توسعه مدل تراکم در تحلیل پوششی داده‌های فازی

علیرضا علی‌نژاد [۱،*] بهنام محمدبیگی [۲]

[۱] دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، گروه صنایع ، قزوین، ایران(عهده‌دار مکاتبات)

[۲] کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، گروه صنایع ، قزوین، ایران

تاریخ دریافت: فروردین ۱۳۹۶، اصلاحیه: خرداد ۱۳۹۶، پذیرش: تیر ۱۳۹۶

چکیده

در این پژوهش به توسعه مدل تراکم در تحلیل پوششی داده‌های فازی پرداخته می‌شود. برای رسیدن به کران‌های بالا و پایین برای مفاهیم کارایی، ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌توان از امتیازات روش α-برش که در تحلیل پوششی داده‌های فازی وجود دارد، استفاده نمود. همچنین در این پژوهش به بیان مفهوم جدیدی از تراکم پرداخته می‌شود که این مفهوم نوین، تراکم را در دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه بررسی می‌نماید. در این مفهوم، حالت خوش‌بینانه، تراکم را در شرایطی بررسی می‌کند که واحد تصمیم گیرنده‌ی تحت بررسی با گرفتن کمترین ورودی
، بهترین خروجی را ارائه می‌دهد. همچنین حالت بدبینانه بیانگر شرایطی است که واحد تصمیم گیرنده تحت بررسی، با گرفتن بیش‌ترین ورودی، بدترین خروجی را ارائه می‌نماید. با استفاده از این دو حالت، تراکم در تحلیل پوششی داده‌های فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تحلیل پوششی داده‌های فازی، تراکم خوش‌بینانه و بدبینانه، α- برش

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها(DEA[1]) در واقع یک چارچوب تئوریک را برای تحلیل عملکرد فراهم می‌آورد که شامل مجموعه‌ای از تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی است که مرز کارا را با استفاده از مدل‌های مشاهده شده ایجاد می‌کند و آنگاه به ارزیابی و اندازه‌گیری واحد تصمیم‌ساز می‌پردازد. تحلیل پوششی داده‌ها یکی از روش‌های مفید مدیریت و ابزار خوبی برای تعیین کارایی واحد های تصمیم گیری است. کلیدی‌ترین ویژگی این روش آن است که واحدهای تصمیم‌گیری تحت بررسی متجانس بوده و ورودی‌هایی از نوع یکسان را جهت تولید خروجی‌هایی از نوع یکسان مصرف می‌کنند و این همان ویژگی است که واحدها را قابل مقایسه با هم می‌کند[۱]. در مدل‌های سنتی فرض بر این است که اطلاعات مربوط به همه نهاده‌ها و ستاده‌ها کاملا شناخته شده و قطعی و دقیق است اما این فرض ممکن است در دنیای واقعی درست نباشد. در پژوهش‌هایی که قبلا در زمینه محاسبه و مقایسه کارایی دستگاه‌های مختلف اقتصادی صورت گرفته است بیشتر از روش‌های تحلیل پوششی داده‌های کلاسیک(قطعی)، که شامل مدل های چارنز، کوپر، رودز(CCR[2]) و بنکر، چارنز، کوپر (BCC[3]) بوده استفاده شده است که یکی از اشکالات وارد شده به این روشهای دقیق برای محاسبه کارایی، وجود ریسک برای تصمیم گیرنده‌ها است و به علت نبود شرایط قطعیت، به کارگیری روش‌های تحلیل پوششی داده‌های کلاسیک در بسیاری از بخش‌ها مناسب به نظر نمی‌رسید. از آنجایی که در دنیای واقعی با داده‌های غیر قطعی سروکار داریم بنابراین داده‌های ورودی و خروجی همواره قطعی نیستند. کوپر و همکاران تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها را در کنار داده‌های غیردقیق[4] قرار دادند[۳،۲]. منظور از داده‌های غیردقیق داده‌هایی است که در آنها ورودی‌ها و خروجی‌ها در یک بازه‌های از اعداد تعریف شده و یا برای آنها رتبه در نظر گرفته می‌شود. مدل‌های غیردقیق تحلیل پوششی داده‌ها متفاوت است و این به صورت انواع مدل‌ها مانند مدل‌های تصادفی که در آن داده‌های غیردقیق با استفاده از انواع احتمالات برآورده می‌شوند، مدل‌های بازه‌ای، مدل‌های خاکستری و مدل‌های فازی به کار می‌روند. یکی از کاربردهای مهم تحلیل پوششی داده‌ها، مفهوم تراکم می‌باشد. مفهوم اقتصادی تراکم در اکثر پدیده‌ها قابل مشاهده است. در میان محققان تراکم به عنوان یک ناکارایی معروف است، اما این نوع ناکارایی با مفهوم ناکارایی تکنیکی که از قبل شناخته شده است متفاوت است. تراکم در ورودی زمانی رخ می‌دهد که کاهش در حداقل یکی از ورودی بدون بدتر کردن دیگر شاخص‌ها باعث افزایش حداقل یکی از خروجی‌ها بدون

1- Data Envelopment Analysis
2 -Charnes, Cooper, Rhodes
3- Banker, Charnes, Cooper

4- Imprecise Data

* alalinezhad @gmail.com

بدتر کردن دیگر شاخص‌ها شود یا بالعکس افزایش در ورودی‌ها منجر به کاهش ماکزیمم خروجی قابل دستیابی شود. تراکم را می‌توان به عنوان جزئی مجزا از ناکارایی در نظر گرفت. البته ناکارایی زمانی رخ می‌دهد که امکان بهبود بعضی از ورودی‌ها و خروجی‌ها بدون بدتر کردن دیگر ورودی‌ها و خروجی‌ها ممکن باشد. اما تراکم در ورودی‌ها به همراه بهبود در حداقل یکی از خروجی‌ها می‌باشد شناسایی و محاسبه تراکم و بدست آوردن آن و حذف کردن واحد تصمیم‌گیرنده‌ای(DMU[1]) که تراکم دارد دو مزیت دارد، اول اینکه اگر حذف شود چون از جنس ورودی است و ورودی از جنس هزینه است، هزینه کاهش می‌یابد و دوم اینکه طبق تعریف تراکم باعث کاهش خروجی می‌شود، پس با حذف تراکم خروجی افزایش می‌یابد.

۱-۱ ضرورت انجام پژوهش

با توجه به پژوهش‌هایی که در زمینه تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها صورت گرفته است، تقریبا در اغلب موارد تراکم با ارائه روش‌ها و رویکردهای متفاوت در تحلیل پوششی داده‌های قطعی(کلاسیک)، انجام شده است. البته مواردی وجود دارند که تراکم را در تحلیل پوششی داده‌های تصادفی بررسی می‌کند[۴]. با این وجود بحث تراکم با ورودی‌ها و خروجی‌های فازی و مفهوم تراکم خوش‌بینانه و بدبینانه در پژوهش جاری بیان خواهند شد.

۱-۲ هدف پژوهش

در این پژوهش، پس از به‌کارگیری ورودی‌ها و خروجی‌های فازی در مبحث تراکم، هدف اصلی این است که مدل‌های نوینی تحت عنوان تراکم خوش‌بینانه و بدبینانه را تحلیل پوششی داده‌های فازی ارائه، ارزیابی و مقایسه می‌نماییم.

۱-۳ سوال پژوهش

پرسش اصلی این پژوهش به این صورت مطرح می‌شود که آیا تفاوت معناداری برای وجود تراکم در حالات قطعی، خوش‌بینانه و بدبینانه وجود دارد و یا به عبارت دیگر وجود یا عدم وجود یکی از این سه حالت بر دیگری تاثیر دارد؟

۱-۴ ادبیات و پیشینه پژوهش

تراکم یکی از مباحث مهم در تحلیل پوششی داده‌ها و اقتصاد می‌باشد که بر کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده تاثیر گذار است. از میان تمام روشهای ارائه شده برای تشخیص تراکم دو روش اصلی به نامهای FGL[2] (فار، گراسکوف و لاول) و روش CTT[3] (کوپر، تامسون و ترال) وجود دارد، روش FGL که به نام فار و گراسکوف و لوول ثبت شده است اولین روش ارائه شده در تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی تراکم می‌باشد که فقط می‌تواند وجود یا عدم وجود تراکم را مشخص نماید. این روش با حل دو مدل از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها انجام می‌شود. روش FGL یک روش شعاعی است و در مثال‌های خاصی که واحد تصمیم گیرنده در یک شعاع از مرکز قرار دارد و تراکم تشخیص داده نمی‌شود و در روش CTT نیز گاهی کارایی تکنیکی با تراکم اشتباه گرفته می‌شود.

