



کنترل یادگیر تکرار شونده مقاوم برای ربات توانبخشی در حضور عدم قطعیت پارامتری

مجتبی آیتی نیا^۱، مهدی فروزانفر^{۱*}، امین رضائی^۲

۱. گروه مهندسی برق، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

۲. گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

* نویسنده مسول: m.forouzanfar@iauhvaz.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۲۵

چکیده

در این مقاله، همگرایی مقاوم کنترل یادگیر تکرار شونده (ILC) در ربات توانبخشی خطی دارای عدم قطعیت پارامتری، بدست آمده است. امروزه ربات‌های توانبخشی وظیفه مهمی را در کمک به فیزیوتراپ‌ها در ترمیم آسیب‌های حرکتی بر عهده دارند. از آن جهت که عدم قطعیت در ربات‌های توانبخشی در عمل با تکرار تغییر می‌کنند، حذف اثر عدم قطعیت پارامتری متغیر با تکرار امری بسیار ضروری است. همچنین عدم قطعیت پارامتری در ماتریس‌های ورودی و خروجی مدل یک ربات توانبخشی، تاثیر مستقیمی بر همگرایی الگوریتم ILC داشته و یک تاثیر کوچک در هر یک از این ماتریس‌ها، ممکن است به واگرایی الگوریتم منجر شود. در این مقاله، ابتدا قانون الگوریتم ILC بدون حضور عدم قطعیت بدست آمده و سپس همگرایی مقاوم این الگوریتم با یک بهره یادگیری ثابت در حضور عدم قطعیت پارامتری، اثبات شده است. در پایان صحت‌سنجی نتایج بدست آمده روی یک مدل ربات توانبخشی مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: کنترل یادگیر تکرار شونده (ILC)، بهره یادگیری ثابت، عدم قطعیت پارامتری، ربات توانبخشی.

مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از ربات‌ها در کاربردهای پزشکی و به خصوص توان بخشی افزایش چشم‌گیری پیدا کرده است. مطالعات اخیر نشان داده که ربات‌ها به خوبی می‌توانند در این عرصه به فیزیوتراپ‌ها کمک کنند [۱]. کنترل ربات‌های توان بخشی، همواره یکی از چالش‌های مهم متخصصان این حوزه بوده است. روش‌های کنترل موقعیت، کنترل نیرو، کنترل هیبرید موقعیت - نیرو و کنترل امیدانس از جمله مهمترین روش‌های کنترل ربات‌های توانبخشی بوده که روش کنترل امیدانس یکی از کارآمدترین آنها می‌باشد [۲]. در روش کنترل امیدانس، کنترل نیرو و کنترل موقعیت هیچکدام به تنهایی انجام نشده و این روش قادر به تنظیم امیدانس ربات در تماس با محیط است [۳]. قانون کنترل امیدانس در واقع به طراحی دینامیکی می‌پردازد که ربات توانبخشی در تماس با بیمار باید از خود نشان دهد. در صورت پیاده‌سازی این روش کنترلی، ربات توانبخشی در تعامل با محیط همانند یک سیستم جرم - فنر - دمپر در مقابل نیروی اعمالی از طرف محیط عمل می‌کند [۴]. در شکل (۱) چند نمونه ربات توانبخشی نشان داده شده است.



شکل (۱): چند نمونه ربات توانبخشی [۵]



یکی از بهترین روش‌های کنترل ربات‌های توانبخشی، الگوریتم‌های تکرارشونده می‌باشند [۶]. الگوریتم ILC یک تکنیک هوشمند موثر برای بهبود عملکرد یک فرآیند تکراری در یک افق زمانی محدود است. این الگوریتم سیگنال ورودی را بر اساس اطلاعات به دست آمده از تکرار قبلی به روزرسانی می‌کند و مانند رفتار انسان، مرتباً یاد می‌گیرد تا دقت عملکرد خود را در هر تکرار بهبود بخشد [۷]. اگرچه این کنترل کننده اغلب بر اساس پارامترهای یک سیستم طراحی می‌شود، اما سیگنال کنترلی که توسط الگوریتم ILC ساخته می‌شود، بر اساس اطلاعات اندازه‌گیری شده است [۸]. یکی از ویژگی‌های مهم این کنترل کننده، بازگشت حالت‌های سیستم کنترل شده به نقطه شروع (تنظیم مجدد شرایط اولیه سیستم) است.

