ارائه مدل ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و تصمیم‌گیری چندهدفه به منظور بدست آوردن امتیاز کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در محیط خاکستری

علیرضا علی‌نژاد[۱]، حسین کاکاوند[۲]، ابوالفضل کاظمی[۳،*]، علی شکورلو[۴]

[۱] دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، گروه مهندسی صنایع، قزوین، ایران
[۲] کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، گروه مهندسی صنایع، قزوین، ایران
[۳] استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی، گروه مهندسی صنایع، قزوین، ایران (عهده‌دار مکاتبات)
[۴] کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین،گروه مهندسی صنایع، قزوین، ایران
تاریخ دریافت: مهر ۱۳۹۶، اصلاحیه: آذر ۱۳۹۶ ، پذیرش: دی ۱۳۹۶

چکیده

مدل تحلیل پوششی داده‌ها یکی از روش‌های سنجش کارایی بوده که جهت ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس به کار می‌رود، اما در استفاده از این تکنیک به ازای n واحد تصمیم‌گیرنده جهت به‌دست آوردن کارایی، نیازمند n بار فرمول‌نویسی هستیم که در نتیجه مقایسه بین واحدهای تصمیم‌گیرنده در قالب یک وزن مشترک امکان‌پذیر نمی‌باشد و مدل دارای قدرت تشخیص پایینی می‌باشد. از طرف دیگر مدل‌های کلاسیک DEA با پارامترهای قطعی سروکار دارند. از این‌رو در این مقاله بر آن شدیم تا با استفاده از تصمیم‌گیری چندهدفه و تئوری سیستم‌های خاکستری به ارائه وزن‌های مشترک برای واحدهای تصمیم‌گیرنده پرداخته و کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را زمانی که پارامترهای مدل قطعی نبوده و فقط محدوده آنها مشخص باشد، به‌دست آوریم. در انتها به منظور ارزیابی نتایج، مثالی ارائه شده است تا به مقایسه امتیاز کارایی DMU ها از طریق مدل‌های کلاسیک DEA و مدل ارائه شده پرداخته شود.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، تصمیم‌گیری چندهدفه، تئوری سیستم‌های خاکستری.

۱- مقدمه

امروزه رقابت در عرصه‌ی تولید و تجارت جهانی به واسطه کمرنگ شدن مرزهای اقتصادی اهمیت ویژه‌ای یافته است و کوشش در جهت ارتقا و بهبود بهره‌وری همواره مورد تاکید و توجه می‌باشد. از سوی دیگر ارتقای بهره‌وری سبب پیشرفت و توسعه‌یافتگی می‌شود. تاکنون تعاریف مختلفی از بهره‌وری ارائه شده است که همگی آنها در این نکته که بهره‌وری رابطه‌ای بین نهاده‌ها و ستاده‌ها می‌باشد، مشترک‌اند. بهره‌وری ترکیبی از کارایی و اثر بخشی می‌باشد.

یکی از ابزارهای مناسب و کارآمد برای به‌دست آوردن کارایی، تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد که به‌عنوان یک روش غیرپارامتری به منظور محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده می‌شود. تحلیل پوششی داده‌ها یک تکنیک قدرتمند مدیریتی است که ابزاری در اختیار مدیران قرار می‌دهد تا بتوانند به وسیله آن عملکرد شرکت خود را در قبال سایر رقبا محک زنند و براساس نتایج آن برای آینده‌ای بهتر تصمیم‌گیری کنند[۱۳]. این ابزار که برای اولین بار توسط چارنز، کوپر و رودز در سال ۱۹۷۸ ارائه شد، کارایی نسبی واحدهایی را که دارای ورودی‌ها و خروجی‌های مشابه هستند اندازه‌گیری کرده و براساس این کارایی، واحدهای با عملکرد کارا و ناکارا را مشخص می‌کند. مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها، مدل‌های تصمیم‌گیری هستند که بهینه‌سازی را فقط بر اساس یک واحد تصمیم‌گیرنده[۱] به انجام می‌رسانند؛ لذا این مدل‌ها در زمره مدل‌های تک‌هدفه طبقه‌بندی می‌گردند[۵]. پژوهش‌هایی که تاکنون در مورد DEA صورت گرفته است، بیشتر بر روی مدل‌های تک‌هدفه DEA تمرکز داشته‌اند. هدف انتخاب شده این گونه مدل‌ها به دست آوردن مقدار کارایی یکی از DMUها می‌باشد و سایرDMU ها در تابع هدف لحاظ نمی‌گردند که این یکی از نواقص مدل‌های کلاسیک DEA می‌باشد. همچنین در این مدل‌ها امکان اعمال نظر تصمیم‌گیرنده وجود ندارد. برای برطرف کردن این نواقص می‌توان از برنامه‌ریزی چندهدفه استفاده کرد. مدل‌های DEA چندهدفه سعی دارد اهداف متعددی را به‌طور همزمان مورد توجه قرار دهد. از طرفی با استفاده از این

1. Decision Making Unit (DMU)
* abkaazemi@gmail.com

مدل‌ها می‌توان کارایی تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده را به‌طور همزمان محاسبه و نظرات DM را لحاظ کرد و همچنین با قاطعیت درباره کارا بودن یک واحد تصمیم‌گیرنده نظر داد[۳].