تراکم به عنوان حالت خاصی از ناکارایی می‌باشد. برای تشخیص تراکم و برآورد مقدار آن و جدا کردن آن از اشکال دیگر ناکارایی می‌توان از مدل‌های برنامه ریزی تحلیل پوششی داده‌ها استفاده کرد. همچنین از مدل‌های برنامه‌ریزی تحلیل پوششی داده‌ها برای تشخیص موقعیت‌هایی که می‌توان در مدیریت تراکم بهبود ایجاد کرد استفاده می‌شود. به عنوان مثالی از کاربردهای تراکم می‌توان به پژوهش‌های عملی بروکت و همکارانش[4] برای پی بردن به مشکل تراکم در چین و نیاز به توجه مدیران و مسئولان دولتی برای ایجاد تعادل بین تراکم از یک سو و بیکاری از سوی دیگر اشاره کرد. همچنین شناسایی و ارزیابی تراکم کاربردهای مهمی در متعادل کردن تولید، امور استخدامی در کشورهای پر جمعیتی مثل چین و هند که هر سال ۱۶ تا ۱۸ میلیون نیروی کار وارد بازار می‌شوند، تهیه لوازم بهداشتی در US و تعدیل کارگران در معادن زغال سنگ دارد. تراکم به عنوان حالت خاصی از ناکارایی در نوشته ها و منابع اقتصادی غرب مورد توجه قرار نگرفته است و این روند بسیار کند از مفهوم تراکم، ممکن است به دلیل عدم علاقه به این موضوع، یا شاید حتی نگرش منفی نسبت به مفهوم تراکم در مقالات اقتصادی باشد. در عوض استیگلر[5] در سال ۱۹۷۶ برنده جایزه نوبل اقتصاد در بازنگری مفهوم X-کارایی(که در سال۱۹۹۶ لایبنشتاین[6] تلاش کرد آنرا به محافل اقتصادی معرفی کند) به طرح این موضوع پرداخت که تراکم و موضوعات مرتبط با آن موضوعات مناسبی برای مطالعه در اقتصاد نیستند[۵]. علاقمندی به موضوع تراکم با ارائه فرمولهای تحلیل پوششی داده‌ها مربوط به آن در مقاله فار و گراسکوف[7][۶].مقاله فار و سونسون[8] [۷]. بوجود آمد و در ادامه سبب مناظرات جالبی بین مقاله چرچی و همکاران[9][۸].و مقاله کوپر و همکاران گردید[۲]. یک حوزه دیگر برای پژوهش، اخیرا معرفی شده است که بر روی نوعی از کارایی برای مدیریت تراکم تمرکز دارد. مقاله کوپر و همکاراندر سال ۲۰۰۱ که این موضوع برای اولین بار در آن معرفی شده است نشان میدهد چگونه ناکاریی‌های مدیریتی را که سبب کاهش ستاده می‌شود، بعلاوه کاهش‌هایی که به علت وجود تراکم پیش می‌آیند شناسایی کنیم و همانطور که این مقاله مطرح کرده است این موضوع زمانی که افزایش تراکم نهاده دارای خواص مطلوبی است می‌تواند مفید باشد. پژوهش پیرامون تراکم اولین بار در

1- Decision Making Unit
2 -Fare, Grosskopf ,Lovell(1985)
3- Cooper, Thompson, Thrall(1998)

4- Brocket
5- Stigler
6- Libenestein
7- Fare, Grosskopf
8- Far, Svensson
9- Cherchyel

سال ۱۹۸۰ توسط فیر و سونسون آغاز شد. در حالیکه قبل از آن موضوع تراکم در علم اقتصاد مبهم و ناشناخته بود. پس از آن در سال ۱۹۸۱ توسط فیر و گراسکوف تراکم شکل تکمیل شده‌ای یافت. سرانجام در سال ۱۹۷۵ فیر و همکاران در سال ۱۹۸۳ مدلی در تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی تراکم ارائه دادند که تنها روش کاربردی در ارزیابی مسائل بود. این امر سبب پژوهش بیشتر در این زمینه شد تا زمانیکه روش دیگری در تراکم توسط کوپر و همکاران در سال ۱۹۹۶ ارائه شد. تحقیقات کوپر و همکاران توسط براکت و همکاران در سال ۱۹۹۸ گسترش یافت و در نهایت روش BCSW[1] (براکت، کوپر، شین، وانگ) نام گرفت.[۱۰].پس از ارائه این شیوه، کوپر آنرا بر روی داده‌های واقعی اجرا کرد تا تقابل بین استخدام و خروجی را در محصولات چینی‌ها بررسی کند تا ببیند که استخدام باید افزایش پیدا کند یا خروجی. سپس این روش توسط بروکت، کوپر، شین و وانگ در مقاله ای در سال ۱۹۸۸ ارائه شد که تراکم را با حل دو مدل در تحلیل پوششی داده‌ها طی دو مرحله ارزیابی می‌نماید و همچنین منبع و مقدار تراکم را نیز بدست می‌آورد. در این روش تفاوت بین تراکم و ناکارایی تکنیکی به وضوح مشخص خواهد شد[۱۱].شیوه BCSW مقدار تراکم را در هر ورودی تعین می‌کند اما یک اندازه کلی برای تراکم ارائه نمی‌دهد. در نتیجه کوپر، سیفورد و زو[2]با اصلاح این مدل و استفاده از مدل‌های جمعی، مدل جدیدی هم برای اندازه‌گیری تراکم و هم برای تحلیل ناکارایی ارائه دادند که این مدل شیوه جمعی یکپارچه نام دارد. [۱۲].پژوهش‌های بیشتر در زمینه تراکم در سال ۲۰۰۲ توسط کوپر و همکاران مطرح شد که این روش برخلاف روش‌های قبل که برای ارزیابی تراکم منجر به حل دو مدل از مدلهای تحلیل پوششی داده‌ها می‌گردید، تنها با حل یک مدل تراکم را حساب می‌کند. تون و ساهو[3] در سال ۲۰۰۴ برای معرفی تراکم و محاسبه آن روشی در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند که این روش به محاسبه تراکم در زمان وقوع جواب‌های چندگانه می‌پردازد[۱۳]. وی و یان[4] در روش اول، تراکم و بازده به مقیاس را بوسیله پنج مدل BCC، CCR، NEW، ST[5]، FG[6] با ماهیت خروجی مطالعه کرده و به بررسی شرط لازم و کافی برای وقوع تراکم، بازده به مقیاس صعودی، نزولی پرداخته‌اند. [۱۴]. روش دوم وی و یان این است که از آنجا که آنها در روش اول درباره ارتباط تراکم و بازده به مقیاس بحث کردند و تراکمی که در آنجا بیان شد به ازای کاهش ورودی‌ها مستلزم افزایش در تمام خروجی‌ها بود، آنرا تراکم قوی نامیدند و بیان کردند در عمل تغیرات تولید تنها شامل برخی ورودی‌ها با خروجی‌هاست، نه لزوما همه آنها. در نتیجه کار قبلی را توسعه داده و تعریف جدیدی با عنوان تراکم ضعیف ارائه دادند که در آن کاهش برخی ورودی‌ها مستلزم افزایش برخی خروجی‌هاست، نه همه‌ی آنها. روش تون و ساهودر سال ۲۰۰۴ موضوع تراکم و مقیاس کشسانی را برای واحدهای تصمیم گیرنده روی مرز کارای قوی بررسی کردند و برای واحدهای تصمیم گیرنده هایی که کارای قوی نیستند، تصویر آنها که روی مرز کارای قوی قرار دارد را در نظر گرفتند. رشیدی در رساله دکتری یک متد جدید برای محاسبه تراکم هرDMU (واحد های تصمیم گیرنده) ارائه می‌کند که به طور قابل ملاحظه‌ای محاسبات را کاهش می‌دهد[۱۵] و آن را با متد پیشنهادی کوپر و دینگ و هوانگ و لی[7](۲۰۰۲) مقایسه می‌کند و نهایتاً فرمولی که برای آن ارائه می‌شود یک رابطه جدید در حالت قطعی می‌باشد. روش جهانشاهلو و خدابخشی[۱۶]. بیان می‌کند که، در مدل‌های موجود در تحلیل پوششی داده ها، تغییر در نسبت ورودی ها اغلب بر اساس کاهش ورودی‌هاست. توجیه منطقی این مسئله از دیدگاه اقتصادی آن است که کاهش ورودی‌ها باعث کاهش هزینه می‌شود. اما در برخی موارد، کاهش ورودی‌ای مثل نیروی کار ممکن است با تنش‌های اجتماعی روبرو شود. در نتیجه در راستای افزایش خروجی‌ها، تعین یک ترکیب از ورودی‌ها که متناسب با شرایط جامعه باشد، ضروری است. بنابراین بایستی برای تعین ترکیبی از ورودی‌های مصرف شده برای بدست آوردن بهترین خروجی، انعطاف بیشتری قائل شویم که نهایتاً روش ارائه شده به نام فوق، ثبت شده است. حیدری در پایان نامه کارشناسی ارشد به بررسی وجود تراکم در سیستم های تصادفی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته است. در این پایان نامه مفاهیم اولیه تحلیل پوششی داده‌ها و تحلیل پوششی داده‌ها تصادفی[8] شرح داده شده است و ارتباط میان مدل‌های تصادفی و مدل‌های قطعی مورد بررسی قرار گرفته و همچنین ارتباط میان تحلیل حساسیت و تحلیل پوششی داده‌ها تصادفی توضیح داده شده که در عمل بسیار مورد استفاده و مفید واقع شده است.

