شود:

۱. تعیین الگوی مدنظر برای شبیه‌سازی قیمت سهام(مانند حرکت براونی هندسی و حرکت براونی هندسی با نوسانات تصادفی).
۲. تولید داده‌های تصادفی.
۳. تجزیه و تحلیل نتایج

٤- نتایج پژوهش

به منظور برآورد ضرایب معادلات دیفرانسیل تصادفی با نوسانات ثابت و معادلات دیفرانسیل تصادفی با نوسانات تصادفی از رویکرد حداکثر درستنمایی استفاده شد. در جدول زیر نتایج ضرایب برآوردی الگوی (۲) مشاهده می‌شود.

جدول(۱) برآورد الگوی (۲)

	شاخص کل	شاخص ۵۰ شرکت برتر	شاخص ۳۰ شرکت بزرگ
μ	۰/۰۹۳ *(۰/۰۱۵)	۰/۰٦٤ *(۰/۰۱۸)	۰/۱ *(۰/۰۲۸)
σ	۰/٤۹ *(۰/۰۱۵۳)	۰/۷۳ *(۰/۰۲۲)	۰/۸۷ *(۰/۰۳۷)
لگاریتم درستنمایی	-۲۲٦۱/٦٤	-۲٦۷۱/۲	-۱۵۱۵/۲۵

برگرفته از پژوهش[17].

عدد داخل پرانتز، انحراف معیار ضریب برآوردی است.

*معنی‌دار در سطح ۵ درصد.

با توجه به نتایج جدول فوق مقدار پارامتر رانش(μ) برای شاخص کل برابر با ۰/۰۹۳ و مقدار پارامتر انتشار(σ) برابر با ۰/٤۹ است و حداکثر لگاریتم راستنمایی هم برابر با ۲۲٦۱- است. یکی از معایب الگوی حرکت براونی هندسی ثابت در نظر گرفتن نوسانات است و مشکل دیگر این الگو عدم توجه به نقش اطلاعات در بازار سهام است. در حالی که نتایج مطالعات تجربی حاکی از تصادفی بودن نوسانات بازده هستند به عبارت دیگر نوسانات بازده از فرآیندهای گارچ پیروی می‌کنند. همچنین اطلاعات موجود در بازار دارای اهمیت فراوان در توضیح رفتار قیمت سهام هستند. با استفاده از الگوهای گارچ و الگوسازی رفتار نوسانات می‌توان

مشکل فوق را حل نمود. به منظور الگوسازی رفتار قیمت سهام با توجه به تاثیرات نامتقارن اخبار خوب و بد، از الگوی گارچ غیرخطی جهت توضیح رفتار نوسانات قیمت در طی زمان استفاده شد. نتایج برآورد ضرایب الگوی (۶)، در جدول زیر مشاهده می‌گردد.

جدول(۲) برآورد ضرایب الگوی (۶)

	شاخص کل	شاخص ۵۰ شرکت برتر	شاخص ۳۰ شرکت بزرگ
μ	۰/۰۲ (۰/۰۱۳)	۰/۰۲۱ (۰/۰۱۷)	-۰/۰۲۴ (۰/۰۲۵)
ω	۰/۱۸ *(۰/۰۲۳)	۰/۰۳ *(۰/۰۰۴)	۰/۲۱ *(۰/۰۵)
α	۰/۵۸ *(۰/۰۴۵)	۰/۹۴ *(۰/۰۰۷)	۰/۶۲ *(۰/۰۷)
β	۰/۱۹ *(۰/۰۲۴)	۰/۰۲ *(۰/۰۰۴)	۰/۱۲ *(۰/۰۲)
γ	-۰/۱۲۸ *(۰/۰۳۷)	-۰/۱ (۰/۰۷)	۰/۲۳ *(۰/۰۷)
لگاریتم درستنمایی	-۲۰۸۳/۴۶	-۲۶۰۸/۴۵	-۱۴۲۰/۷

عدد داخل پرانتز، انحراف معیار ضریب برآوردی است.

*معنی‌دار در سطح ۵ درصد.