مسئله دیگری که وجود دارد این است که در مدل‌های کلاسیک DEA این فرض وجود دارد که مقدار عددی دقیقی برای ورودی‌ها و خروجی‌ها مشخص است، ولی بسیاری از اوقات در شرایط واقعی، تعیین مقدار عددی دقیقی برای برخی ورودی‌ها و یا خروجی‌ها امکان‌پذیر نیست؛ از قبیل مسائل سرمایه‌گذاری در آینده، مسائل مربوط به ریسک و غیره ... و یا اینکه دسترسی به اطلاعات دقیق، بسیار پرهزینه و غیراقتصادی می‌باشد. هنگامی که اطلاعات ناقص باشند و داده‌های جمع‌آوری شده غیرقطعی باشند، عملا استفاده از مدل‌های در شرایط قطعیت بی‌معنی خواهد بود. در این شرایط مطمئناً بکارگیری از روش‌های قطعی باعث کاهش معنی‌داری و قابل استفاده بودن نتایج خواهد شد. بنابراین مدل‌های قطعی لزوماً روش‌های موثر و مفیدی به منظور مواجهه با مسائل پیچیده نیستند و لذا نمی‌توان از مدل‌های DEA کلاسیک در این‌گونه موارد استفاده کرد[۱].

یکی از موارد عدم قطعیت، عدم قطعیت از نوع خاکستری می‌باشد. این شاخه از علم در سال ۱۹۸۲ توسط پروفسور "جو لانگ دنگ" مطرح گردید. این تئوری در مدت کوتاهی، قریب به دو دهـه، به سرعت رشد و گسترش یافت و به‌طور گسترده‌ای در ارزیابی، مدل‌سازی، پیش بینی، تصمیم‌گیری و کنترل به کار گرفته شد[۴].

هر سیستم خاکستری به‌وسیله اعداد خاکستری، معادلات خاکستری و ماتریس‌های خاکستری توصیف می‌شود که در این میان اعداد خاکستری به مثابه اتم‌ها و سلول‌های این سیستم می‌باشند[۹]. عدد خاکستری عددی است که مقدار دقیق آن معلوم نیست اما محدوده‌ای که در آن قرار می‌گیرد مشخص است. در حقیقت عدد خاکستری، عددی غیرقطعی است که مقدار ممکن خود را از یک بازه یا مجموعه‌ای از اعداد اتخاذ می‌کند[۴].

ساختار مقاله به صورت زیر است:

در بخش ۲ مروری بر تحقیقات گذشته بیان شده، سپس در بخش ۳ تئوری سیستم خاکستری تشریح شده است و در بخش ۴ مدل کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها در فضای خاکستری مطرح شده تا مزیت مدل پیشنهادی نسبت به مدل کلاسیک بهتر مشخص شود. در بخش ۵ به توضیح مدل DEA چندهدفه و ارائه مدل پیشنهادی پرداخته شده، همچنین در بخش ۶ مثال عددی ارائه و حل گردیده و بخش‌های ۷ و ۸ نیز به ترتیب به نتایج و پیشنهادات و منابع اختصاص یافته است.

۲- پیشینه تحقیق

کاربرد تحلیل پوششی داده‌ها در بسیاری از مطالعات و تحقیقات مطرح شده است. برای مثال در سال ۲۰۰۰، شافر و بیرد چارچوبی برای اندازه‌گیری کارایی سرمایه‌گذاری سازمان در تکنولوژی اطلاعات با استفاده از DEA ارائه کردند[۱۷]. در سال ۲۰۰۶، ارتای و همکاران از تحلیل پوششی داده‌ها برای طراحی چیدمان کارخانه (FLD) استفاده کرده‌اند. آنها یک روش تصمیم‌گیری بر اساس DEA ارائه کرده‌اند که با استفاده از معیارهای کمی و کیفی به ارزیابی FLD می‌پردازد[۱۰].