همانطور که می‌دانیم در دنیای واقعی، داده ها بیشتر به صورت مخدوش و نادقیق می‌باشند و بمنظور بکارگیری این داده‌ها روش‌های متفاوتی به کارگرفته می‌شود. به عنوان مثال برای این روشها می‌توان به داده‌های بازه‌ای، داده‌های تصادفی، داده‌های خاکستری و داده‌های فازی اشاره کرد که در این مقاله به منظور نشان دادن داده‌های نادقیق از مزیتهای داده‌های فازی استفاده شده است. پژوهش‌ها و مقالاتی وجود دارد که به بحث تحلیل پوششی داده‌ها با این داده‌ها پرداخته است و در مورد بحث تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها در حالت ورودی و خروجی‌های تصادفی، پژوهش‌هایی نیز انجام شده است[۴]. در پژوهش جاری مفهوم تراکم خوش‌بینانه و بدبینانه در تحلیل پوششی داده‌های فازی بررسی می‌شود که در آن ورودی‌ها و خروجی‌ها اعداد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای خواهند بود. ایده‌ی اصلی این مقاله، روش تک مدله‌ی خدابخشی در سال ۲۰۰۹ می‌باشد که در ادامه‌ی روش جهانشاهلو و خدابخشی در سال ۲۰۰۴ بیان

1- Brocket, Cooper, Shin, Wang
2- Cooper, Seiford, Zhu
3- Sahoo, Tone
4- Wei, Yan
5- Sahoo, Tone
6- Fare, Grosskopf

7- Cooper, Deng, Hwang, Li
8- Stochastic Data Envelopment Analysis

شده بود. از این‌رو در این قسمت به مرور این مدل‌ها می‌پردازیم و پس از آن مدل پیشنهادی این مقاله ارائه می‌شود. در ادامه به بررسی دو مثال با ورودی‌ها و خروجی‌های فازی پرداخته می‌شود و در آخر از روابط بدست آمده و مقایسه آن با روابط تراکم در حالت قطعی، نتایج را طبق مشاهدات از جداول موجود، بیان می‌کنیم.

۲- روش پژوهش

پژوهش حاضر از لحاظ نوع روش با توجه به عدم دستکاری متغیرها در زمره پژوهش‌های نظری قرار می‌گیرد و بر پایه مطالعات کتابخانه‌ای انجام می‌شود. به منظور گردآوری اطلاعات مورد نیاز جهت مبانی نظری پژوهش و در راستای تدوین ادبیات پژوهش، از روش اسناد کتابخانه‌ای و بررسی جدیدترین مقالات علمی و کتب اصلی مربوط به تحلیل پوششی داده‌ها و تئوری‌های فازی استفاده شده است که اطلاعات کتابخانه‌ای و پژوهش‌هایی انجام شده با محوریت تراکم و تحلیل پوششی داده‌ها بوده و جهت تدوین مبانی نظری و مفاهیم اساس و موضوع پژوهش مقالات فارسی و لاتین و پایان نامه‌ها استفاده گردید. با توجه به اینکه مقالات و رویکردهای متفاوتی برای اندازه گیری تراکم تاکنون ارائه شده‌اند و ایده‌ی اصلی این مقاله بر مبنای مدل تراکم خدابخشی در سال ۲۰۰۹ می‌باشد، در این قسمت به مرور این روابط می‌پردازیم.

در مطالعاتی که بر روش جهانشاهلو و خدابخشی در سال ۲۰۰۴ انجام شده است می‌بینیم که این مدل برای محاسبه تراکم ورودی طراحی شده است. در مدل‌های موجود در DEA تغییر در نسبت ورودی‌ها اغلب بر اساس کاهش ورودی‌هاست. توجیه اقتصادی این مساله از دیدگاه اقتصادی آن است که کاهش ورودی‌ها باعث کاهش هزینه می‌شود. اما در برخی موارد، کاهش ورودی‌ای مثل نیروی کار ممکن است با تنش‌های اجتماعی روبرو شود. در نتیجه در راستای افزایش خروجی‌ها، تعین یک ترکیب از ورودی‌ها که متناسب با شرایط جامعه باشد، ضروری است. بنابراین بایستی برای تعیین ترکیبی از ورودی‌های مصرف شده برای بدست آوردن بهترین خروجی، انعطاف بیشتری قائل شویم.

فرض کنید s_{i1}^- و s_{i2}^+ به ترتیب اسلک‌های کاهش و افزایش ورودی i ام باشند. به علاوه δ_i^{+*} و s_i^c به ترتیب مقادیر ناکارایی تکنیکی محض و تراکم در ورودی i ام و s_i^{-*} ناکارایی کلی در ورودی i ام می‌باشد که از ناکارایی تکنیکی و تراکم تشکیل شده است. ورودی i ام DMU تحت ارزیابی را در نظر بگیرید، دو حالت داریم:

الف) ورودی i ام به صورت $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} = x_{io} - s_{i1}^-$ کاهش داده می‌شود.

ب) ورودی i ام به صورت $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} = x_{io} + s_{i2}^-$ افزایش داده می‌شود.

(موارد الف و ب برای $i = 1,2,...m$ می‌باشند)

به عبارت دیگر تنها یکی از نامساوی های زیر بایستی در ورودی i ام برقرار باشد:

(۱)

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le x_{io} \quad ,i = 1,2,...m$$

یا

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \ge x_{io} \quad ,i = 1,2,...m$$

برای اینکه یکی از قیود رابطه ۱، برقرار باشد می‌توانیم از متغیرهای صفر و یک استفاده کنیم، اما بخاطر مشکلات حل مساله برنامه‌ریزی صحیح یا آمیخته از این کار اجتناب می‌کنیم و روش دیگری را در پیش می‌گیریم. متغیر آزاد s_i متناظر با قید i ام ورودی تعریف می‌گردد:

(۲)

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} = x_{io} + s_i \quad ,i = 1,2,...m \quad , s_i \text{ آزاد}$$

سپس s_i به دو متغیر نامنفی مطابق رابطه(۳)، تجزیه می‌گردد:

(۳)

$$s_i = s_{i2}^+ - s_{i1}^- \quad s_{i1}^+, s_{i2}^- \ge 0 \quad ,i = 1,2,...m$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} = x_{io} + s_{i2}^+ - s_{i1}^-$$

(۴)

چون ستون‌های متناظر متغیرهای s_{i1}^- و s_{i2}^- وابسته‌ی خطی‌اند، در استفاده از روش سیمپلکس حداکثر یکی از این دو متغیر در جواب بهینه‌ی مثبت خواهند بود، بنابراین تنها یکی از نامساوی‌های(۱) برقرار خواهد بود. در واقع در بهینگی یکی از سه حالت زیر ممکن است رخ دهد:

الف) اگر $s_{i1}^{-*} > 0$، ورودی i ام به مقدار s_{i1}^{-*} کاهش می‌یابد.

ب)اگر $s_{i2}^{+*} > 0$، ورودی i ام به مقدار s_{i2}^{+*} فزایش می‌یابد.

ج)اگر $s_{i2}^{+*} = s_{i1}^{-*} = 0$، ورودی i ام تغییری نمی‌کند.