عدم قطعیت در پارامترهای مدل یک ربات توانبخشی امری اجتناب ناپذیر بوده و به دلایل مختلف در طول زمان افزایش می‌یابد. در مرجع [۹]، یک طراحی کنترل کننده یادگیری تکراری مقاوم مبتنی بر LMI برای سیستم‌های خطی گسسته با عدم قطعیت‌های پارامتری ثابت پیشنهاد شده است. استفاده از بهره یادگیری متغیر یکی از تکنیک‌های مقابله با عدم قطعیت‌های متغیر با تکرار است. یک نوع بهره یادگیری متغیر در چهار مقدار مختلف از جمله تابعی از زمان‌ها و تکرارهای زوج و فرد استفاده می‌شود [۱۰]. در مرجع [۱۱] از دو بهره در تکرارهای زوج و فرد برای مقابله با عدم قطعیت‌های پارامتری استفاده شده است به طوری که روش پیشنهادی توانسته است اثر تغییر را در شرایط اولیه کاهش دهد. تکنیک دیگر برای مقابله با عدم قطعیت پارامتریک در یک سیستم، استفاده از رویکردهای مختلف رویترگر حالت است. به عنوان مثال، در مرجع [۱۲] یک کنترل یادگیری تکراری مبتنی بر رویترگر برای سیستم‌های خطی دیفرانسیل و گسسته با مدل همبستگی عدم قطعیت پارامتری پیشنهاد شده است. در مرجع [۱۳] مشکل فیلتر کالمن مقاوم افق محدود و نامتناهی برای سیستم‌های زمان گسسته نامشخص بررسی شده است. این تکنیک شرایط لازم و کافی را برای طراحی فیلترهای درجه دوم مقاوم فراهم می‌کند. در مرجع [۱۴] تکنیک UKF برای تخمین همزمان پارامترهای نامشخص و حالت‌های سیستم به کار گرفته شده است. اگرچه روش‌های مبتنی بر مشاهده‌گر و الگوریتم‌های ILC مبتنی بر بهره یادگیری متغیر در مواجهه با عدم قطعیت‌های پارامتریک کارایی دارند، اما اجرای این تکنیک‌ها هزینه نهایی کنترل کننده را افزایش می‌دهد.

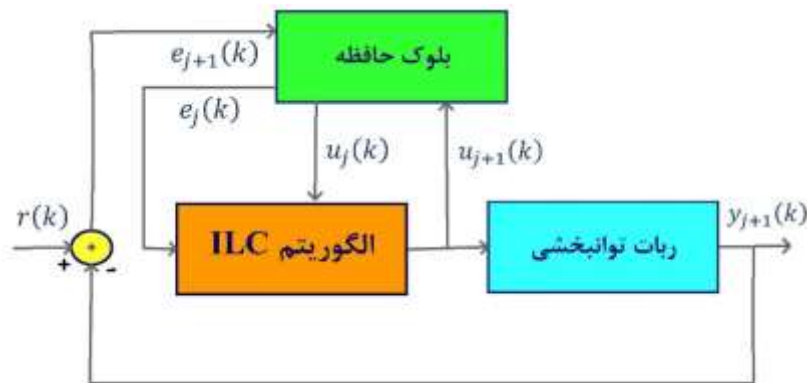
هدف اصلی این مقاله طراحی یک روش جدید کنترل ربات توانبخشی بر اساس الگوریتم مقاوم ILC می‌باشد. در این مقاله یک سیستم زمان گسسته چند متغیره خطی را که توسط مدل فضای حالت توصیف شده است، ارائه می‌گردد. همچنین ساختار کلی یادگیری تکراری ILC را به همراه شرایط مورد نیاز برای همگرایی این الگوریتم ارائه خواهد شد. سپس یک شرایط همگرایی مقاوم جدید از الگوریتم ILC در حضور عدم قطعیت پارامتری در ماتریس‌های ورودی و خروجی سیستم معرفی می‌شود. اثربخشی طرح همگرایی پیشنهادی بر روی یک مدل ربات توانبخشی با عدم قطعیت‌های متغیر با تکرار مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. دو معیار SSE^1 و SAE^2 برای ارزیابی عملکرد طرح همگرایی پیشنهادی استفاده شده است.