با توجه به این نکته که در مدل‌های DEA یک‌هدفه تنها یک جنبه از کارایی (افزایش در خروجی‌ها و یا کاهش در ورودی‌ها) در هر مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد و همچنین در این مدل‌ها امکان اعمال علایق و نظرهای تصمیم‌گیرنده در نتایج مدل‌ها وجود ندارد، مدل‌های چندهدفه سعی دارد تا این نواقص را برطرف کند[۳]. ترکیبDEA و MOLP را می‌توان به‌عنوان ابزاری در کنترل مدیریت و برنامه‌ریزی استفاده کرد. ساختار این دو نوع مدل تقریبا مشترک می‌باشد اما DEA عملکرد گذشته را به‌عنوان بخشی از عملکرد مدیریت کنترل ارزیابی می‌کند و MOLP به دنبال برنامه ریزی برای اجرای برنامه‌های آینده می‌باشد[۷].

در سال ۱۹۹۸، جرو و همکاران[۱۵] و در سال ۱۹۹۹، هالم و همکاران[۱۱] ساختار مدل‌های DEA و مدل‌های چندهدفه را با یکدیگر مقایسه کرده‌اند و دریافتند که DEA خود یک مدل چندهدفه است.

در سال ۲۰۰۹، وانگ و همکاران[۱۸] و یانگ و همکاران[۱۹] ساختار مدل DEA و مدل‌های چندهدفه را مقایسه کردند و به این نتیجه رسیدند که ساختار دو مدل مشابه و یکی مکمل دیگری است، همچنین آنها مدل‌های DEA چندهدفه براساس محدودیت‌های مدل DEA یک هدفه ارائه کرده‌اند که در آن امکان اعمال‌نظرهای DM وجود دارد.

در سال ۲۰۱۰، حسین زاده و همکاران با ارائه مدل تعادلی بین DEA و MOLP نشان دادند که چه‌طور می‌توان مسائل DEA را با استفاده از MOLP حل کرد، همچنین آنها از روش Z-W برای انعکاس ترجیحات DM در تعیین کارایی استفاده کرده اند[۱۲].

تا به حال در مسائل مطرح شده عدم قطعیت وجود نداشت، درصورتی‌که عدم قطعیت در ذات و نهاد طبیعت جای دارد. یکی از تئوری‌هایی که در آن عدم قطعیت وجود دارد تئوری سیستم‌های خاکستری است. در سال ۱۹۸۲ پروفسور "جو لانگ دنگ" اولین مقاله تحقیقاتی خود را در ارتباط با مفاهیم و تئوری خاکستری به چاپ رسانید. در ارتباط بین DEA و تئوری سیستم‌های خاکستری، در سال ۱۹۹۸، یانگ یک مدل DEA با اعداد خاکستری بازه‌ای ارائه کرد[۲۰]. او در ادامه مدل سفید شده DEA خاکستری و برخی ویژگی‌های آن را توضیح داد. در سال ۲۰۰۸، کو برای حل دو مسئله خاص از MADM از دو روش DEA و GRA استفاده کرد که مقایسه نتایج نشان داد که GRA در حل مسائل MADM کارا می‌باشد[۱۶].

باتوجه به تحقیقات صورت گرفته بر روی مدل‌های چندهدفه DEA و نیز مدل‌های DEA دارای عدم قطعیت، و ذکر این نکته که حالت‌های فازی و ریاضیات بازه‌ای، حالت خاصی از تئوری سیستم‌های خاکستری می‌باشند، مدل DEA چندهدفه‌ای که در آن از داده‌های خاکستری استفاده شده است اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در این پژوهش سعی برآن است تا با

ارائه مدلی که این ویژگی را داشته باشد، شکاف بین مدل‌هایی که در آنها از تئوری فازی و ریاضیات بازه‌ای استفاده شده است پوشانده شود.

۳-تئوری سیستم‌های خاکستری

اتخاذ تصمیمات درست نیازمند وجود اطلاعات کافی می‌باشد که در عمل کمتر سیستمی را می‌توان یافت که تمام اطلاعات آن شناخته شده باشند. چرا که تعیین تمام اجزا و روابط بین آنها در بیشتر سیستم‌ها یا غیرممکن بوده و یا بسیار پرهزینه و غیر اقتصادی می‌باشد. سیستم‌های اجتماعی، سیستم‌های زیست محیطی، سیستم‌های اقتصادی، سیستم آناتومی انسان از جمله این موارد می‌باشند. از آن‌جاکه همواره اطلاعاتی که از سیستم‌های در دست بررسی، حاصل می‌شود ناکامل هستند، لذا عدم‌اطمینان نیز به‌عنوان جزء لاینفک این سیستم‌ها همواره خودنمایی می‌کند که این امر به نوبه خود مواجهه و تصمیم‌گیری در مورد این سیستم‌ها را با مشکل بزرگتری روبرو می‌نماید. اگر اطلاعات واضح و شفاف یک سیستم را با رنگ سفید و اطلاعات کاملاً ناشناخته یک سیستم را با رنگ سیاه تجسم کنیم، در این صورت خواهیم دید که اطلاعات مربوط به بیشتر سیستم‌های موجود در طبیعت، اطلاعات سفید (کاملاً شناخته شده) و یا سیاه (کاملاً ناشناخته) نیستند، بلکه مخلوطی از آن دو یعنی به رنگ خاکستری می‌باشند. بنابراین خاکستری بودن یک سیستم، امری مطلق و سیاه و سفید بودن آن، امری نسبی است. این‌گونه سیستم‌ها را سیستم خاکستری می‌نامند[۸].