در مدل ارائه شده در زیر توسط جهانشاهلو و خدابخشی در سال ۲۰۰۴، تابع هدف به گونه ای است که مقادیر s_{i1}^{-*} و s_{i2}^{+*} به ترتیب ماکزیمم و مینیمم شوند، یعنی حداکثر مقدار ممکن از ورودی i ام کم شود یا حداقل مقدار مفید به آن افزوده شود، زیرا مصرف ورودی اضافی هزینه در بر دارد. برای بدست آوردن بیشترین خروجی، مسئله به صورت رابطه (۵)، ارائه می‌گردد:

(۵)

$$\text{Max } \varphi + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_{i1}^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ - \sum_{i=1}^{m} s_{i2}^+\right)$$

s.t:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_{i1}^{-}-s_{i2}^{+}=x_{io}\ ,i=1,2,...m$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^{+}=\varphi y_{ro}\ ,r=1,2,...s$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\ ,\ j=1,2,...n$$

$$\lambda_j\geq o\ ,\ s_{i1}^{-}\geq 0\ ,\ s_{i2}^{+}\geq 0\ ,\ s_r^{*}\geq 0$$

$$i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n,r=1,2,...,s$$

مدل جمعی متناظر با مدل (۵)، به صورت مدل (۶)، می‌باشد:

(۶)

$$\text{Max}\ \sum_{i=1}^{m}s_{i1}^{-}+\sum_{r=1}^{s}s_r^{+}-\sum_{i=1}^{m}s_{i2}^{+}$$

s.t:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_{i1}^{-}-s_{i2}^{+}=x_{io}\quad ,i=1,2,...m$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^{+}=y_{ro}\quad ,r=1,2,...s$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\quad ,\ j=1,2,...n$$

$$\lambda_j\geq 0\ ,\ s_{i1}^{-}>0\ ,\ s_{i2}^{+}>0\ ,\ s_r^{*}\geq 0$$

$$i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n,\ r=1,2,...,s$$

۲-۱ تعریف: DMUo تحت مدل (۵)کاراست اگر و تنها اگر دو شرط زیر بر قرار باشد:

الف) $\varphi^{*}=1$

ب) مقدار بهینه همه اسلک ها صفر باشند.

اگر دو مدل قبلی برای تعین مقدار تراکم ورودی توسط یک مدل جایگزین شود روشی دیگر برای تعین مقدار تراکم ورودی توسط مدل BCC خروجی محور به وجود می‌آید[۱۷].

مدل (۵) را در نظر بگیرید و فرض کنید $(\varphi^{*},\lambda^{*},s_1^{-*},s_2^{+*},s_r^{+*})$ یک جواب بهینه برای آن باشد در نتیجه قید اول مدل (۶) به صورت رابطه (۷)، خواهد بود.

(۷)

با نوشتن $$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}-s_i^{+}=x_{io}-s_{i1}^{-*}+s_{i2}^{+*}\quad ,i=1,2,...m$$

این قید رابطه‌ی (۷) به صورت رابطه‌ی (۸) خواهد شد:

(۸)

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+(s_{i1}^{-*}-s_i^{+})=x_{io}+s_{i2}^{+*}\ \ ,i=1,2,...,m$$

این ادامه قید به صورت $s_i^{c}=(s_{i1}^{-*}-s_i^{+})$ با استفاده از تغییر متغیر به رابطه‌ی (۹) خواهد شد:

(۹)

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^{c}=x_{io}+s_{i2}^{+*}\quad ,i=1,2,...,m$$

بنابراین مدل (۶) به مدل (۱۰)، تبدیل می‌شود:

(۱۰)

$$\text{Max}\ \sum_{i=1}^{m}-s_i^{c}$$

s.t:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^{c}=x_{io}+s_{i2}^{+*}\quad ,i=1,2,...,m$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}=\varphi^{*}y_{ro}+s_r^{+*}\quad ,r=1,2,...s$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\quad ,\ j=1,2,...n$$

$$\lambda_j\geq 0\ ,\ s_i^{c}\geq 0$$

$$i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n,\ r=1,2,...,s$$

که $(\varphi^{*},\lambda^{*},s_1^{-*},s_2^{+*},s_r^{+*})$ جواب بهین مدل (۵) می‌باشد. برای بدست آوردن یک مدل، مدل‌های (۵) و (۱۰) را با هم ترکیب کرده و مدل (۱۱) را ارائه می‌دهیم.

(۱۱)

$$\text{Max}\ \varphi+\varepsilon(\sum_{i=1}^{m}-s_i^{c}+\sum_{r=1}^{s}s_r^{+}-\sum_{i=1}^{m}s_{i2}^{+})$$

s.t:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^{c}-s_{i2}^{+*}=x_{io}\quad ,i=1,2,...,m$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^{+*}=\varphi y_{ro}\quad ,r=1,2,...s$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\ ,\ j=1,2,...n$$

$$\lambda_j\geq 0\ ,\ s_i^{c},s_{i2}^{+}\geq 0\ ,\ s_r^{+}\geq 0$$

$$i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n,\ r=1,2,...,s$$

۲-۲ تراکم وجود دارد اگر و فقط اگر در جواب بهینه $(s_2^{*},s^{-c*},s^{*+},\lambda^{*},\varphi_o^{*})$، از مدل (۱۱) حداقل یکی از شروط زیر برقرار باشد:

۱. اگر $\varphi^* > 1$ و حداقل یک $s_i^{-c*} > 0$ (i=1,2,…m) وجود داشته باشد.

۲. حداقل یک (r=1,2,…s) $s_r^{+*} > 0$ و حداقل یک (i=1,2,…m) $s_i^{-c*} > 0$ وجود داشته باشد.

۳-۲ قضیه: تراکم وجود دارد اگر و فقط اگر برای یک جواب بهینه $(s_2^*, s^{-c*}, s^{+*}, \lambda^*, \varphi_o^*)$ از مدل (۱۱) حداقل یک (i=1,2,…m) $s_i^{-c*} > 0$ وجود داشته باشد.

برهان: به (۱۴) رجوع شود.

۳- محاسبه تراکم خوش‌بینانه و بدبینانه با ورودی‌ها و خروجی‌های فازی

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری با m ورودی و s خروجی تحت اختیار داریم که $y_{rj} = (y_1, y_2, ..., y_s)$ و $x_{ij} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌های واحد تصمیم‌گیری باشند که در حالت فازی ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^{m1}, y_{rj}^{m2}, y_{rj}^{l}, y_{rj}^{R})$ و $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^{m1}, x_{ij}^{m2}, x_{ij}^{l}, x_{ij}^{R})$ در نظر گرفته شده‌اند. با داشتن این ورودی‌ها و خروجی‌های فازی روش مذکور بازنویسی می‌شود:

(۱۲)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \ \sum_{i=1}^{m} -\tilde{s}_i^{-c} \\
&\text{s.t:} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{ij} = \tilde{x}_{io} - \tilde{s}_i^{-c} + s_{i2}^{+} \quad , i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{rj} = \varphi_o^* y_{ro} - s_r^{+*} \ , r = 1, 2, ...s \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ , \ j = 1, 2, ...n \\
&\tilde{s}_i^{-c} \geq \tilde{0}, \ \lambda_j \geq 0 \\
&i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n, \ r = 1, 2, ..., s
\end{aligned}
$$

(۱۳)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \sum_{i=1}^{n} \varphi_o + [\sum_{i=1}^{n} -\tilde{s}_i^{-c} + \sum_{r=1}^{s} \tilde{s}_r^{+} - \sum_{i=1}^{n} s_{i2}^{+}] \\
&\text{s.t:} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{ij} + \tilde{s}_i^{-c} = \tilde{x}_{io} + s_{i2}^{+} \quad , i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{rj} - s_r^{+} = \varphi_o \tilde{y}_{ro} \quad , r = 1, 2, ...s \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \quad , \ j = 1, 2, ...n \\
&\lambda_j \geq 0 \ , \ s_{i2}^{+} \geq 0, \ \tilde{s}_i^{-c} \geq \tilde{0}, \ s_r^{+} \geq 0 \\
&i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n, \ r = 1, 2, ..., s
\end{aligned}
$$

۳-۱ روش حل

مدل (۱۳) در دو فاز حل می‌شود بدین ترتیب که در فاز اول مقدار s_{i2}^{+} و φ_o^* را بدست می‌آید و در فاز دوم مقدار بهینه آن رادر قیدها قرار داده و در تابع هدف $\text{Max} \ [\sum_{i=1}^{m} -\tilde{s}_i^{-c} + \sum_{r=1}^{s} s_r^{+} - \sum_{i=1}^{m} s_{i2}^{+}]$ را قرار داده و متغیر های تراکم و s_r^{+} بدست آورده می‌شوند:

فازاول:

(۱۴)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \sum_{i=1}^{n} \varphi_o \\
&\text{s.t:} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{ij} - s_{i2}^{+} \leq \tilde{x}_{io} \quad , i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{rj} \geq \varphi_o \tilde{y}_{ro} \quad , r = 1, 2, ...s \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \quad , \ j = 1, 2, ...n \\
&\lambda_j \geq 0 \ , \ \tilde{s}_{i2}^{+} \geq \tilde{0} \\
&i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n, \ r = 1, 2, ..., s
\end{aligned}
$$

روش حل به این صورت می‌باشد که در دو مرحله به حل مدل پرداخته می‌شود. در فاز اول رابطه با توجه به حل مشابه در مقاله[۱۷]. بیان می‌شود:

لم استفاده شده در رابطه (۱۵)، لم(رامیک و ریمانک[1]) می‌باشد[۱۸].

