کاربرد سیستم فازی در معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه nام

حمید روح پرور[۱]

چکیده

در این مقاله، یک کاربرد از سیستم های فازی با روش کمترین مربعات طراحی می شود. چون برای تعدادی سیستم های ویژه، اطلاعات مهم از دو منبع می آید: منبع اول کارشناسان است که دانش آنها درباره سیستم در زبان های طبیعی توصیف می شود و دیگری مدل های ریاضی و اندازه گیری ها است که برطبق قوانین فیزیکی رسم می شوند، لذا ترکیب کردن این دو نوع از اطلاعات در داخل سیستم مهم است این وظیفه مهم با طراحی یک سیستم فازی انجام می شود. سیستم های فازی دانش محور یا قانون محور هستند. بنابراین در اینجا یک سیستم فازی ساخته می شود تا سیستم دینامیکی را تقریب بزند. بر اساس این تقریب فازی، قوانین سازگار مناسب برای سیستم دینامیکی غیر قطعی توسعه داده می شود. با طراحی سازگار پیشنهاد شده جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام با شرایط آغازین بدست آورده می شود. با توجه به قضایا، همگرایی از روش تضمین می شود. در انتها چند مثال برای توضیح استراتژی پیشنهاد شده سازگار بیان می شوند.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام، سیستم فازی، روش کمترین مربعات، جواب تقریبی.

دریافت مقاله: ۰۵/۱۰/۱۴۰۳

پذیرش مقاله: ۰۷/۱۱/۱۴۰۳

- مقدمه

سیستم های فازی در برد وسیعی از زمینه ها مانند مسایل کنترل، پردازش تصویر، ارتباطات، سیستم های خبره، دارو، فیزیولوژی و غیره کاربرد دارند.

قلب سیستم فازی قوانین IF-THEN است. مهمترین همکاری از تئوری سیستم فازی یک رهیافت برای انتقال دادن یک مجموعه از قوانین زبانی به یک تابع غیرخطی ارائه می دهد. سیستم های فازی انواع ویژه از توابع غیرخطی هستند که آنها بشکل تصمیم گیرنده یا پردازشگر سیگنال یا موارد دیگر استفاده می شوند. این سیستم های فازی هر تابع غیرخطی را روی یک مجموعه فشرده با دقت دلخواه می تواند تقریب بزند[۲, ۵, ۷, ۸]. مجموعه داده های ورودی اغلب با ابهام و عدم قطعیت همراه است، لذا به کارگیری روش های مرسوم ارزیابی، دشوار است. بنابراین سیستم فازی در کاربردهای واقعی خیلی مفید می تواند باشد.

در این مقاله، ما روش تقریب کمترین مربعات برای یافتن سیستم فازی بشکل تابع تقریب زده از یک تابع پیوسته استفاده می کنیم که تقریب فازی نامیده می شود، یعنی، فرض کنید $f(x)\in C[a,b]$ بنابراین یک تقریب فازی $F(x)$ که مینیمم می کند خطای

$$\| f(x)-F(x)\|_2=\left(\int_a^b (f(x)-F(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

نیاز می شود. فرض کنید $X\subseteq \mathrm{R}$ یک مجموعه فشرده است.

تعریف ۱.۱. *(تابع عضویت شبه ذوذنقه ای)* [۳] *فرض کنید* $[a,d]\subseteq \mathrm{R}$. *تابع عضویت شبه ذوذنقه ای از مجموعه فازی* A *یک تابع پیوسته در* R *داده شده بر طبق*

$$\mu_A(x;a,b,c,d,H)=\begin{cases} I(x) & x\in[a,b) \\ H & x\in[b,c] \\ D(x) & x\in(c,d] \\ \circ & x\in \mathrm{R}-(a,d) \end{cases}$$

[۱] پست الکترونیک: rouhparvar59@gmail.com

۱. استادیار، گروه ریاضی، واحد ساوه، دانشگاه آزاد اسلامی، ساوه، ایران.