همگرایی قانون الگوریتم ILC

اساس کار سیستم‌های الگوریتم ILC به این ترتیب است که از اطلاعات مراحل قبل سیگنال خطا برای کاهش خطای تولید شده و در نتیجه بهبود عملکرد کنترل کننده استفاده می‌شود. در شکل (۲) ساختار کلی کنترل کننده یادگیر تکرار شونده نشان داده شده است.

¹ Sum of Squares Error

² Sum of Absolute Error



شکل (۲): ساختار کلی کنترل کننده یادگیر تکرار شونده (ILC) [۱۵]

اندیس j نشان دهنده تعداد تکرار و اندیس k نماد زمان است. ورودی سیستم در زمان k از تکرار j ، $y_j(k)$ خروجی سیستم در زمان k از تکرار j ، $u_{j+1}(k)$ ورودی سیستم در زمان k از تکرار $j+1$ و $y_d(k)$ خروجی مطلوب بوده که باید کنترل کننده سیستم را وادار به ردیابی آن کند. قانون بروزرسانی الگوریتم ILC به صورت رابطه (۱) می‌باشد.

$$u_{j+1}(k) = u_j(k) + \Delta u_j(k) \quad (1)$$

در قانون (۱) جمله $\Delta u_j(k)$ یک عبارت اصلاحی بوده که تفاوت روش‌های مختلف الگوریتم یادگیر تکرار شونده معمولاً در تعیین نوع این عبارت بوده که در واقع بیانگر نوع قانون یادگیری نیز می‌باشد. یکی از مشهورترین قانون‌های یادگیری مرتبه اول قانون یادگیری آریموتو^۳ می‌باشد. در این قانون، عبارت اصلاحی به صورت رابطه (۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$\Delta u_j(k) = \phi e_j(k+1) \quad (2)$$

پارامتر ϕ بهره یادگیری بوده که تعیین‌کننده نرخ همگرایی و به‌طور کلی کارایی کنترل کننده است. $e_j(i+1)$ در رابطه (۲) عبارت خطا بوده و به صورت رابطه (۳) محاسبه می‌شود.

$$e_j(k+1) = y_d(k+1) - y_j(k+1) \quad (3)$$

پارامتر ϕ باید به گونه‌ای طراحی شود که با افزایش تکرار، خطا به سمت صفر میل کرده و ردیابی حاصل شود.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e_j(k) = 0 \quad (4)$$

رابطه یک الگوریتم ILC شونده خطی گسسته زمان MIMO به صورت (۵) می‌باشد.

$$\begin{aligned} x_j(k+1) &= Ax_j(k) + Bu_j(k) \\ y_j(k) &= Cx_j(k) \end{aligned} \quad (5)$$

$$k = 0, 1, \dots, N \quad j = 0, 1, \dots \quad x_j(0) = x_0$$

در رابطه (۵) ماتریس‌های A, B, C شامل ماتریس‌های سیستم و دارای ابعاد مناسب هستند. $x \in R^n$ بردار حالت، $u \in R^m$ و $y \in R^p$ به ترتیب ورودی و خروجی سیستم بوده که m تعداد ورودی‌ها و p تعداد خروجی‌ها است. عدد طبیعی N نیز طول هر دوره زمانی می‌باشد. همچنین $x_0 \in R^n$ شرایط اولیه سیستم در هر تکرار بوده که نامعلوم فرض می‌شود. برای سیستم رابطه (۵) فرض ۱ در نظر گرفته می‌شود.

³ Arimoto



فرض ۱: شرایط اولیه سیستم در هر تکرار بازنشانی می‌شود:

$$x_j(0) = x_0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

مرسوم‌ترین شرایطی که تاکنون برای همگرایی الگوریتم ILC ارائه شده، در قضیه ۱ بیان شده است [۱۶].

قضیه ۱: برای سیستم (۵) قانون یادگیری (۱) همگرا بوده و خطا با افزایش تکرار به سمت صفر میل می‌کند اگر رابطه (۷) برقرار باشد:

$$\|I - CB\phi\| < 1 \quad (7)$$

که در رابطه (۷) پارامتر I ماتریس همانی و با ابعاد مناسب می‌باشد.