1- Ramik and Rimanek

(۱۵)

$$\text{Max}\ \varphi_o$$

s.t:

$$x_{io}^{m1} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{m1} - \overset{m1}{s}{}_{i2}^{+} \ , i=1,2,\ldots,m$$

$$x_{io}^{m2} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{m2} - \overset{m2}{s}{}_{i2}^{+} \ , i=1,2,\ldots,m$$

$$x_{io}^{m1} - x_{io}^{l} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{m1} - \overset{m1}{s}{}_{i2}^{+} - (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{l} - \overset{l}{s}{}_{i2}^{+}) \ , i=1,2,\ldots,m$$

$$x_{io}^{m2} + x_{io}^{R} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{m2} - \overset{m2}{s}{}_{i2}^{+} + (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{R} - \overset{R}{s}{}_{i2}^{+}) \ , i=1,2,\ldots,m$$

$$\varphi_o y_{ro}^{m1} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{m1} \ \ , r=1,2,\ldots s$$

$$\varphi_o y_{ro}^{m2} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{m2} \ , r=1,2,\ldots s$$

$$\varphi_o y_{ro}^{m1} - \varphi_o y_{ro}^{l} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{m1} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{l} \ , r=1,2,\ldots s$$

$$\varphi_o y_{ro}^{m2} + \varphi_o y_{ro}^{R} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{m2} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{R} \ , r=1,2,\ldots s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ \ , j=1,2,\ldots n$$

$$s_{i2}^{m1} \geq 0,\ \ s_{i2}^{m2} \geq 0,\ s_{i2}^{m1} - s_{i2}^{l} \geq 0,\ \ s_{i2}^{m2} + s_{i2}^{R} \geq 0$$

$$i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n,\ r=1,2,\ldots,s$$

از رابطه‌ی بالا φ_o^* بدست می‌آید که در ادامه با جایگذاری مقدار بهینه در قیدها مدل (۱۶) ارائه می‌شود:

فاز دوم:

(۱۶)

$$\text{Max}\ [\sum_{i=1}^{m} -\tilde{s}_i^{-c} + \sum_{r=1}^{s} \tilde{s}_r^{+} - \sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_{i2}^{+}]$$

s.t:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{ij} + \tilde{s}_i^{-c} = \tilde{x}_{io} + \tilde{s}_{i2}^{+} \ \ , i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{rj} - \tilde{s}_r^{+} = \varphi_o^* \tilde{y}_{ro} \ \ , r=1,2,\ldots s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ \ , j=1,2,\ldots n$$

$$\lambda_j \geq 0 \ \ , \ s_r^{+} \geq 0 \ , \ \tilde{s}_i^{-c} \geq \tilde{0}$$

$$i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n,\ r=1,2,\ldots,s$$

که مقادیر قطعی متغیرهای کمبود را می‌توان به فرم $\tilde{s}_i^{-} = (s_i^{-}, s_i^{-}, s_i^{-}, s_i^{-})$ و $\tilde{s}_r^{+} = (s_r^{+}, s_r^{+}, s_r^{+}, s_r^{+})$ نوشت:

(۱۷)

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{m} (-s_i^{-c}, -s_i^{-c}, -s_i^{-c}, -s_i^{-c}) + \sum_{r=1}^{s} (s_r^{+}, s_r^{+}, s_r^{+}, s_r^{+}) - \sum_{i=1}^{m} (s_{i2}^{+}, s_{i2}^{+}, s_{i2}^{+}, s_{i2}^{+})$$

s.t:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_{ij}^{m1}, x_{ij}^{m2}, x_{ij}^{l}, x_{ij}^{R}) + (s_i^{-c}, s_i^{-c}, -s_i^{-c}, -s_i^{-c}) =$$
$$(x_{io}^{m1}, x_{io}^{m2}, x_{io}^{l}, x_{io}^{R}) + (s_{i2}^{+}, s_{i2}^{+}, s_{i2}^{+}, s_{i2}^{+}), i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y_{ij}^{m1}, y_{ij}^{m2}, y_{ij}^{l}, y_{ij}^{R}) - (s_r^{+}, s_r^{+}, s_r^{+}, s_r^{+}) =$$
$$\varphi_o^{*} (y_{io}^{m1}, y_{io}^{m2}, y_{io}^{l}, y_{io}^{R}) \ \ , r=1,2,\ldots s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ , \ j=1,2,\ldots n$$

$$\lambda_j \geq 0 \ \ , \ s_r^{+} \geq 0 \ , \ \tilde{s}_i^{-c} \geq \tilde{0} \ , \ \tilde{s}_{i2}^{+} \geq \tilde{0}$$

$$i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n,\ r=1,2,\ldots,s$$

ادامه‌ی حل با توجه به رویکرد α-برش که در تحلیل پوششی داده‌های فازی پیشنهاد شده است طبق رابطه (۱۸) تکمیل می‌گردد.

(۱۸)

$$\text{Max} \ \sum_{i=1}^{m} (-s_i^{-c}, -s_i^{-c}, -s_i^{-c}, -s_i^{-c}) + \sum_{r=1}^{s} (s_r^{+}, s_r^{+}, s_r^{+}, s_r^{+}) - \sum_{i=1}^{m} (s_{i2}^{+}, s_{i2}^{+}, s_{i2}^{+}, s_{i2}^{+})$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\alpha x_{ij}^{m1} + (1-\alpha) x_{ij}^{l}, \alpha x_{ij}^{m2} + (1-\alpha) x_{ij}^{R}) +$$

s.t: $(\alpha s_i^{-c} + (1-\alpha) s_i^{-c}, \alpha s_i^{-c} + (1-\alpha) s_i^{-c}) =$

$$(\alpha x_{io}^{m1} + (1-\alpha) x_{io}^{l}, \alpha x_{io}^{m2} + (1-\alpha) x_{io}^{R}), i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\alpha y_{rj}^{m1} + (1-\alpha) y_{rj}^{l}, \alpha y_{rj}^{m2} + (1-\alpha) y_{rj}^{R}) -$$
$$(\alpha s_r^{+} + (1-\alpha) s_r^{+}, \alpha s_r^{+} + (1-\alpha) s_r^{+}) =$$
$$\varphi_o^{*} (\alpha y_{ro}^{m1} + (1-\alpha) y_{ro}^{l}, \alpha y_{ro}^{m2} + (1-\alpha) y_{ro}^{R})$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ \ , j=1,2,\ldots n$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ s_r^{+} \geq 0 \ , \ \tilde{s}_i^{-c} \geq \tilde{0} \ , \ \tilde{s}_{i2}^{+} \geq \tilde{0}$$

$$i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n, r=1,2,\ldots,s$$

در سطوح α های مختلف و $\alpha \in [0,1]$ رابطه‌ی (۱۸) به صورت رابطه (۱۹) خواهد شد:

$$\text{Max} \ \sum_{i=1}^{m} -\tilde{s}_i^{-c} + \sum_{r=1}^{s} \tilde{s}_r^{+} - \sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_{i2}^{+} \qquad (۱۹)$$

$$\text{s.t:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_{ij}^L, x_{ij}^U) + (\overset{L}{s_i^{-c}}, \overset{U}{s_i^{-c}}) = (x_{io}^L, x_{io}^U) + (\overset{L}{s_{i2}^{+}}, \overset{U}{s_{i2}^{+}})$$

$$, i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y_{rj}^L, y_{rj}^U) - (\overset{L}{s_r^{+}}, \overset{U}{s_r^{+}}) = \varphi^* (y_{ro}^L, y_{ro}^U)$$

$$, r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ , j = 1,2,\dots n$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ s_r^+ \geq 0 \ , \ \tilde{s}_i^{-c} \geq \tilde{0} \ , \ \tilde{s}_{i2}^{+} \geq \tilde{0}$$

$$i = 1,2,\dots,m, \ j = 1,2,\dots,n, \ r = 1,2,\dots,s$$

۳-۲ مفهوم تراکم خوش‌بینانه و تراکم بدبینانه

۳-۲-۱ تراکم خوش‌بینانه

هنگامی که برای DMU_o (DMU تحت بررسی)، ورودی و خروجی به صورت (x_o^L, y_o^U) باشد یعنی با کمترین ورودی به بهترین خروجی برسد در حالیکه برای سایر DMU ها (x_j^U, y_j^L) و $j \neq o$ باشد تراکم در حالت خوش‌بینانه بررسی شده است.