است که $0 < H \le 1$ ، $a \le b \le c \le d$, $a < d$ ، $0 \le I(x) \le 1$ یک تابع غیر نزولی در $[a,b]$ و $0 \le D(x) \le 1$ یک تابع غیرصعودی در $[c,d]$ است. زمانی که مجموعه فازی A نرمال است ($H = 1$) ، تابع عضویتش بطور ساده بشکل $\mu_A(x;a,b,c,d)$ نوشته می شود.

اگر $a=-\infty$ ، $b=c=\bar{x}$ ، $d=\infty$ و

$$I(x)=D(x)=e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\sigma})^2}$$

انتخاب شود آنگاه تابع عضویت شبه ذوذنقه ای، تابع عضویت گوسین نامیده می شود.

تعریف ۱,۲ [۴] *فرض کنید $A_i \ne \emptyset$, $A_i \subseteq [a,b]$, $i=1,\dots,n$ و $A_i \ne X$ ، n- تایی $(A_1,A_2,\dots,A_n)$ از مجموعه های فازی یک افراز از X نامیده می شود اگر و فقط اگر*

$$\forall x\in X, \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x)=1.$$

تعریف ۱,۳. [۶] *فرض کنید $a=x_1<\cdots<x_n=b$ گره های ثابت در داخل $X=[a,b]$ باشد بطوریکه $x_1=a$ ، $x_n=b$ و $n\ge 2$ مجموعه های فازی $A_1,A_2,\dots,A_n$ اساس توابع و شکل یک افراز فازی از X هستند اگر چهار شرط زیر برای $i=1,2,\dots,n$ صدق کند*

۱. $\mu_{A_i}: X\to[0,1]$ ، $\mu_{A_i}(x_i)=1$.
۲. μ_{A_i} پیوسته روی X است.
۳. μ_{A_i} بطور اکید صعودی در $[x_{i-1},x_i]$ و بطور اکید نزولی در $[x_i,x_{i+1}]$.
۴. $\forall x\in X, \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x)=1$.

تعریف ۱,۴. *فرض کنید $y(x)$ یک تابع پیوسته و جواب دقیق از معادله دیفرانسیل خطی است. اگر $F(x)$ تقریب فازی از جواب معادله دیفرانسیل خطی باشد، آنگاه تابعی خطا بشکل*

$$Error(x)=|y(x)-F(x)|$$

تعریف می شود.

۲- معرفی سیستم فازی

یک سیستم استنتاج فازی تک ورودی-تک خروجی $X=[a,b]\subseteq R\to Y\subseteq R$ را در نظر بگیرید. تابع تقریب فازی $F(x)$ مشابه زیر می تواند توصیف شود

R_l :اگر x ، A_l است پس y ، u_l است.

که R_l ($l=1,\dots,M$) یک قانون فازی ، x متغیر ورودی به سیستم فازی، و u_l جواب پیشنهاد شده برطبق قانون l ام است. تابع عضویت $\mu_{A_l}(x)$ ($l=1,\dots,M$) مجموعه های فازی l ام روی فضای متغیر $x\in X$ را مشخص می کند. این تابع عضویت بشکل زیر است

$$\mu_{A_l}(x)=e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_l}{\sigma_l})^2} \tag{2.1}$$

که بترتیب m_l و σ_l مقدار میانگین و انحراف استاندارد از توزیع عضویت هستند.

سیستم استنتاج فازی که تقریب فازی نامیده می شود می تواند بصورت

$$F(x)=\sum_{j=1}^{M} p_j(x)u_j \tag{2.2}$$

در نظر گرفته شود که $u_j\in R$ ثابت است و $p_j(x)$ تابع پایه ای فازی نامیده می شود که بفرم زیر است

$$p_j(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_j}{\sigma_j})^2}}{\sum_{l=1}^{M} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_l}{\sigma_l})^2}}. \tag{2.3}$$

بنابراین، سیستم استنتاج فازی بشکل یک ترکیب خطی و نمایی از توابع پایه ای فازی می تواند دیده شود. مفهوم فیزیکی در (۲,۲) آنست که u_j ها در کنار توابع هموار فازی $p_j(x)$ ، $j=1,\dots,M$ وارد می شوند تا تابع $y(x)$ را تقریب بزنند. تقریب فازی در (۲,۲) خواص زیر را دارد

$$\sum_{i=1}^{M} p_i(x)=1, \forall x\in[a,b],$$

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_{A_i}(x)\ne 0, \forall x\in[a,b].$$