با توجه به نتایج جدول فوق، اخبار خوب دارای تاثیر بیشتر بر رفتار شاخص کل هستند به عبارت دیگر شاخص کل به شوک‌های مثبت بیشتر واکنش نشان می‌دهد زیرا γ دارای مقدار منفی است. هم‌چنین با توجه به معیار لگاریتم درستنمایی، فرآیند براونی هندسی با نوسانات تصادفی دارای قدرت توضیح دهندگی بیشتر نسبت به فرآیند براونی با نوسانات ثابت است. ضرایب برآوردی شاخص قیمت ۵۰ شرکت برتر نشان می‌دهد که همانند شاخص کل، شاخص قیمت ۵۰ شرکت برتر بیشتر تحت تاثیر اخبار خوب است زیرا γ منفی است بنابراین شوک‌های مثبت تاثیر بیشتری بر رفتار شاخص قیمت ۵۰ شرکت برتر بورس دارد. با توجه به اینکه مقدار لگاریتم درستنمایی الگوی(۵) بیش از الگوی(۱) است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت تصادفی در نظر گرفتن نوسانات منجر به عملکر بهتر معادلات دیفرانسیل تصادفی در شبیه‌سازی رفتار شاخص قیمت ۵۰ شرکت برتر می‌شود.

شبیه‌سازی رفتار شاخص قیمت ۳۰ شرکت بزرگ بورس با استفاده از الگوی حرکت براونی هندسی با نوسانات تصادفی نشان می‌دهد (۱) شاخص قیمت این شرکت‌ها بیشتر تحت تاثیر انتشار اخبار بد در بازار است زیرا ضریب شوک مثبت است بنابراین شوک‌های منفی تاثیر بیشتری را بر رفتار قیمت ۳۰ شرکت بزرگ بورس دارند. (۲) تصادفی در نظر گرفتن نوسانات قیمت منجر به بهبود عملکرد معادلات دیفرانسیل تصادفی در شبیه‌سازی رفتار شاخص قیمت ۳۰ شرکت بزرگ بورس می‌شود.

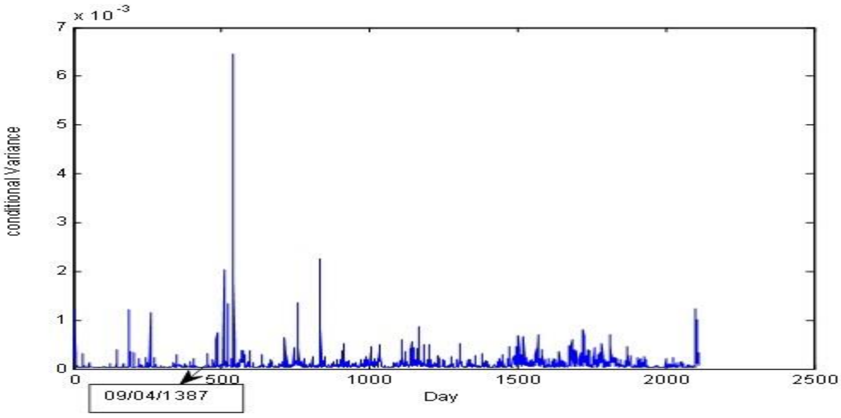
۴-۱- نتایج آزمون شکست ساختاری

به منظور بررسی شکست ساختاری[۱۸] ضرایب الگوی گارچ از الگوریتم مجموع مربعات تجمعی مرکزی تیاو استفاده می‌شود. با استفاده از این الگوریتم می‌توان نقطه زمانی وقوع شکست ساختاری را تعیین نمود. نتایج این آزمون برای واریانس غیرشرطی شاخص قیمت کل، شاخص قیمت ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران در نمودارهای زیر مشاهده می‌شود. نمودار(۱) نقاط وقوع شکست ساختاری در واریانس غیرشرطی