هر سیستم خاکستری به وسیله اعداد خاکستری، معادلات خاکستری و ماتریس‌های خاکستری توصیف می‌شود. عدد خاکستری می‌تواند به‌عنوان عددی با اطلاعات نامطمئن تعریف شود. عدد خاکستری به عددی اطلاق می‌شود که مقدار دقیق آن نامشخص است اما بازه‌ای که مقدار آن را در برمی‌گیرد شناخته شده است. به‌طورکلی در عمل، عدد خاکستری با یک بازه و یا یک مجموعه از اعداد بیان می‌شود[۲].

٤-مدل تحلیل پوششی داده‌ها با اعداد خاکستری بازه ای

در ابتدا به بررسی مدل CCR کلاسیک و مدل CCR با اعداد خاکستری بازه‌ای می‌پردازیم. اگر ورودی و خروجیDMU ها به‌صورت قطعی باشند، رابطه (۱) معرف مدل CCR کلاسیک می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
&\max z_p = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}} \\
&st. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1 \quad ; j = 1,2,\dots,n \\
&\qquad u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; r = 1,2,\dots,s \\
&\qquad v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; i = 1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{۱}
$$

حال اگر داده‌های مدل از نوع اعداد خاکستری باشند، رابطه (۲) حاصل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&\max z_p = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{ip}} \\
&st. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{ij}} \le 1 \quad ; j = 1,2,\dots,n \\
&\qquad u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; r = 1,2,\dots,s \\
&\qquad v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; i = 1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{۲}
$$

درصورتی‌که داده‌های مسئله قطعی نبوده و فقط محدوده آنها مشخص باشد و بخواهیم کارایی DMUها را بر اساس رابطه (۲) محاسبه کنیم این امکان وجود دارد که بسیاری از DMUها کارا معرفی شده و نتوانیم رتبه‌بندی مناسبی برای آنها انجام دهیم و لذا برای رفع این مشکل و به‌دست آوردن یک رتبه‌بندی منطقی و همچنین برای اعمال‌نظر DM در مسئله به مدل DEA چندهدفه در محیط خاکستری می‌پردازیم.

۵-مدل DEA چندهدفه

ما در ابتدا مدل چندهدفه DEA را به صورت مدل (۳) در نظر می‌گیریم. در این مدل کارایی هر واحد به‌عنوان تابع هدف در نظر گرفته می‌شود. به‌عبارت دیگر در این مدل به اندازه تعداد DMUها تابع هدف خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
&\max z_1 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r1}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i1}} \\
&\max z_2 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r2}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i2}} \\
&\vdots \\
&\max z_n = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rn}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{in}} \\
&st. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1 \quad ; j = 1,2,\dots,n \\
&\qquad u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; r = 1,2,\dots,s \\
&\qquad v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; i = 1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{۳}$$

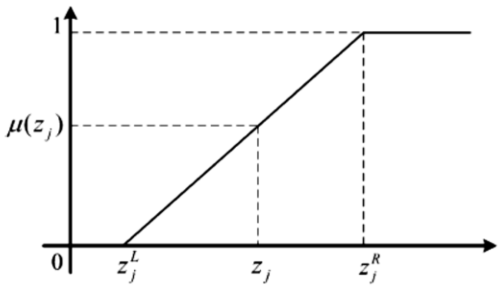
حال اگر ورودی و خروجی‌های مدل قطعی نباشند و از نوع اعداد خاکستری باشند، مدل (۳) به مدل DEA چند هدفه در محیط خاکستری به صورت مدل (۴) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\max z_1 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{r1}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{i1}} \\
&\max z_2 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{r2}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{i2}} \\
&\vdots \\
&\max z_n = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{rn}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{in}} \\
&st. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{ij}} \le 1 \quad ; j = 1,2,\dots,n \\
&\qquad u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; r = 1,2,\dots,s \\
&\qquad v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; i = 1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{۴}$$

همان‌طور که در مدل ارائه شده مشخص است، این مدل چندهدفه و دارای n تابع هدف می‌باشد. از مزیت‌های مدل (۴) این است که با حل تنها یک مدل، امتیاز کارایی تمام DMU ها قابل محاسبه خواهد بود. همچنین در این مدل امکان اعمال علایق و نظرات تصمیم‌گیرنده (DM) وجود دارد. علاوه بر این با توجه به قطعی نبودن مدل می‌توان از آن در مواردی که میزان داده‌ها به صورت قطعی مطرح نشده‌اند و فقط دارای محدوده مشخصی هستند، استفاده کرد و نیز با توجه به چندهدفه بودن مدل DMUهای کمتری به‌عنوان واحد کارا معرفی می‌شوند و البته مقدار کارایی آنها به‌طور دقیق‌تری مشخص می‌شود و لذا می‌توان رتبه‌بندی منطقی‌تر و مناسب‌تری برای DMUها انجام داد.