۳- حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام

در این بخش، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با شرایط آغازین را در نظر گرفته و با سیستم فازی معرفی شده با استفاده از روش تقریب کمترین مربعات جواب تقریبی آن بدست می آید.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام را بشکل زیر در نظر بگیرید

$$r_n(x)y^{(n)}+r_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+r_1(x)y'+r_0(x)y=R(x), \tag{3.1}$$

که $y(x)$ یک تابع مشتق پذیر مرتبه n ام روی بازه $X=[a,b]\subset \mathrm{R}$ است، و $r_0(x),\ldots,r_n(x)$ و $R(x)$ توابع پیوسته مفروض هستند. معادله فوق با شرایط آغازین

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}, \tag{3.2}$$

در نظر گرفته می شود که در آن $y_0,\ldots,y_{n-1}$ و x_0 متعلق به R هستند .

فرض ۳,۱. *فرض کنید یک جواب منحصربفرد برای ۳,۱ و ۳,۲ وجود دارد.*

قضیه ۳,۲. *فرض کنید $y(x)$ جواب مشتق پذیر بطور پیوسته از یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام تعریف شده روی $X=[a,b]$ است و $\Delta=\dfrac{b-a}{M-1}$ ، $a_i=a+(i-1)\Delta$ و $\sigma_i=\Delta$ برای $i=1,\ldots,M$ آنگاه کران خطای تقریب بین جواب دقیق $y(x)$ و تقریب فازی پیشنهاد شده $F(x)$ در (۲,۲) می تواند بفرم*

$$|y(x)-F(x)|\le 0/83452F_\infty\Delta+\max_i|e^i|, \tag{3.3}$$

توصیف شود که Δ بشکل عامل فاصله تعریف شده و $e^i=y(a_i)-u_i$ بشکل عامل خطای جواب نامیده می شود. فاکتور $F_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|y'(x)|$ بفرم عامل هموار تعریف می شود .

برهان. اثبات مشابه قضیه ۱ در [۲] است .

قضیه ۳,۲ تقریب قابل قبول تری نسبت به قضیه تقریب سراسری در [۷] نشان می دهد تا ثابت کند تقریب فازی (۲,۲) برای تقریب زدن معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با هر درجه از دقت می تواند استفاده شود .

فرض ۳,۳. *فرض کنید یک مجموعه از پارامترهای u_j زمانی که $M\to\infty$ وجود دارد .*

زمانی که M عدد بزرگی است، یعنی $M\to\infty$ ، و بر اساس قضیه ۳,۲، ما قضیه زیر را داریم .

قضیه ۳,۴. *فرض کنید M عدد بزرگی است، یعنی $M\to\infty$. آنگاه تقریب فازی پیشنهاد شده بشکل زیر به جواب دقیق همگرا خواهد شد*

$$\lim_{M\to\infty}F(x)=y(x).$$

برهان. اثبات مشابه قضیه ۲ در [۲] است .

با توجه به قضیه ۳,۴ در حقیقیت فقط تعداد متناهی از نقاط شبکه $x(l)=a_l$ برای جواب عددی با همه نقاط x در X در نظر خواهیم گرفت. برای اینکار از روش تقریب کمترین مربعات استفاده خواهد شد. برای معادله ۳,۱ و ۳,۲ طبق روش کمترین مربعات تابع انرژی زیر را داریم

$$\begin{aligned} E\equiv E(u_1,\ldots,u_M)&= \\ &\int_a^b(r_n(x)y^{(n)}+\cdots+r_0(x)y-R(x))^2dx \\ &+\lambda_0(y(x_0)-y_0)^2+\cdots+ \\ &\lambda_{n-1}(y^{(n-1)}(x_0)-y_{n-1})^2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

که $\lambda_i\ (i=0,\ldots,n-1)$ عامل وزن است.