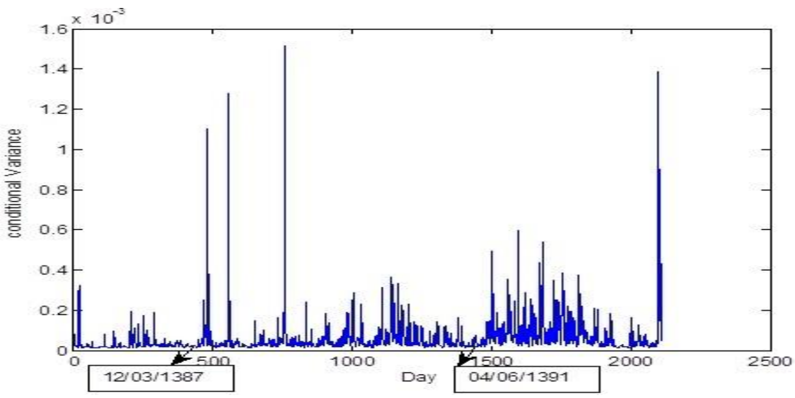
شاخص قیمت ۵۰ شرکت برتر را نشان می‌دهد در این نمودار محور افقی تعداد مشاهدات است و محور عمودی واریانس شرطی ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار است. با توجه به نتیجه آزمون شکست ساختاری اینکلان و تیاو، واریانس غیرشرطی بازده ۵۰ شرکت برتر در یک نقطه زمانی دارای شکست ساختاری است. این شکست ساختاری واریانس غیرشرطی در تاریخ ۱۳۸۷/۰٤/۹ اتفاق افتاده است.

نتایج الگوریتم مجموع مربعات تجمعی نشان داد که واریانس غیرشرطی بازده شاخص قیمت کل در دو نقطه زمانی دارای شکست ساختاری است. نقاط وقوع شکست ساختاری به ترتیب ۱۳۸۵/۰۳/۱۲ و ۰٦/۰٤/ ۱۳۹۱ هستند. در نمودار زیر نقاط وقوع شکست ساختاری واریانس غیرشرطی شاخص کل مشاهده می‌شود.

همچنین نتایج الگوریتم مجموع مربعات تجمعی نشان داد که واریانس غیرشرطی بازده شاخص قیمت ۳۰ شرکت بزرگ بورس اوراق بهادار، پایدار است و شکست ساختاری وجود ندارد. از این رو برآورد ضرایب فرآیند گارچ بدون توجه به شکست ساختاری منجر به اریب ضرایب برآوردی می‌شود.



نمودار(۱) آزمون شکست ساختاری واریانس غیرشرطی شاخص قیمت ۵۰ شرکت برتر



نمودار(۲) نقاط وقوع شکست ساختاری واریانس غیرشرطی شاخص قیمت کل

جدول(۳) برآورد ضرایب شاخص کل در نقاط دارای شکست ساختاری

	۱۳۸۵/۵/۵ تا ۱۳۸۷/۳/۱۲	۱۳۸۷/۳/۱۲ تا ۱۳۹۱/٦/٤	۱۳۹۱/٦/٤ تا ۱۳۹٤/۵/۲٦
μ	۰/۰۱۳ (۰/۰۱۹)	۰/۰۲٦ (۰/۰۲)	۰/۰۸ (۰/۰۳٦)*
ω	۰/۲ (۰/۰٤٤)*	۰/۲۳۹ (۰/۰۲۷)*	۰/۲۵ (۰/۰۹۲)*
α	۰/٤ (۰/۱۳)*	۰/٤۷ (۰/۰۵)*	۰/٦۲ (۰/۱۲)*
β	۰/۰۹۷ (۰/۰۳۸)*	۰/۲٤ (۰/۰۳۵)*	۰/۰۸۷ (۰/۰۳۱)*
γ	-۰/۵۷ (۰/۳)*	-۰/۰۷ (۰/۰۵۱)	-۰/۲۷ (۰/۱۳)*
لگاریتم درستنمایی	-۲۱٤	-۹٦٦/۲	-۸۰٤/٦۵

عدد داخل پرانتز، انحراف معیار ضریب برآوردی است.

*معنی‌دار در سطح ۵ درصد.

با توجه به نتایج جدول فوق، شاخص قیمت کل بورس در سه نقطه دارای شکست ساختاری است. از این رو برآورد ضرایب حرکت براونی هندسی با نوسانات تصادفی، بدون توجه به شکست ساختاری منجر به اریب ضرایب برآوردی می‌شود. همان‌طور مشاهده می‌شود ضرایب برآوردی در هر بازه به طور معناداری متفاوت از سایر بازه‌ها است.