مدل پیشنهادی را با استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی که توسط زیمرمن مطرح شده است، به مدلی با یک تابع هدف تبدیل می‌کنیم[۲۱].

برای یک تابع هدف از نوع max می‌توان تابع درجه عضویت خطی به‌صورت شکل ۱ در نظر گرفت که در آن z_j^L و z_j^R مقادیری از تابع هدف z_j هستند که به ترتیب دارای درجه عضویت صفر و یک می‌باشند[۱۴].



شکل(۱): تابع عضویت خطی max

با فرض $\mu_j\left(z_j\right) = \alpha$ ، تابع هدف z_j را می‌توان از ترکیب محدب z_j^L و z_j^R ، یا به‌عبارتی به صورت $z_j = \alpha z_j^R + \left(1-\alpha\right) z_j^L$ که در آن $0 \le \alpha \le 1$ است، بدست آورد.

با استفاده از روش زیمرمن رابطه (۴) را می‌توان بصورت رابطه (۵) نوشت.

$$
\begin{aligned}
&\max\left\{\min_{j}\ \mu_j\left(z_j\right)\right\} \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&st.\quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{ij}} \le 1 \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ r=1,2,\dots,s\\
&\qquad v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ i=1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{۵}
$$

با فرض

$$
\min \mu_j\left(z_j\right) = \alpha z_j^R + (1-\alpha) z_j^L \quad ; \ j=1,2,\dots,n
$$

مدل (۵) به‌صورت مدل (۶) تبدیل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&\max\left\{\alpha z_j^R + (1-\alpha) z_j^L\right\} \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&st.\quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{ij}} \le 1 \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{ij}} \ge \alpha z_j^R + (1-\alpha) z_j^L \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ r=1,2,\dots,s\\
&\qquad v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ i=1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{۶}
$$

از آنجایی‌که توابع هدف مدل در حقیقت امتیاز کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشند و مقدار آنها در بازه $[0,1]$ قرار می‌گیرد، بنابراین خواهیم داشت $z_j^R = 1$ و $z_j^L = 0$ و بر این اساس مدل (۷) با توجه به مدل (۶) بدست خواهد آمد.

$$
\begin{aligned}
&\max \alpha\\
&st.\quad \sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{ij} \le 0 \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r \otimes y_{rj} - \left(\alpha * \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes x_{ij}\right)\right) \ge 0 \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ r=1,2,\dots,s\\
&\qquad v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ i=1,2,\dots,m\\
&\qquad 0 \le \alpha \le 1
\end{aligned} \tag{۷}
$$

مدل (۷) تک هدفه شده مدل (۴) می‌باشد که از طریق روش مطرح شده در زیمرمن (۱۹۹۱) به دست آمده است[۲۲]. مدل (۷) یک مدل تک هدفه است، ولی پارامترهای آن از نوع عدم قطعیت خاکستری می‌باشند. با جایگذاری اعداد خاکستری بازه‌ای در مدل (۷)، مدل (۸) به‌دست خواهد آمد.

$$
\begin{aligned}
&\max \alpha\\
&st.\quad \sum_{r=1}^{s} u_r \left[c_{rj}, d_{rj}\right] - \sum_{i=1}^{m} v_i \left[a_{ij}, b_{ij}\right] \le 0 \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r \left[c_{rj}, d_{rj}\right] - \left(\alpha * \left(\sum_{i=1}^{m} v_i \left[a_{ij}, b_{ij}\right]\right)\right) \ge 0 \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ r=1,2,\dots,s\\
&\qquad v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ i=1,2,\dots,m\\
&\qquad 0 \le \alpha \le 1
\end{aligned} \tag{۸}
$$

از تبدیلات (۹) و (۱۰) برای قطعی کردن مدل (۸) استفاده می‌کنیم.