اثبات: جهت رسیدن به رابطه (۷) ابتدا خطا در زمان اول و تکرار j ام محاسبه و با استفاده از رابطه (۵) ساده‌سازی می‌شود:

$$e_j(1) = y_d(1) - y_j(1) = y_d(1) - Cx_j(1) = y_d(1) - C[Ax_j(0) + Bu_j(0)] \quad (8)$$

در ادامه مطابق با روال طی شده در (۸)، خطا در زمان اول و تکرار $j+1$ ام محاسبه می‌شود:

$$e_{j+1}(1) = y_d(1) - y_{j+1}(1) = y_d(1) - Cx_{j+1}(1) = y_d(1) - C[Ax_{j+1}(0) + Bu_{j+1}(0)] \quad (9)$$

با تفاضل دو رابطه (۸) و (۹) رابطه (۱۰) حاصل می‌شود:

$$e_{j+1}(1) = e_j(1) + C[Ax_j(0) + Bu_j(0)] - C[Ax_{j+1}(0) + Bu_{j+1}(0)] \quad (10)$$

حال با در نظر گرفتن فرض ۱ و ساده‌سازی رابطه (۱۰)، رابطه (۱۱) حاصل می‌شود:

$$e_{j+1}(1) = e_j(1) + CBu_j(0) - CBu_{j+1}(0) \quad (11)$$

در نهایت با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۱۱) و ساده‌سازی آن، رابطه (۱۲) حاصل می‌شود:

$$e_{j+1}(1) = e_j(1) + \cancel{CBu_j(0)} - \cancel{CBu_{j+1}(0)} - CB\phi e_j(1) \Rightarrow e_{j+1}(1) = (I - CB\phi)e_j(1) \quad (12)$$

رابطه (۱۲) مقدار خطای زمان اول را در تکرار $j+1$ ام نسبت به تکرار j ام نشان می‌دهد. در واقع اگر رابطه (۱۲) پایدار باشد، خطا با افزایش تکرار کاهش یافته و به عبارت دیگر ردیابی سیستم (۵) در زمان اول تضمین خواهد شد. حال برای بدست آوردن شرایط همگرایی قانون الگوریتم ILC در تمامی زمان‌ها، باید رابطه خطای دوره زمانی $k = [1, 2, \dots, N]$ بدست آید. مطابق با روال طی شده در محاسبه خطای زمان اول، خطای زمان دوم و سوم و N ام در تکرار $j+1$ ام نسبت به تکرار j ام بصورت روابط (۱۳) تا (۱۵) حاصل می‌شود:

$$e_{j+1}(2) = -CAB\phi e_j(1) + (I - CB\phi)e_j(2) \quad (13)$$

$$e_{j+1}(3) = -CA^2B\phi e_j(1) - CAB\phi e_j(2) + (I - CB\phi)e_j(3) \quad (14)$$

$$e_{j+1}(N) = -CA^{N-1}B\phi e_j(1) - CA^{N-2}B\phi e_j(2) - \dots + (I - CB\phi)e_j(N) \quad (15)$$

با ترکیب روابط (۱۲) تا (۱۵) فرم ماتریسی خطای دوره زمانی $k = [1, 2, \dots, N]$ در تکرار $j+1$ ام نسبت به تکرار j ام بصورت رابطه (۱۶) بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} e_{j+1}(1) \\ e_{j+1}(2) \\ e_{j+1}(3) \\ \vdots \\ e_{j+1}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - CB\phi & 0 & 0 & 0 \\ -CAB\phi & I - CB\phi & 0 & 0 \\ -CA^2B\phi & -CAB\phi & I - CB\phi & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -CA^{N-1}B\phi & -CA^{N-2}B\phi & \dots & I - CB\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_j(1) \\ e_j(2) \\ e_j(3) \\ \vdots \\ e_j(N) \end{bmatrix} \quad (16)$$

رابطه (۱۶) را می‌توان به فرم ساده (۱۷) نوشت:



$$E(j+1) = GE(j) \quad (17)$$

با دقت در رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) مشخص می‌شود که جهت همگرایی قانون الگوریتم ILC در تمامی زمان‌ها، باید ماتریس G پایدار بوده و لذا مقادیر ویژه ماتریس G باید درون دایره واحد قرار گیرند. از آنجائیکه ماتریس G پایین مثلثی است، باید درایه‌های قطر اصلی آن پایدار بوده و درون دایره واحد قرار گیرند و در نتیجه محدوده همگرایی قانون الگوریتم ILC بصورت رابطه (۷) بدست آمده و اثبات قضیه ۱ کامل می‌گردد.