با توجه به نتایج جدول(٤)، ضرایب برآوردی حرکت براونی هندسی با نوسانات تصادفی در بازه ۱۳۸۵/۵/۵ تا ۱۳۸۷/٤/۹ متفاوت از ضرایب این الگو در بازه ۱۳۸۷/٤/۹ تا ۱۳۹٤/۵/۲٦ است. هم‌چنین اخبار خوب و بد تاثیر معنی‌داری بر بازده ۵۰ شرکت برتر بورس در بازه‌های مورد بررسی ندارند . هر گاه بدون توجه به وجود شکست ساختاری ضرایب الگوی حرکت براونی با نوسان تصادفی برای ۵۰ شرکت برتر برآورد شود مقدار γ، منفی است اما در فاصله اطمینان ۹۵ درصد معنی‌دار نیست.

جدول(٤) برآورد ضرایب شاخص ۵۰ شرکت برتر در نقاط دارای شکست ساختاری

	۱۳۸۵/۵/۵ تا ۱۳۸۷/٤/۹	۱۳۸۷/٤/۹ تا ۱۳۹٤/۵/۲٦
μ	-۰/۰٤۷ (۰/۰۲٤)*	۰/۰٦۷ (۰/۰۲٤)*
ω	۰/۱۵ (۰/۱)	۰/۵ (۰/۰۹۸)*
α	۰/٦۹ (۰/۲۱)*	۰/۳٤ (۰/۱۱)*
β	۰/۰٤ (۰/۰۲٦)	۰/۱۲ (۰/۰۲٤)*
γ	-۰/۰۳٤ (۰/٤۷)	۰/۰۲٤ (۰/۰۷۳)
لگاریتم درستنمایی	-۳۷۵/۱۳	-۲۱٤۷/٤

عدد داخل پرانتز، انحراف معیار ضریب برآوردی است.

*معنی‌دار در سطح ۵ درصد.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

در این پژوهش شاخص قیمت کل بورس، شاخص قیمت ۵۰ شرکت برتر بورس و شاخص قیمت ۳۰ شرکت بزرگ بورس با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی الگوسازی شد. به این منظور شاخص قیمت با استفاده از دو الگوی حرکت براونی هندسی و حرکت براونی هندسی با نوسانات تصادفی شبیه‌سازی شد.

براساس نتایج تجربی، تصادفی در نظر گرفتن نوسانات منجر به بهبود عملکرد الگوی حرکت براونی هندسی می‌شود. شاخص ۳۰ شرکت بزرگ بورس بیشتر تحت تاثیر اخبار بد است. اخبار خوب در مقایسه با اخبار بد، تاثیر بیشتری بر شاخص قیمت کل بورس دارد. نتایج الگوریتم مجموع مربعات تجمعی مرکزی حاکی از وجود شکست ساختاری واریانس غیر شرطی است. به طوری‌که

واریانس غیرشرطی شاخص کل در دو نقطه زمانی دارای شکست ساختاری است، واریانس غیرشرطی شاخص قیمت ۵۰ شرکت برتر در یک نقطه زمانی دارای شکست ساختاری است و واریانس غیرشرطی شاخص ۳۰ شرکت بزرگ بورس در دوره زمانی مورد بررسی پایدار بوده و فاقد شکست ساختاری است.

از این رو به منظور الگوسازی رفتار قیمت دارایی‌های مالی بایستی به تصادفی بودن نوسانات بازده دارایی توجه می‌شود عدم توجه به این امر منجر به افزایش خطای پیش‌بینی قیمت دارایی مالی می‌شود. شوک‌های بزرگ بر بازارهای مالی موثر هستند و منجر به پدیده شکست در واریانس غیرشرطی بازده قیمت دارایی‌های مالی می‌شوند. عدم توجه به شکست ساختاری واریانس غیرشرطی منجر به افزایش اریب ضرایب فرآیند گارچ می‌شود و واریانس غیرشرطی برآوردی نیز دارای اریب خواهد بود در نتیجه منجر به افزایش خطای الگوی شبیه‌سازی رفتار قیمت دارایی مالی می‌شود.