اکنون یک سیستم فازی که تابع انرژی در ۳,۴ را برطبق ۲,۲ مینیمم کند، بصورت زیر می توان نوشت

$$\begin{aligned} E\equiv E(u_1,\ldots,u_M)&= \\ &\int_a^b(r_n(x)F^{(n)}(x)+\cdots+r_0(x)F(x)-R(x))^2dx \\ &+\lambda_0(F(x_0)-y_0)^2+\cdots+ \\ &\lambda_{n-1}(F^{(n-1)}(x_0)-y_{n-1})^2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

یعنی

$$E=\int_a^b\Big(\sum_{j=1}^{M}(r_n(x)p_j^{(n)}(x)+\cdots+ r_0(x)p_j(x))u_j-R(x)\Big)^2dx + \lambda_0\Big(\sum_{j=1}^{M}p_j(x_0)u_j-y_0\Big)^2+\cdots+ \lambda_{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{M}p_j^{(n-1)}(x_0)u_j-y_{n-1}\Big)^2. \tag{3.6}$$

هدف پیدا کردن ضرایب $u_1,\ldots,u_M\in\mathbb{R}$ است تا تابع انرژی E را مینیمم کند. شرط لازم برای مینیمم کردن تابع انرژی E بفرم زیر است

$$\frac{\partial E}{\partial u_i}=0,\ \forall i, i\in\{1,\ldots,M\}.$$

از اینکه

$$E=\int_a^b R^2(x)dx- 2\sum_{j=1}^{M}u_j\Big(\int_a^b(R(x)r_n(x)p_j^{(n)}(x)+\cdots + R(x)r_0(x)p_j(x))dx\Big)+ \int_a^b\Big(\sum_{j=1}^{M}(r_n(x)p_j^{(n)}(x)+\cdots+r_0(x)p_j(x))u_j\Big)^2dx + \lambda_0\Big(\sum_{j=1}^{M}p_j(x_0)u_j-y_0\Big)^2+\cdots+ \lambda_{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{M}p_j^{(n-1)}(x_0)u_j-y_{n-1}\Big)^2,$$

داریم

$$\frac{\partial E}{\partial u_i}= -2\int_a^b(R(x)r_n(x)p_i^{(n)}(x)+\cdots+R(x)r_0(x)p_i(x))dx +2\int_a^b(r_n(x)p_i^{(n)}(x)+\cdots+r_0(x)p_i(x)) \Big(\sum_{j=1}^{M}(r_n(x)p_j^{(n)}(x)+\cdots+r_0(x)p_j(x))u_j\Big)dx +2\lambda_0 p_i(x_0)\Big(\sum_{j=1}^{M}p_j(x_0)u_j-y_0\Big)+\cdots +2\lambda_{n-1}p_i^{(n-1)}(x_0)\Big(\sum_{j=1}^{M}p_j^{(n-1)}(x_0)u_j-y_{n-1}\Big).$$

در نتیجه پیدا کردن یک جواب بشکل تقریب فازی برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام در ۳,۱ و ۳,۲، سیستم معادلات خطی

$$\sum_{j=1}^{M}\Big(\int_a^b(r_n(x)p_i^{(n)}(x)+\cdots+r_0(x)p_i(x)) (r_n(x)p_j^{(n)}(x)+\cdots+r_0(x)p_j(x))dx +\lambda_0 p_i(x_0)p_j(x_0)+\cdots+\lambda_{n-1}p_i^{(n-1)}(x_0)p_j^{(n-1)}(x_0)\Big)u_j =\int_a^b(R(x)r_n(x)p_i^{(n)}(x)+\cdots+R(x)r_0(x)p_i(x))dx +\lambda_0 p_i(x_0)y_0+\cdots+\lambda_{n-1}p_i^{(n-1)}(x_0)y_{n-1}, \tag{3.7}$$

باید برای M مجهول u_j حل شود.

توجه: در رابطه (۳,۷)، انتگرال با استفاده از قاعده سیمپسون تقریب زده خواهد شد [1] .

۴-مثال

مثال ۴,۱. *معادله انقباض هسته ای*

$$\begin{cases} y'(x)=-\alpha y(x),\\ y(0)=y_0,\end{cases} \tag{4.1}$$

را با جواب دقیق $y(x)=y_0e^{-\alpha x}$ ، $\alpha=-1$، $y_0=2$ و $x\in[0,1]$ *در نظر بگیرید*.