همگرایی ILC مقاوم در ربات توانبخشی

طراحی کنترل کننده برای ربات توانبخشی دارای عدم قطعیت به علت عدم اطلاعات دقیق از رفتار سیستم، پیچیده خواهد بود. با در نظر گرفتن رابطه (۷) وجود عدم قطعیت در پارامترهای ماتریس‌های ورودی و خروجی ربات توانبخشی، همگرایی الگوریتم ILC را بطور مستقیم تحت تاثیر قرار خواهد داد. در رابطه (۱۸) معادلات فضای حالت ربات توانبخشی دارای عدم قطعیت پارامتری در ماتریس‌های ورودی و خروجی بیان شده است.

$$\begin{aligned} x_j(k+1) &= Ax_j(k) + B_d u_j(k) \\ y_j(k) &= C_d x_j(k) \\ k &= 0, 1, \dots, N \quad j = 0, 1, \dots \quad x_j(0) = x_0 \end{aligned} \quad (18)$$

در رابطه (۱۸) ماتریس‌های B_d, C_d دارای عدم قطعیت بوده که ارتباط آنها با ماتریس‌های سیستم ربات توانبخشی نامی، بصورت (۱۹) می‌باشد.

$$\begin{aligned} B_d &= B_n + \Delta B, \quad \|\Delta B\| < \delta_B \\ C_d &= C_n + \Delta C, \quad \|\Delta C\| < \delta_C \end{aligned} \quad (19)$$

در رابطه (۱۹) ماتریس‌های Δ_B, Δ_C شامل اختلاف بین ماتریس‌های رابطه (۱۸) با ماتریس‌های ربات توانبخشی نامی و پارامترهای δ_B, δ_C اعدادی مثبت بوده که شامل حداکثر مقدار نرم آنها می‌باشد.

شرایط همگرایی مقاوم الگوریتم ILC برای ربات توانبخشی در قضیه ۲ آمده است.

قضیه ۲: برای ربات توانبخشی رابطه (۱۸) قانون یادگیری (۱) همگرا بوده و خطا با افزایش تکرار به سمت صفر میل می‌کند اگر رابطه (۲۰) برقرار باشد.

$$\|I - \alpha \phi_R\| + \|\beta \phi_R\| < 1 \quad (20)$$

در رابطه (۲۰) پارامتر I ماتریس همانی و با ابعاد مناسب بوده و پارامتر ϕ_R ماتریس بهره یادگیری مقاوم می‌باشد. همچنین ماتریس α و پارامتر عددی β بصورت رابطه (۲۱) می‌باشند.

$$\begin{aligned} \alpha &= C_n B_n \\ \beta &= \|C_n\| \delta_B + \|B_n\| \delta_C + \delta_C \delta_B \end{aligned} \quad (21)$$

اثبات: جهت اثبات رابطه همگرایی مقاوم (۲۰) ابتدا رابطه همگرایی (۷) برای ربات توانبخشی دارای عدم قطعیت پارامتری رابطه (۱۸) بازنویسی شده و ماتریس بهره یادگیری مقاوم ϕ_R قرار داده می‌شود.

$$\|I - C_d B_d \phi_R\| < 1 \quad (22)$$

در ادامه مقادیر ماتریس‌های ربات توانبخشی با توجه به رابطه (۱۹) جایگذاری و سپس ساده‌سازی صورت می‌گیرد.

$$\|I - (C_n + \Delta C)(B_n + \Delta B) \phi_R\| < 1 \Rightarrow \|I - C_n B_n \phi_R - C_n \Delta B \phi_R - \Delta C B_n \phi_R - \Delta C \Delta B \phi_R\| < 1 \quad (23)$$

حال با در نظر گرفتن نامساوی مثلثی جمع رابطه (۲۴) و اعمال آن بر رابطه (۲۳) می‌توان شرط همگرایی را بصورت رابطه

(۲۵) نوشت.



$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (24)$$

$$\|I - C_n B_n \phi_R\| + \|C_n \Delta B \phi_R\| + \|\Delta C B_n \phi_R\| + \|\Delta C \Delta B \phi_R\| < 1 \quad (25)$$

در ادامه در نظر گرفتن نامساوی مثلثی ضرب رابطه (۲۶) و اعمال آن بر رابطه (۲۵) می‌توان شرط همگرایی را بصورت رابطه (۲۷) نوشت.