برای بدست آوردن تراکم خوش‌بینانه در فاز اول رابطه (۲۰) به صورت زیر وجود دارد:

(۲۰)

$$\overset{U^*}{\varphi_o} = \max \varphi_o^U$$

$$\text{s.t:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^u \leq x_{io}^L + s_{i2}^+ \ , i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^L \geq \varphi_o^u y_{ro}^U \ , r = 1,2,\dots s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ , j = 1,2,\dots n$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , s_{i2}^+ \geq 0$$

$$i = 1,2,\dots,m, \ j = 1,2,\dots,n, \ r = 1,2,\dots,s$$

و همچنین در فاز دوم، به صورت رابطه (۲۱)، بررسی می‌گردد:

(۲۱)

$$\text{Max} \left(\sum_{i=1}^{m} -s_i^{-c} + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ - \sum_{i=1}^{m} s_{i2}^+ \right)$$

$$\text{s.t:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^u + s_i^{-c} = x_{io}^L + s_{i2}^+ \ , i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^L - s_r^{+} = \varphi_o^{u*} y_{ro}^U \ , r = 1,2,\dots s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ , j = 1,2,\dots n$$

$$\lambda_j \geq 0, \ s_i^{-c} \geq 0$$

$$i = 1,2,\dots,m, \ j = 1,2,\dots,n, \ r = 1,2,\dots,s$$

که $s_i^{-c^*}$ بدست آمده از رابطه (۲۱)، میزان تراکم خوش‌بینانه می‌باشد و می‌توان آن را با s_i^{-oc} (تراکم خوشبینانه[1]) نشان داد.

۳-۲-۲ تراکم بدبینانه

هنگامی که برای DMU_o (DMU تحت بررسی)، ورودی و خروجی به صورت (x_o^U, y_o^L) باشد یعنی با بیشترین ورودی به کمترین خروجی برسد در حالیکه برای سایر DMU_j ها (x_j^L, y_j^U) و $j \neq o$ باشد تراکم در حالت بدبینانه بررسی شده است.

برای بدست آوردن تراکم بدبینانه در فاز اول رابطه (۲۲) به صورت زیر وجود دارد:

(۲۲)

$$\overset{L^*}{\varphi_o} = \max \varphi^L$$

$$\text{s.t:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^L \leq x_{io}^U + s_{i2}^+ \ , i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^U \geq \varphi_o^L y_{ro}^L \ , r = 1,2,\dots s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ , j = 1,2,\dots n$$

$$\lambda_j \geq 0, s_{i2}^+ \geq 0$$

$$i = 1,2,\dots,m, \ j = 1,2,\dots,n, \ r = 1,2,\dots,s$$

و همچنین در فاز دوم (۲۳)، به صورت زیر بررسی می‌گردد:

1- Optimistic Congestion

(۲۳)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}\,(\sum_{i=1}^{m} -s_i^{-c} + \sum_{r=1}^{s} s_r^{+} - \sum_{i=1}^{m} s_{i2}^{+})\\
&\text{s.t:}\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{L} + s_i^{-c} = x_{io}^{U} + s_{i2}^{+} \quad, i=1,2,\ldots,m\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{U} - s_r^{+} = \varphi_o^{L*} y_{ro}^{L} \quad, r=1,2,\ldots s\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \quad, j=1,2,\ldots n\\
&\lambda_j \ge 0\,,\; s_i^{-c} \ge 0\\
&i=1,2,\ldots,m,\; j=1,2,\ldots,n,\; r=1,2,\ldots,s
\end{aligned}
$$

که $s_i^{-c^*}$ بدست آمده از رابطه(۲۳)، میزان تراکم بدبینانه می‌باشد و می‌توان آنرا با s_i^{-pc} (تراکم بدبینانه[1]) نشان داد.

٤-مثال های عددی

۴-۱ بررسی مثال ۱

روابط را با توجه به ورودی‌ها و خروجی‌های فازی مثلثی از جدول۱، به عنوان مثال برای DMU ۲، می‌نویسیم:

فاز اول(حالت خوش‌بینانه):

(۲۴)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}\,\varphi^{U}\\
&\text{s.t:}\\
&17\lambda_1 + 3\lambda_2 + 25\lambda_3 \le 1 + S_{12}\\
&15\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \le 1 + S_{22}\\
&7\lambda_1 + 0.75\lambda_2 + 4\lambda_3 \ge 1\varphi^{U}\\
&5\lambda_1 + 0.5\lambda_2 + 4\lambda_3 \ge 0.75\varphi^{U}\\
&\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\\
&\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0\\
&S_{12} \ge 0\,, S_{22} \ge 0\\
&i=1,2 \quad j=1,2,3 \quad r=1,2
\end{aligned}
$$

فاز دوم(حالت خوش‌بینانه):

(۲۵)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}\,(-s_1^{-c} - s_2^{-c} + s_1^{+} + s_2^{+} - 16 - 14)\\
&\text{s.t:}\\
&17\lambda_1 + 3\lambda_2 + 25\lambda_3 - s_1^{-c} = 1 + 16\\
&15\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 - s_2^{-c} = 1 + 14\\
&7\lambda_1 + 0.75\lambda_2 + 4\lambda_3 - s_1^{+} = 6.66\\
&5\lambda_1 + 0.5\lambda_2 + 4\lambda_3 - s_2^{+} = 6.66(0.75)\\
&\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\\
&\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0\\
&s_1^{-c} \ge 0\,, s_2^{-c} \ge 0 \;,\; s_1^{+} \ge 0 \;,\; s_2^{+} \ge 0\\
&i=1,2 \quad j=1,2,3 \quad r=1,2
\end{aligned}
$$

که در این قسمت مقدار تراکم خوش‌بینانه طبق آنچه در جدول۴، مشاهده می‌شود بدست آمده است.

فاز اول (حالت بدبینانه):

(۲۶)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}\,\varphi^{L}\\
&\text{s.t:}\\
&15\lambda_1 + 1\lambda_2 + 22\lambda_3 \le 3 + s_{12}\\
&11\lambda_1 + 1\lambda_2 + 3.75\lambda_3 \le 2 + s_{22}\\
&8\lambda_1 + 1\lambda_2 + 6\lambda_3 \ge 0.75\varphi^{L}\\
&7\lambda_1 + 0.75\lambda_2 + 6\lambda_3 \ge 0.5\varphi^{L}\\
&\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\\
&\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0\\
&s_{12} \ge 0\,, s_{22} \ge 0\\
&i=1,2,\; j=1,2,3,\; r=1,2
\end{aligned}
$$

فاز دوم(حالت بدبینانه):

(۲۷)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}(-s_1^{-c} - s_2^{-c} + s_1^{+} + s_2^{+} - 21)\\
&\text{s.t:}\\
&15\lambda_1 + 1\lambda_2 + 22\lambda_3 - s_1^{-c} = 3 + 12\\
&11\lambda_1 + 1\lambda_2 + 3.75\lambda_3 - s_2^{-c} = 2 + 9\\
&8\lambda_1 + 1\lambda_2 + 6\lambda_3 - s_1^{+} = 10.66(0.75)\\
&7\lambda_1 + 0.75\lambda_2 + 6\lambda_3 - s_2^{+} = 10.66(0.5)\\
&\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\\
&\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0\\
&s_1^{-c} \ge 0\,, s_2^{-c} \ge 0\\
&i=1,2 \quad j=1,2,3 \quad r=1,2
\end{aligned}
$$

و در این قسمت نیز مقدار تراکم طبق آنچه در جدول۴، مشاهده می‌شود بدست آمده است.