بر اساس روش پیشنهاد شده، پارامترها را با مقادیر زیر درنظر بگیرید،

$$M=12, \lambda_0=100, h=0/01,$$
$$\sigma_l=\frac{1}{11}, m_l=\frac{1}{11}(l-1), l=1,\ldots,12.$$

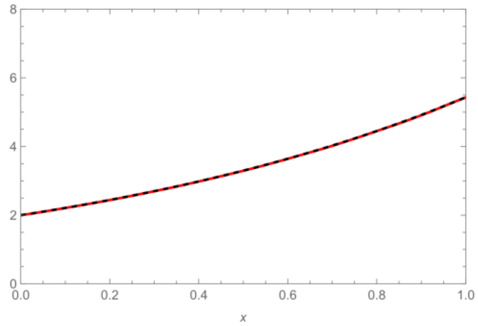
لذا

$$F(x)=\frac{\sum_{l=1}^{12}u_l\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_l}{\sigma_l})^2}}{\sum_{l=1}^{12}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_l}{\sigma_l})^2}}$$

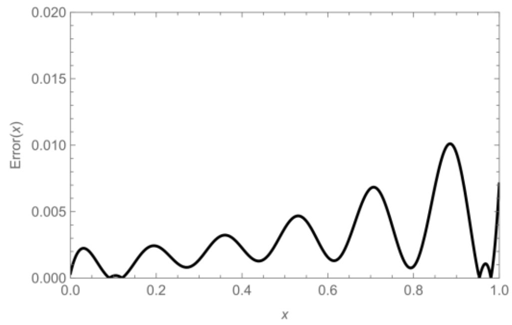
که با حل سیستم معادلات خطی، u_l برای $l=1,\ldots,12$ بدست می آید. نمودار $Error(x)$, $F(x)$, $y(x)$ و تابع انرژی E بترتیب در شکل های ۱، ۲ و ۳ رسم شده اند.

از شکل ۱ واضح است که تقریب فازی پیشنهاد شده بعنوان جواب تقریبی روی بازه دقت خوبی دارد و با جواب دقیق

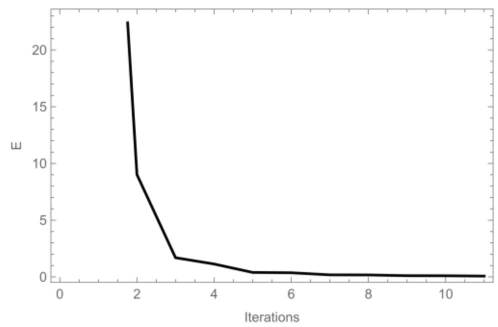
تقریبا یکسان است. شکل ۲، خطا بین تقریب فازی پیشنهاد شده و جواب دقیق را نشان می دهد و تابع انرژی در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۱: نمودار $F(x)$ (قرمز) و $y(x)$ (سیاه).



شکل ۲: نمودار $Error(x)$.



شکل ۳: نمودار تابع انرژی.

مثال ۴,۲. *معادله دیفرانسیل مرتبه دوم*

$$\begin{cases} y''(x)+y(x)=\sin(x), \\ y(0)=0/1, \\ y'(0)=-\dfrac{1}{3}, \end{cases} \tag{4.2}$$

را با جواب دقیق $y(x)=\frac{1}{3}\sin(x)+0/1\cos(x)-\frac{1}{3}\sin(2x)$ *در* $x\in[0,10]$ *در نظر بگیرید.*

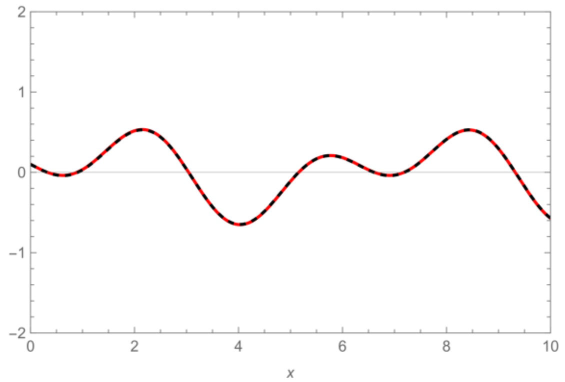
در این مثال برای ساختن سیستم از معادلات خطی پارامترها با مقادیر زیر در نظر گرفته می شوند،