$$
x_{ij} \in \left[a_{ij}, b_{ij}\right] \rightarrow x_{ij} = a_{ij} + \lambda_{ij}\left(b_{ij} - a_{ij}\right) \quad ; 0 \le \lambda_{ij} \le 1 \quad ; i=1,2,\dots,m \ , \ j=1,2,\dots,n \tag{۹}
$$

$$
y_{rj} \in \left[c_{rj}, d_{rj}\right] \rightarrow y_{rj} = c_{rj} + \varphi_{rj}\left(d_{rj} - c_{rj}\right) \quad ; 0 \le \varphi_{rj} \le 1 \quad ; r=1,2,\dots,s \ , \ j=1,2,\dots,n \tag{۱۰}
$$

به این ترتیب مدل (۸) به صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&\max \alpha\\
&st.\quad \sum_{r=1}^{s} u_r c_{rj} + \sum_{r=1}^{s} u_r \varphi_{rj}\left(d_{rj} - c_{rj}\right)\\
&\qquad -\left(\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} v_i \lambda_{ij}\left(b_{ij} - a_{ij}\right)\right) \le 0 \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r c_{rj} + \sum_{r=1}^{s} u_r \varphi_{rj}\left(d_{rj} - c_{rj}\right)\\
&\qquad -\left(\alpha * \left(\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} v_i \lambda_{ij}\left(b_{ij} - a_{ij}\right)\right)\right) \ge 0 \quad ; \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ r=1,2,\dots,s\\
&\qquad v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; \ i=1,2,\dots,m\\
&\qquad 0 \le \lambda_{ij} \le 1 \quad ; \ i=1,2,\dots,m \ , \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad 0 \le \varphi_{rj} \le 1 \quad ; \ r=1,2,\dots,s \ , \ j=1,2,\dots,n\\
&\qquad 0 \le \alpha \le 1
\end{aligned} \tag{۸}
$$

قرار می‌دهیم:

$$
v_i \lambda_{ij} = p_{ij} \rightarrow 0 \le p_{ij} \le v_i \quad ; \ i=1,2,\dots,m \ , \ j=1,2,\dots,n \tag{۱۱}
$$

$$
u_r \varphi_{rj} = t_{rj} \rightarrow 0 \le t_{rj} \le u_r \quad ; \ r=1,2,\dots,s \ , \ j=1,2,\dots,n \tag{۱۲}
$$

با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در مدل (۸)، مدل (۱۳) که مدل قطعی و تک هدفه مدل پیشنهادی می‌باشد، بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned}
&\max \alpha \\
st.\quad &\sum_{r=1}^{s} u_r c_{rj} + \sum_{r=1}^{s} t_{rj}\left(d_{rj} - c_{rj}\right) \\
&-\left(\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\left(b_{ij} - a_{ij}\right)\right) \le 0 \quad ; j = 1,2,\dots,n \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r c_{rj} + \sum_{r=1}^{s} t_{rj}\left(d_{rj} - c_{rj}\right) \\
&-\left(\alpha * \left(\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\left(b_{ij} - a_{ij}\right)\right)\right) \ge 0 \quad ; j = 1,2,\dots,n \qquad (۱۳) \\
&u_r \ge \varepsilon > 0 \quad ; r = 1,2,\dots,s \\
&v_i \ge \varepsilon > 0 \quad ; i = 1,2,\dots,m \\
&0 \le p_{ij} \le v_i \quad ; i = 1,2,\dots,m \ ,\ j = 1,2,\dots,n \\
&0 \le t_{rj} \le u_r \quad ; r = 1,2,\dots,s \ ,\ j = 1,2,\dots,n \\
&0 \le \alpha \le 1
\end{aligned}$$

جدول(۱): پارامترهای ورودی مثال عددی

DMUs	$\otimes x_1$	$\otimes x_2$	$\otimes x_3$
1	[106,112]	[84,92]	[1600,1600]
2	[102,102]	[107,111]	[2500,2500]
3	[82,88]	[92,94]	[2800,2800]
4	[77,82]	[92,94]	[1630,1630]
5	[89,91]	[85,85]	[1127,1127]
6	[84,90]	[104,104]	[3400,3400]
7	[97,103]	[95,96]	[4206,4206]
8	[82,87]	[100,101]	[1340,1340]

٦-مثال عددی

در این بخش به‌منظور ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی که به‌صورت رابطه (۴) مطرح شد و تعیین مزیت‌های این مدل نسبت به مدل اصلی DEA خاکستری که به‌صورت رابطه (۲) ارائه شد، از مثالی متشکل از ۸ واحد تصمیم‌گیرنده با ۳ ورودی و ۴ خروجی که به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای معرفی شده‌اند، بهره گرفته شده است. داده‌های این مثال از مرجع[۱۴] گرفته شده است. جداول (۱) و (۲) داده‌های مرتبط با این مثال را ارائه کرده است. نتایج اجرای مثال از طریق مدل پیشنهادی، رابطه (۴) و همچنین نتایج حل از طریق مدل کلاسیک CCR خاکستری، رابطه (۲) در جدول (۳) آمده است. لازم به ذکر است از نرم افزار Lingo11 برای حل مدل‌ها استفاده شده است.