1 Pessimistic Congestion

جدول(۱): ورودی‌ها و خروجی‌های فازی مثلثی

	DMU۱	DMU۲	DMU۳
I۱	(15,16,17)	(1,2,3)	(22,23/5,25)
I۲	(11,13,15)	(1,1/5,2)	(3/75,3/85,4)
O۱	(7,7/5,8)	(0/75,0/875,0/1)	(4,5,6)
O۲	(5,6,7)	(0/5,0/625,0/75)	(3/5,3/75,4)

جدول(۲): ورودی‌ها و خروجی‌های فازی مثلثی تحت برش α=۰

	DMU۱	DMU۲	DMU۳
I۱	(17,15)	(1,3)	(25,22)
I۲	(15,11)	(2,1)	(3/75,4)
O۱	(7,8)	(0/75,1)	(4,6)
O۲	(5,7)	(0/5,0/75)	(4,6)
کارائی	(1,1/68)	(1,1/77)	(1,1)

جدول(۳): ورودی‌ها و خروجی‌های فازی مثلثی تحت برش α=۱

	DMU۱	DMU۲	DMU۳
I۱	16	2	23/5
I۲	13	1/5	3/875
O۱	7/5	0/875	5
O۲	6	0/625	3/75

جدول(٤): مقایسه تراکم در حالات قطعی، خوش‌بینانه و بدبینانه

DMU1									
تراکم قطعی									
ϕ^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	s_1^{-c}	s_2^{-c}
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
تراکم خوش‌بینانه									
ϕ^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-oc}	S_2^{-oc}
۰/۷۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
تراکم بدبینانه									
ϕ^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-pc}	S_2^{-pc}
۱/۱٤	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱۳	۲	٤

جدول(٥): مقایسه تراکم در حالات قطعی، خوش‌بینانه و بدبینانه

DMU2									
تراکم قطعی									
ϕ^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	s_1^{-c}	s_2^{-c}
۸/۵۷	۱	۰	۰	١٤	۱۱/۵	۰/۱۲	۰/٦٤	۰	۰
تراکم خوش‌بینانه									
ϕ^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-oc}	S_2^{-oc}
٦/٦٦	۱	۰	۰	١٦	١٤	۰/۳٤	۰/۵	۰	۱
تراکم بدبینانه									
ϕ^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-pc}	S_2^{-pc}
۱۰/۷	۱	۰	۰	۱۲	۹	۰	۱/٦۷	۰	٤

جدول(٦): مقایسه تراکم در حالات قطعی، خوش‌بینانه و بدبینانه

DMU3									
تراکم قطعی									
ϕ^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	s_1^{-c}	s_2^{-c}
۱/۵	۱	۰	۰	۰	۹/۱۳	۰	۰/۳۸	۷/۵	۰
تراکم خوش‌بینانه									
ϕ^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-oc}	S_2^{-oc}
۰/۱۳	۱	۰	۰	۰	۱۱/۲	۲	۰/۲	۵	۰
تراکم بدبینانه									
ϕ^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-pc}	S_2^{-pc}
۱/۷۵	۱	۰	۰	۰	۷	۱	۰	۱۰	۰

۴-۲ *بررسی مثال۲:* در این قسمت نیز، تراکم در حالت قطعی در جدول (۶) وتراکم خوش‌بینانه و بدبینانه در جداول (۷) تا (۱۴) برای ۵ واحد تصمیم‌گیری(DMU)، در سطوح مختلفی از α، بررسی شده است که همچنان ورودی ها و خروجی ها به صورت اعداد فازی مثلثی بیان شده‌اند.

جدول(۷): ورودی‌ها و خروجی‌های فازی مثلثی

	I_{1}	I_{2}	O_{1}	O_{2}
DMU۱	(۳/٤،٤،٥/٥)	(۱/۲،۹/۲،۱/۳)	(۲/۲،٤/۲،٦/۸)	(۳/٤،۸/٤،۱/٤)
DMU۲	(۲/۲،۹/۲،۹/۹)	(۱/۱،٤/۱،٥/٦)	(۲/۲،۲/۲،۲/۲)	(۳/۳،۳/۳،٥/۷)
DMU۳	(٤/٤،٤/٥،۹/٤)	(۲/۲،۲/۳،٦)	(۲/۳،۷/۳،۲/۷)	(٤/٥،۳/٥،۱/۹)
DMU۴	(۳/٤،٤/٤،۱/۸)	(۲/۲،۲/۲،۳/٤)	(۲/۲،۳/۲،٥/۹)	(٥/٥،٥/٥،۷/۹)
DMU۵	(٥/٦،۹/۷،٥/۱)	(۳/٤،٦/٤،۱/٦)	(٤/٥،٤/٥،۱/۸)	(٦/۷،٥/۸،٤/۳)

جدول(۸): تراکم در حالت قطعی

	ϕ^{*}	s_{12}^{*}	s_{22}^{*}	s_{1}^{*}	s_{2}^{*}	S_{1}^{-c}	S_{2}^{-c}
DMU۱	۱/۸	۲/٥	۲	۰/٤۲	۰	۰	۰
DMU۲	۲/۱۱	۳/٦	۲/٦	۰/٤٥	۰	۰	۰
DMU۳	۱/٤	۱/٦	۱/٥	۰/٤٦	۰	۰	۰
DMU۴	۱/۲۹	۲/٤	۱/۸	۱/۸۷	۰	۰	۰
DMU۵	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰

جدول(۹): تراکم در حالت خوش‌بینانه و بدبینانه(برش ۰=α)

	تراکم خوش‌بینانه							تراکم بدبینانه						
	ϕ^{*}	s_{12}^{*}	s_{22}^{*}	s_{1}^{*}	s_{2}^{*}	S_{1}^{-oc}	S_{2}^{-oc}	ϕ^{*}	s_{12}^{*}	s_{22}^{*}	s_{1}^{*}	s_{2}^{*}	S_{1}^{-pc}	S_{2}^{-pc}
DMU۱	۱/٤۷	۳/٦۱	۲/۷۱	۰/۲۸	۰	۰	۰	۲/۱۸	۱/٤۱	۱/۳۱	۱	۱/۱۱	۲/۳۱	۰/۷۱
DMU۲	۱/۷٥	٤/۲	۳/۲۱	۰/٥٥	۰	۰	۰	۲/۱٥	۳	۲	۰/۲۷	۰/۰۱	۳/٤۱	۱/۸۱
DMU۳	۱/۱۰۱	۲/۷۱	۲/٤۱	۰/۳۲	۰/۰۰٤	۰	۰	۱/۹۳	۰/٥۱	۰/٦۱	۰/٥۸	۰/۰۱	۰	۰
DMU۴	۱/۱۱	۳/۷۱	۲/٤۱	۱/۲۱	۰	۰	۰	۱/٥۱	۱/۱۱	۱/۲۱	۲/۳٥	۰/۰٥	۰	۰
DMU۵	۰/۷٥	۱/۲۱	۱	۰	۰/۲۷	۰	۰	۱/۲۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰

جدول(۱۰): تراکم در حالت خوش‌بینانه و بدبینانه(برش ۰/۲=α)

	تراکم خوش‌بینانه							تراکم بدبینانه						
	ϕ^{*}	s_{12}^{*}	s_{22}^{*}	s_{1}^{*}	s_{2}^{*}	S_{1}^{-oc}	S_{2}^{-oc}	ϕ^{*}	s_{12}^{*}	s_{22}^{*}	s_{1}^{*}	s_{2}^{*}	S_{1}^{-pc}	S_{2}^{-pc}
DMU۱	۱/٥۳	۳/۳۸	۲/٥٦	۰/۳۱	۰/۰۳	۰	۰	۲/۱۱	۱/٦۲	۱/٤٤	۰/٥۳	۰	۰/۰۲	۰/۰۱
DMU۲	۱/۸۲	٤/۰۸	۳/۰۸	۰/٥۳	۰/۰۱	۰	۰	۲/٤۳	۳/۱۲	۲/۱۲	۰/۳۱	۰	۰/۰۲	۰/۰۱
DMU۳	۱/٦۳	۲/٤۸	۲/۲۲	۰/۳٥	۰/۰۰٤	۰	۰	۱/۸۲	۰/۷۲	۰/۷۸	۰/٥٦	۰	۰/۰۲	۰/۰۱
DMU۴	۱/۱۳	۳/٤٤	۲/۲۸	۱/۳٥	۰/۰٥۸	۰	۰	۱/٤٦	۱/۳٦	۱/۳۲	۲/۲٤	۰	۰/۰۲	۰/۰۱
DMU۵	۰/۸۰	۰/۹٦	۰/۸۱	۰	۰/۱٦	۰	۰	۱/۲۱	۰	۰	۰	۰	۰/۰۲	۰/۰۱