$$M=47, h=0/1, \lambda_0=200, \lambda_1=100,$$

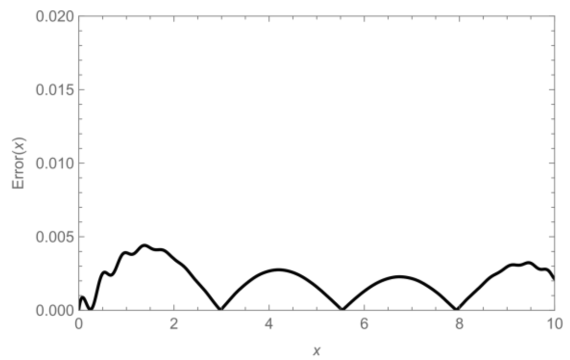
$$\sigma_l=\frac{10}{46}, m_l=\frac{10}{46}(l-1), l=1,\dots,47,$$

$$F(x)=\frac{\sum_{l=1}^{47} u_l\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_l}{\sigma_l})^2}}{\sum_{l=1}^{47} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_l}{\sigma_l})^2}}$$

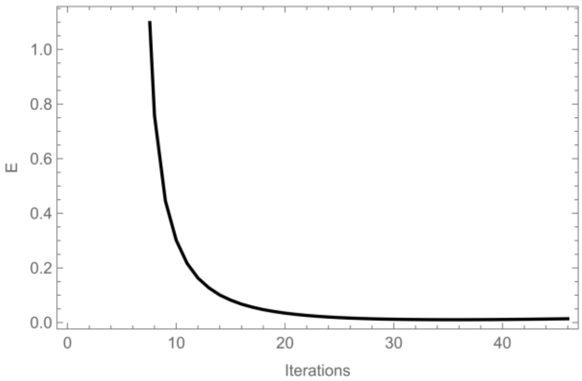
که با حل سیستم از معادلات خطی مقادیر u_l برای $l=1,\dots,47$ بدست می آید. بنابراین $y(x)$، $F(x)$، $Error(x)$ و تابع انرژی به ترتیب در شکل های ۴، ۵ و ۶ رسم شده است.



شکل ۴: نمودار $F(x)$ (قرمز) و $y(x)$ (سیاه).



شکل ۵: نمودار $Error(x)$.



شکل ۶: نمودار تابع انرژی.

مثال ۴،۳. *معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب متغیر*

$$\begin{cases} xy''(x)+(2x+3)y'+(x+3)y(x)=3e^{-x}, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1, \end{cases}$$
(4.3)

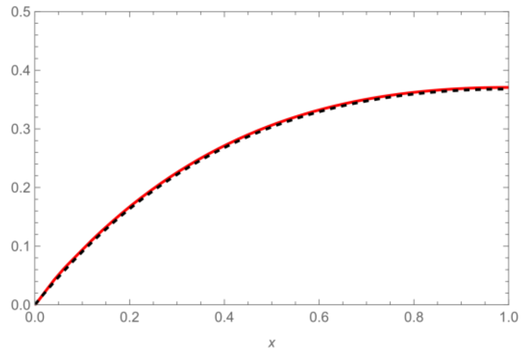
را با جواب دقیق $y(x)=xe^{-x}$ *در* $x\in[0,1]$ *در نظر بگیرید.*

معادله فوق با روش بیان شده با پارامتر های

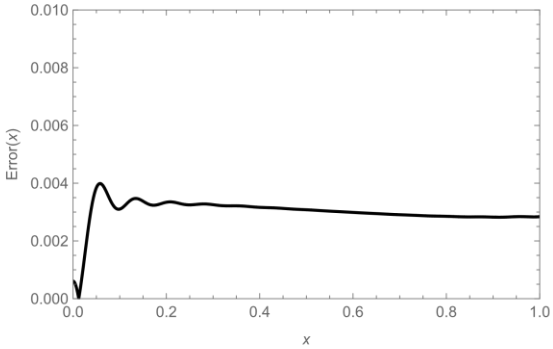
$$M=27, \lambda_0=50, \lambda_1=10, h=0/005,$$