همان‌طور که در جدول (۳) مشاهده می‌شود، واحدهایی که در مدل پیشنهادی کارا معرفی شده‌اند در مدل کلاسیک DEA نیز کارا می‌باشند، که این نشان دهنده عملکرد صحیح مدل پیشنهادی است. از طرفی مدل پیشنهادی تعداد واحد کارای کمتری نسبت به مدل کلاسیک DEA معرفی کرده است که این موضوع نشان دهنده مزیت این مدل می‌باشد و به این معنی است که مدل پیشنهادی رویه‌ی سخت‌گیرانه‌تری را برای معرفی کارا بودن یک واحد تصمیم‌گیرنده در پیش می‌گیرد. همچنین چندهدفه بودن مدل این امکان را به‌وجود آورده تا بتوان نظرات DM را در مدل تاثیر دهیم و اوزان مشترک برای DMUها بدست آوریم. مزیت دیگر این مدل نیز این است که زمان کمتری را برای به‌دست آوردن امتیاز کارایی واحدهای تصمیم گیرنده، صرف کردیم.

جدول (۲): پارامترهای خروجی مثال عددی

DMUs	$\otimes y_1$	$\otimes y_2$	$\otimes y_3$	$\otimes y_4$
1	[85399,87220]	[43,97]	[10206,10775]	[179,289]
2	[56144,58816]	[30,57]	[7380,7936]	[185,430]
3	[87716,90250]	[28,43]	[630,660]	[51,167]
4	[50210,50593]	[6,16]	[10247,10256]	[28,295]
5	[47727,49489]	[15,30]	[7302,7542]	[85,286]
6	[52923,53249]	[15,28]	[4740,5058]	[109,240]
7	[46154,46791]	[13,21]	[1611,1636]	[129,477]
8	[27978,32943]	[29,325]	[14473,14820]	[190,368]

جدول (۳): نتایج اجرای مدل پیشنهادی و مدل اصلی DEA

DMUs	امتیاز کارایی حاصل از اجرای مدل پیشنهادی	امتیاز کارایی حاصل از اجرای مدل کلاسیک CCR خاکستری
1	0.997	1
2	0.994	0.833
3	0. 998	1
4	1	1
5	1	1
6	0.999	1
7	0.990	0.801
8	0.989	1

۷-نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل تحلیل پوششی داده‌های چندهدفه در فضای خاکستری بر پایه مدل کلاسیک CCR ارائه گردید. با توجه به چندهدفه بودن مدل پیشنهادی، برای تک‌هدفه کردن این مدل از روش مطرح شده توسط زیمرمن استفاده گردید. مدل پیشنهادی به خوبی ضعف مدل‌های کلاسیک DEA را که فقط در فضای قطعی مطرح شده‌اند، پوشش می‌دهند. به این معنی که اگر پارامترهای مدل قطعی نبوده و فقط محدوده آنها مشخص باشند، یعنی در فضای عدم قطعیت خاکستری باشند، می‌توان از مدل پیشنهادی استفاده کرد.

مدل ارائه شده در این مقاله مدلی است که برای به‌دست آوردن مقدار

دقیق کارایی یک واحد تصمیم‌گیری می‌توان از آن استفاده کرد. چندهدفه بودن مدل و در نتیجه توجه به نظرات DM ، حل یک مدل به‌جای n مدل، کاهش زمان مورد نیاز برای به‌دست آوردن کارایی واحدهای تصـمیم‌گیـری، معرفی تعداد کمتری از DMUها به‌عنوان واحد کارا نسبت به مدل‌های کلاسیک DEA و رتبه‌بندی دقیق‌تر و منطقی‌تر، از دیگر مزیت‌های مدل پیشنهادی می‌باشد. در انتها برای ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی، از مثالی متشکل از ۸ واحد تصمیم‌گیرنده با ۳ ورودی و ۴ خروجی و که به‌صورت اعداد خاکستری بازه‌ای مطرح گردیده‌اند، استفاده شد. همچنین برای حل مدل‌های این مثال از نرم افزار Lingo11 استفاده گردید.

در این مقاله از مدل CCR برای مدل پیشنهادی استفاده گردید که برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود از مدل‌هایی نظیر BCC، BCC-CCR، CCR-BCC ، راسل، SBMو دیگر مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شود. در تحقیقات آتی همچنین می‌توان برای حل مدل چندهدفه و تبدیل آن به یک مدل تک‌هدفه از تابع عضویت خطی و مفهوم تصمیم‌گیری فازی استفاده کرد[۶،۲۱]. عدم قطعیت استفاده شده در این پایان نامه از نوع عدم قطعیت خاکستری بوده، که می‌توان برای تحقیقات آتی از فضاهای عدم قطعیت فازی و تصادفی استفاده کرد.