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (26)$$

$$\|I - C_n B_n \phi_R\| + \|C_n\| \|\Delta B\| \|\phi_R\| + \|\Delta C\| \|B_n\| \|\phi_R\| + \|\Delta C\| \|\Delta B\| \|\phi_R\| < 1 \quad (27)$$

حال با در نظر گرفتن رابطه (۱۹) و جایگذاری حداکثر مقادیر نرم ماتریس‌های Δ_B, Δ_C و فاکتورگیری از عبارت $\|\phi_R\|$ رابطه همگرایی (۲۸) بدست خواهد آمد.

$$\|I - C_n B_n \phi_R\| + \|\phi_R\| (\|C_n\| \delta_B + \|B_n\| \delta_C + \delta_C \delta_B) < 1 \quad (28)$$

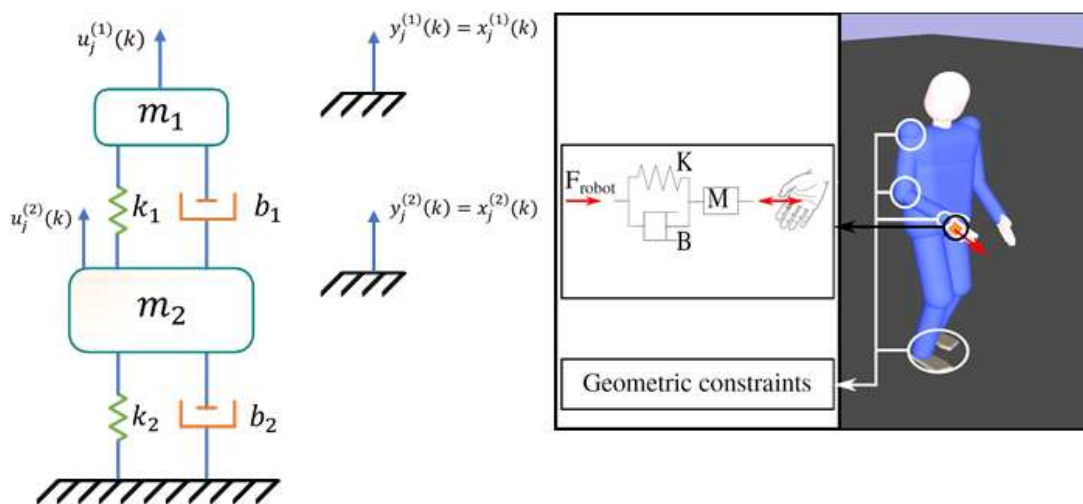
در نهایت با در نظر گرفتن روابط (۲۱) و اینکه β عددی مثبت بوده و طبق رابطه (۲۹) می‌تواند وارد نرم شود، همگرایی مقاوم الگوریتم ILC رابطه (۲۲) اثبات می‌گردد.

$$k \|A\| = \|kA\|, \quad k > 0 \quad (29)$$

اکنون اثبات قضیه ۲ کامل شده است.

شبیه‌سازی

در این بخش، الگوریتم ILC مقاوم پیشنهادی برای سیستم جرم - فنر - دمپر (MSD^۴) به عنوان مدلی از ربات توانبخشی با دو درجه آزادی که دارای عدم قطعیت‌های پارامتری متغیر با زمان و تکرار است، طراحی خواهد شد. هدف اصلی شامل جابه‌جایی جرم‌های این سیستم در جهت مسیر مطلوب خواهد بود. در شکل (۳) سیستم MSD با دو جرم، دو فنر و دو اصطکاک نشان داده شده است.



شکل (۳): سیستم مکانیکی جرم - فنر - دمپر (MSD)

⁴ mass spring damper



در شکل (۳)، $u_j(k) = [u_j^{(1)}(k) \ u_j^{(2)}(k)]^T$ ورودی‌ها و $y_j(k) = [y_j^{(1)}(k) \ y_j^{(2)}(k)]^T$ خروجی‌های سیستم MSD می‌باشند. پارامترهای این سیستم مطابق با جدول (۱) قرار گرفته و ماتریس‌های مدل فضای حالت آن بصورت روابط (۳۰) است [۱۷].