$$\sigma_l=\frac{1}{26}, m_l=\frac{1}{26}(l-1), l=1,\dots,27,$$

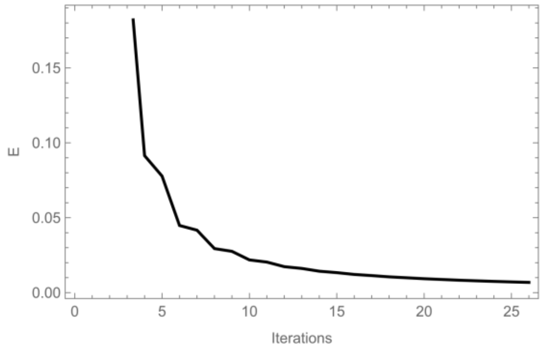
حل شده و $y(x)$، $F(x)$، $Error(x)$ و تابع انرژی به ترتیب در شکل های ۷، ۸ و ۹ رسم شده است.



شکل ۷: نمودار $F(x)$ (قرمز) و $y(x)$ (سیاه).



شکل ۸: نمودار $Error(x)$.



شکل ۹: نمودار تابع انرژی.

۵-نتیجه گیری

تئوری تقریب از سیستم فازی مورد بحث قرار گرفته و نتایج زیر بدست می آید:

۱. سیستم فازی پیشنهاد شده برای حل معادله دیفرانسیل خطی تقریب گر سراسری است.

۲. رهیافت کلی برای ساختن سیستم فازی پیشنهاد شده برای حل معادله دیفرانسیل داده شده است.

۳. شبیه سازی نشان می دهد که روش پیشنهاد شده نتایج خوبی در تقریب توابع پیوسته غیرخطی از جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام تولید می کند، و برای بدست آوردن تقریب بهتر می توان تعداد قوانین را افزایش داد.

تقدیر و تشکر

مولف از داوران محترم جهت ارائه پیشنهادهای سازنده و مفیدشان کمال تشکر و قدردانی را بعمل می آورد.

مراجع

[1] Burden, R.L., Faires, J.D. (2011) Numerical analysis, Ninth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning.

[2] Chen, Y.Y., Chang, Y.T., Chen, B.S. (2009) Fuzzy solutions to partial differential equations: adaptive approach. IEEE Transactions on fuzzy systems, 17(1), 116-127.

[3] Dubois, D., Prade, H. (1980) Fuzzy sets and systems: Theory and applications, Academic Press, Inc., Orlando, Florida.

[4] Leondes, C. (1998) Fuzzy Logic and expert systems applications, Academic Press.

[5] Li, Y.-M., Shi, Z.-Ke, Li, Z.-H. (2002) Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implications-MIMO cases. Fuzzy Sets and Systems, 130, 159-174.

[6] Perfilieva, I. (2006) Fuzzy transforms: Theory and applications, Fuzzy sets and Systems, 157(8), 993-1023.

[7] Wang, L.-X. (1997) A course in fuzzy systems and control, Prentice-Hall International, Inc.

[8] Wang, L.-X., Mendel, J.M. (1992b) Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning. IEEE Trans. Neural Networks, 3(5), 807-814.

Application of the fuzzy system in the N-order linear differential equation

Hamid Rouhparvar[1]

1. **Department of Mathematics, Saveh Branch, Islamic Azad University, Saveh, Iran.**

*****Corresponding Author: Hamid Rouhparvar

ABSTRACT

In this paper, an application of fuzzy systems to least squares method is designed. Since, for many practical systems, important information comes from two sources: one source is experts who describe their knowledge about the system in natural languages and the other is measurements and mathematical models that are derived according to physical laws, then it is important to combine these two types of information into system and this important task is performed by design fuzzy system. Fuzzy systems are knowledge-based or rule-based systems. Hence in here, a fuzzy system is constructed to approximate the system dynamic. Based on this fuzzy approximation, suitable and adaptive laws for uncertain system dynamic is developed. With the proposed adaptive design solution of the Nth order linear differential equation to initial conditions is obtained. By attention to theorems, convergence of the proposed technique is guaranteed. In final, several examples are presented for illustration of the adaptive proposed strategy.

Keywords:
N-order linear differential equation, fuzzy system, least squares method, approximate solution