منابع و مأخذ

[۱] باغبان، عادله. امیری، مقصود. افت، لعیا. شرفی آورزمان، زهرا.(۱۳۹۱)، **ارزیابی و رتبه‌بندی پیمانکاران و ارتقاء پیمانکاران ناکارا با رویکرد تحلیل پوششی داده‌های خاکستری – مورد مطالعه پیمان کاران گروه مپنا**، تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال نهم، ، صفحه ۲۱ تا ۳۸.

[۲] جباری، رامین. صالحی صادقیانی، جمشید. امیری، مقصود.(۱۳۹۱)، **ارزیابی عملکرد و انتخاب پرتفوی از صندوقهای سرمایه‌گذاری سهام، مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن**، سال۹، شماره ۱، ، از صفحه ۱ تا ۱۹.

[۳] جعفریان مقدم، احمدرضا. قصیری، کیوان. (۱۳۸۹)، **مدل پویای تحلیل پوششی داده‌های فازی**، مدیریت صنعتی، دوره ۲، شماره ٤، ، از صفحه ۱۹ تا ۳٦.

[٤] ملک، امیرمهدی. دباغی، آزاده. آریانژاد، میربهادر، قلی. (۱۳۹۰)، **مبانی تئوری سیستم‌های خاکستری**، انتشارات ترمه.

[۵] مهرگان، محمدرضا. (۱۳۸۳)، مدل‌های **کمی در اندازه‌گیری عملکرد سازمان‌ها**، موسسه انتشارات دانشگاه تهران.

[6] Bellman, R. F., Zadeh, L.A., (1970), **Decision making in a Fuzzy environment**, management science, Vol. 17, pp. 141-164.

[7] Cooper, W.W., (2005), **Origins, uses, and relations between goal programming and data envelopment analysis**, Journal of Multi-

[10] Ertay, T., Ruan, D., Tuzkaya, U.R., (2006), **Integrating data envelopment analysis and analytic hierarchy for the facility layout design in manufacturing systems**, Information Sciences, Vol. 176, pp. 237–262.

[11] Halme, M., Joro, T., Korhonen, P., Salo, S., Wallenius, J., (1999), **A Value Efficiency Approach to Incorporating Preference Information in Data Envelopment Analysis**, Management Science, Vol. 45, pp. 103-115.

[12] Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G.R., Soltanifar, M., Ebrahimnejad, A., Mansourzadeh, S.M., (2010), **Relationship between MOLP and DEA based on output-orientated CCR dual model**, Expert Systems with Applications, Vol. 37, pp. 4331–4336.

[13] Jafarian-Moghaddam, A.R., Ghoseiri, K., (2011), **Fuzzy dynamic multi-objective Data Envelopment Analysis model**, Expert Systems with Applications, Vol. 38, , pp. 850–855.

[14] Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rezaie, V., Khanmohammadi, M., (2011), **Ranking DMUs by ideal points with interval data in DEA**, Applied Mathematical Modelling, Vol. 35, pp. 218–229.

[15] Joro, T. Korhonen, P. Wallenius, J., (1998), **Structural Comparison of Data Envelopment Analysis and Multiple Objective Linear Programming**, Management Science, Vol. 44,, pp. 962-970.

[16] Kuo, Y., Yang, T., Huang, G.W., (2008), **The use of grey relational analysis in solving multiple attribute decision-making problems**, Computers & Industrial Engineering, Vol. 55, pp. 80–93.

[17] Shafer, S.M., Byrd, T.A., (2000), **A framework for measuring the efficiency of organizational investments in information technology using data envelopment analysis**, Omega, Vol. 28, pp. 125-141.

[18] Wong, B.Y.H., Luque, M., Yang, J.B., (2009), **Using interactive methods to solve DEA Problem with value judgments**, Computers and Operations Research, Vol. 36, pp. 623-636.

[19] Yang, J.B. Wong, B.Y.H. Xu, D.L. Stewart, T.J., (2009), **Integrated DEA-oriented performance assessment and target setting using interactive MOLP methods**, European Journal of Operational Research, Vol. 195, pp. 205-222.

[20] Yang, Y.S., (1998**), Data Envelopment Analysis (DEA) Model with interval Gray Numbers**, Information and Management Sciences, Vol. 9, pp. 11-23.

[21] Zimmerman, H. J., (1976), **Description and optimization of Fuzzy systems**, International, Journal of General systems, Vol. 2, , pp. 209-215.

[22] Zimmerman, H. J., (1991), **Fuzzy set theory and its applications**, (2nd ed.), Boston: Kluwer Academic Publishers,.