فهرست منابع

* تالانه، ع. کش راد، ه، (۱۳۹۰)، بررسی کارایی بورس اوراق بهادار تهران در سطح ضعیف و نیمه قوی، تحقیقات حسابداری، سال سوم، شماره دوازده.
* خالوزاده، ح. صدیقی، ع، (۱۳۸٤)، الگو سازی و پیش بینی قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی، تحقیقات اقتصادی، شماره ٦۹، ۱–۲۷.
* خداویسی، ح. ملابهرامی، ا، (۱۳۹۰)، کاربرد معادلات دیفرانسیل تصافی در مدل سازی و پیش بینی قیمت نفت خام، اولین کنفرانس بین‌المللی رویکردهای نوین در نگهداشت انرژی.
* صالح آبادی، ع. مهران راد،م، (۱۳۹۰)، آزمون کارایی اطلاعاتی سطح ضعیف بورس اوراق بهادار تهران، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره ۱٦، ص ۷–۲۹.
* نیسی، ع. چمنی انباجی، ر، (۱۳۹۱)، سه مدل اساسی در ریاضیات مالی، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، شماره ۱.
* Ait-Sahalia, Y, (1996), Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities, Econometrica, Vol. 64, 527-560.
* Ait-Sahalia, Y. Jacod, J, (2010), Is Brownian Motion Necessary to Model High Frequency Data?, The Annals of Statistics, Vol. 38, 3093-3128.
* Ait-Sahalia, Y. Wang, Y, (2001), Do Option Markets Correctly Price the Probabilities of Movement of Underlying Asset? , Journal of Econometrics, Vol. 102, 67-110.
* Bakshi, G. Cao, C, Chen, Z, (1997), Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, the Journal of Finance, Vol. LII. No. 5.
* Ball, C. Torous, W, (1983), A Simplified Jump Process for Common Stock Returns, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 18.
* Bates, D, (2003), Empirical option pricing: a Retrospection, Journal of Econometrics, Vol. 116, 387 – 404.
* Black, F, (1976), The Pricing of Commodity Contracts, Journal of Financial Economics, Vol. 3, 167-179.
* Cameron, A. C. Trivedi, P, (2005), Microeconometrics Methods and Applications, Cambridge University Press, 384-418.
* Carlson, M, (2006), A Brief History of the 1987 Stock Market Crash with a Discussion of the Federal Reserve Response, working paper.
* Chisholm, A, (2004), Derivatives Demystified, Willy Finance, 1-2.
* Choi, S, (2015), Explicit Form of Approximate Transition Probability

Density Functions of Diffusion Processes, Journal of Econometrics, 57–73.

* Cox, J. Ross, S, (1976), The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, Journal of Financial Economics, Vol. 3, 145-166.
* Fama, E, (1969), The Adjustment of Stock Prices to New Information, International Economics Review, Vol. 10. P 1-21.
* Fama, F, (1965), The Behavior of Stock-Market Prices, the Journal of Business, Vol. 38, No. 1, 34-105.
* Heston, S, (1993), A Closed- Formed Solution for Options with Stochastic Applications to Bond and Currency Options, working paper.
* Kou, S. G, (2002), A Jump-Diffusion Model for Option Pricing, Management Science, Vol. 48, No. 8, 1086- 1101.
* Long, H. Shimizu, Y. Sun, W, (2013), Least Squares Estimators of Discretely Observed Stochastic Processes Driven by Small Levy Noises, Journal of Multivariate Analysis, 422-439.
* Merton, R, (1973), Theory of Rational Option Pricing, the Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, 141-183.
* Milgrom, P, (1981), Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications, the Bell Journal of Economics, Vol. 12, No. 2, 380-391.
* Pagan, A. Ullah, A, (1999), Nonparametric Econometrics, Cambridge University Press, 6-8.
* Reno, R. Bandi, F, (2008), Nonparametric Stochastic Volatility, SoFiE Inaugural conference.
* Schmisser, E, (2014), Non-Parametric Adaptive Estimation of the Drift for Jump Diffusion Process. Stochastic Processes and their Applications, 883–914.
* Shreve, S, (2004), Stochastic Calculus for Finance II, Springer, 85-123.

یادداشت‌ها

---

[1]. Diffusion models
[2] . Value at Risk
[3] . Bachelier
[4] .Bakshi
[5] .Reno & Bandi
[6]. Stochastic volatility
[7]. White
[8] . Anderson
[9]. Tang & Chen
[10] .Sahalia & Jacod
[11]. Drift
[12] . Fama
[13] . Ito
[14] . Hillebrand
[15] . Inclan & Tiao
[16] .Milgrom
[۱۷] از محیط برنامه نویسی نرم افزار STATA به منظور برآورد ضرایب الگوها استفاده شده است.
[۱۸] آزمون شکست ساختاری واریانس غیرشرطی با استفاده از نرم‌افزار GAUSS10 انجام شده است.