جدول(۱۱): تراکم در حالت خوش‌بینانه و بدبینانه(برش α=۰/۵)

	تراکم خوش‌بینانه							تراکم بدبینانه						
	ϕ^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-oc}	S_2^{-oc}	ϕ^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-pc}	S_2^{-pc}
DMU۱	۱/۶۳	۳/۰۵	۲/۳۵	۰/۳٤	۰/۰۲	۰	۰	۲/۳۱	۳/۳۱	۲/۳۲	۰/۳۹	۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۰۱
DMU۲	۱/۹۳	۳/۹۱	۲/۹۱	۰/۵۱	۰/۰۲	۰	۰	۱/٦۷	۱/۰۵	۱/۰۵	۰/۵۲	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۲
DMU۳	۱/۲٦	۲/۱۵	۱/۹۵	۰/٤۱	۰/۰۲	۰	۰	۱/٤۱	۱/۷۵	۱/۵	۲/۰۹	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۱
DMU٤	۱/۱۹	۳/۰۵	۲/۱۱	۱/٤۱	۰/۰٤	۰	۰	۱/٤۱	۱/۷۵	۱/۵	۲/۰۹	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۲
DMU۵	۰/۸۷	۰/٦۱	۰/۵۱	۰	۰/۱۲	۰	۰	۱/۱۲	۰	۰	۰	۰	۰/۰۲	۰/۰۱

جدول(۱۲):تراکم در حالت خوش‌بینانه و بدبینانه(برش α=۰/۷)

	تراکم خوش‌بینانه							تراکم بدبینانه						
	ϕ^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-oc}	S_2^{-oc}	ϕ^*	s_{12}^*	s_{22}^*	s_1^*	s_2^*	S_1^{-pc}	S_2^{-pc}
DMU۱	۱/۷	۲/۸۳	۲/۲۱	۰/۳٦	۰/۰۷	۰	۰	۱/۹۱	۲/۱۷	۱/۷۹	۰/٤۵	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
DMU۲	۲	۳/۷۱	۲/۷۸	۰/٤۹	۰/۰۱	۰	۰	۲/۲۲	۳/٤۲	۲/٤۲	۰/٤۲	۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۰۱
DMU۳	۱/۲۷	۱/۹۳	۱/۷۷	۰/۰۱	۰/۳٤	۰	۰	۱/۵	۱/۲۸	۱/۲۳	۰	۰/۳۸	۰/۰۲	۰/۰۲
DMU٤	۱/۸٦	۲/۷۹	۱/۹۸	۰	۱/۹۹	۰	۰	۲/۱۷	۲/۰۱	۱/٦۲	۰/۱۱	۱/۹٤	۰/۰۲	۰/۰۲
DMU۵	۰/۹۲	۰/۳٦	۰/۳	۰	۰/۰۷	۰	۰	۱/۰۷	۰	۰	۰	۰	۰/۰۱	۰/۰۱

۵-نتیجه گیری

در این مقاله به محاسبه تراکم در تحلیل پوششی دادههای فازی پرداخته شد که ایده‌ی اصلی آن بر مبنای روش تـک مدلـه ی خدابخشـی انجـام گرفته است. ورودی‌ها و خروجی‌های DMUها بـه صـورت اعـداد فـازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای بوده اند که بعد از وارد شدن به مدل با روش α-بـرش به یک مسئله برنامه‌ریزی بازه‌ای تبدیل شده و نهایتا با داشـتن کرانهـای بالا و پایین برای ورودی‌ها و خروجی‌ها، به محاسـبه تـراکم در دو حالـت مجزا به صورت خوش‌بینانه و بدبینانه پرداخته شده است. همواره نوآوری این پژوهش در بکارگیری داده‌های فازی برای حالت خاصی از تراکم می-باشد که ما آن را تراکم خوشبینانه و بدبینانه معرفی و تعریف کرده‌ایم. بـا توجه به اعداد به دست آمده از جداول میتوان مشاهده کرد که در تمامی مواردی که تـراکم در حـالات خوشـبینانه صـفر اسـت، تـراکم در حالـت بدبینانه نزدیک به صفر بوده ولی مقداری را دارا می‌باشـد و ایـن موضـوع بیانگر این است که تراکم بدبینانه شرایط سختگیرانه تـری را در موضـوع تراکم بررسی می‌کند بنابراین حساسیت برروی ورودی‌هـا بیشـتر خواهـد بود و این موضوع به مدیریت بهبود تراکم بیشتر کمک میکند.

درحالی که در تراکم خوش‌بینانه و در شرایط سهل‌گیرانـه ازدیـاد بعضـی ورودی‌های غیرضروری قابل چشم‌پوشی خواهد بود.

۵-۱ *پیشنهادات*

پیشنهادات آتی در ادامه‌ی این پژوهش می‌تواند با وارد کردن ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی یا اعداد خاکستری، بـه محاسـبه تـراکم در تحلیـل پوششی داده‌های تصادفی و یا خاکستری پرداخته و تراکم خوش‌بینانـه و بدبینانه را درتحلیل پوششی داده‌های تصادفی و تحلیل پوششی داده‌های خاکستری، بدست آورد و یا نتـایج پـژوهش را جهـت سـایر سـازمانها یـا ارگانها به کار گرفت.

٦-منابع وماخذ

[1] Alinezhad, A., Zohrebandian, M., Esfandiary, N., (1390), **An introduction to performance measurement systems,** Qazvin Islamic Azad University.

[2] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G., (1999**), IDEA and AR-IDEA, Models for dealing with imprecise data in DEA,** Management Science, 45:597-607.

[3] Zhu, J., (2003), **Imprecise data envelopment analysis (IDEA) A review and improvement with an application**, European Journal of Operational Research, 144: 513-529.

[4] Asgharian, M., Khodabakhshi, M., Luka N., (2010), **Congestion in stochastic data envelopment analysis: An input relaxation approach**, International Journal of Statistics and Management System, 5(1–2), 84–10.

[5] Stigler, GJ., (1976),**The X-instance of X-efficiency American Economic Review**, 66:213-6.

[6] Fare, R., & Grosskopf, S., (1983), **Measuring congestion in production**, zeitschrift f. ur national. Ekonomie, 43:257-71.

[7] Fare, R., Svensson, L., (1980), **Congestion of factors of production**, Econometrica, 48:1743-53.

[8] Cherchyel, Kuosmanent., (2001),**Al ternative treatments of congestion in DEA: a rejoinder to Cooper, Gu and Li**, European of operational research.

[9] Cooper, W.W., Gu, B., Li, S., (2001a), **Note: Alternative treatments of congestion in DEA a response to the cherchye, kuosmonen and post critidue**, European journal of operational research, 132: 81-87

[10] Brockett, P.L., Cooper, W.W., Shin, H.C., Wang, Y., (1988), **Inefficiency and congestion in Chinese production before and after the 1978 economic reforms**, Socio-Economic Planning Sciences, 32:1-20.

[11] Heidari, H., (1384), A study of congestion in stochastic systems, using data envelopment analysis, M.Sc Thesis, University of Tarbiat Moalem

[12] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Zhu, J., (2000),A unified additive model approach for evaluating efficiency and congestion with associated measures in DEA, Socio-Economic Planning Sciences, 34: 1-25.

[13] Tone, K., Sahoo, B.K., (2004),**Degree of scale economics and Congestion: A unified DEA approach**, European Journal of Operational Research, 158,755-772.

[14] Wei, Q., Yan, H., (2004),**Weak congestion and returns to scale in data envelopment analysis**, European Journal of Operational Research, 153:641-660.

[15] Fanati Rashidi, S., (1389),**Offering a method to calculation congestion in data envelopment analysis**, Ph.D thesis, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran.

[16] Jahanshahloo, G.R., Khodabakhshi, M., (2004), **Suitable combination of input for improving output in DEA with determining input congestion considering textile industry of china**, Applied Mathematics and Computation, 151:263-273.

[17] Khodabakhshi, M., (2009), **A one model approach based on relaxed combination of inputs for evaluating input congestion in DEA**". Journal of computational Applied Mathematics, 230 :443-450.

[18] Ramik, J., Rimanek, J., (1985), **Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization**, Fuzzy sets and systems, 16:123-138.

[19] Khodabakhshi, M., Hejrizade, M., (2010), **An input relaxation measure of efficiency in fuzzy data envelopment analysis (FDEA)**, Journal of intelligent & Fuzzy system, 21:395-403.