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

جدول (۱): پارامترهای سیستم MSD

پارامتر	مقدار	واحد
b_1	۰٫۲	$\frac{N}{m} s$
b_2	۰٫۳	$\frac{N}{m} s$
k_1	۱	$\frac{N}{m}$
k_2	۴	$\frac{N}{m}$
m_1	۱	kg
m_2	۲	kg

پس از گسسته‌سازی مدل (۳۰) با زمان نمونه‌برداری $T_s = 5s$ ، ماتریس‌های سیستم نامی گسسته زمان سیستم MSD بصورت روابط (۳۱) بدست می‌آیند.

$$A_n = \begin{bmatrix} -0.4066 & 0.0132 & -0.6546 & -0.5136 \\ -0.0549 & -0.1191 & -0.2568 & 0.0884 \\ 0.3978 & 0.6294 & -0.3270 & 0.0107 \\ 0.3010 & -0.4778 & 0.0053 & -0.1926 \end{bmatrix}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 0.7549 & 0.3483 \\ 0.3483 & 0.2935 \\ -0.6546 & -0.2568 \\ -0.2568 & 0.0442 \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ماتریس‌های ناشناخته $\Delta A_j(k), \Delta B_j(k), \Delta C_j(k)$ متغیر در زمان و تکرار در نظر گرفته شده و بصورت روابط (۳۲) می‌باشند.



$$\Delta A_j(k) = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01\sin(0.15j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.01\cos(0.15k) \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta B_j(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.015\sin(0.15j) & -0.01 \\ 0.01 & 0 \\ 0 & 0.015\cos(0.15k) \end{bmatrix}$$

$$\Delta C_j(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.01\sin(0.15j) & 0 \\ 0 & -0.02\cos(0.15k) & 0 & -0.01 \end{bmatrix} \quad (32)$$

مسیر مطلوبی که باید توسط خروجی سیستم MSD ردیابی شود، مربعی در نظر گرفته شده و بصورت رابطه (۳۳) است.

$$r(k) = \begin{bmatrix} \text{square}(0.5k) \\ \text{square}(0.5k) \end{bmatrix}, 0 \leq k \leq N \quad (33)$$

که در آن $N = 50$ طول مسیر طی شده در هر تکرار می‌باشد.

شرایط اولیه سیستم MSD بصورت رابطه (۳۴) قرار داده شده است.

$$X_j^T(0) = [-0.1 \quad 0.26 \quad -0.11 \quad 0.18] \quad (34)$$

سیگنال کنترل در تکرار اول بعنوان نقطه شروع آموزش، بصورت بردار صفر قرار می‌گیرد.

برای طراحی الگوریتم ILC مقاوم، ابتدا با توجه به اینکه سیستم MSD دو ورودی و دو خروجی دارد، ماتریس بهره یادگیری Γ_R دارای دو سطر و دو ستون خواهد بود. همچنین کران بالای ماتریس‌های ناشناخته $\Delta B_j(k)$ ، $\Delta C_j(k)$ بصورت رابطه (۳۵) بدست می‌آید.

$$\|\Delta B_j(k)\| < \delta_B = 0.035, \|\Delta C_j(k)\| < \delta_C = 0.02 \quad (35)$$

با در نظر گرفتن معادلات سیستم MSD و همچنین کران بالای ماتریس‌های ناشناخته، پارامترهای α ، β بصورت رابطه (۳۶) بدست می‌آیند.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1.7549 & 0.3483 \\ 0.3483 & 0.2935 \end{bmatrix}, \beta = 0.09599 \quad (36)$$

بهره یادگیری ϕ_R بصورت رابطه (۳۷) در نظر گرفته شده است.

$$\Gamma_R = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.5 \\ -1.3 & 2.5 \end{bmatrix} \quad (37)$$

اکنون با محاسبه نامساوی (۲۰) تضمین همگرایی الگوریتم ILC در رابطه (۳۸) بدست می‌آید:

$$\|I_p - \alpha\Gamma_R\|_2 + \|\beta\Gamma_R\|_2 = 0.64 < 1 \quad (38)$$

جهت ارزیابی عملکرد رویکردهای ارائه شده در فصل سوم، دو شاخص متفاوت استفاده شده است. اولین شاخص مجموع مربعات خطا یا به اختصار SSE بوده که در رابطه (۳۹) نشان داده شده است.

$$SSE_j = \sum_{k=1}^N (r(k) - y_j(k))^2 \quad (39)$$

که در آن $\sum(\cdot)$ نشان دهنده عملگر سیگما^۵ است. این شاخص برای ارزیابی رویکردها در حوزه تکرار استفاده شده است.

دومین شاخص ارزیابی مورد استفاده، مجموع قدر مطلق خطا یا به اختصار SAE است که رابطه آن بصورت (۴۰) می‌باشد.

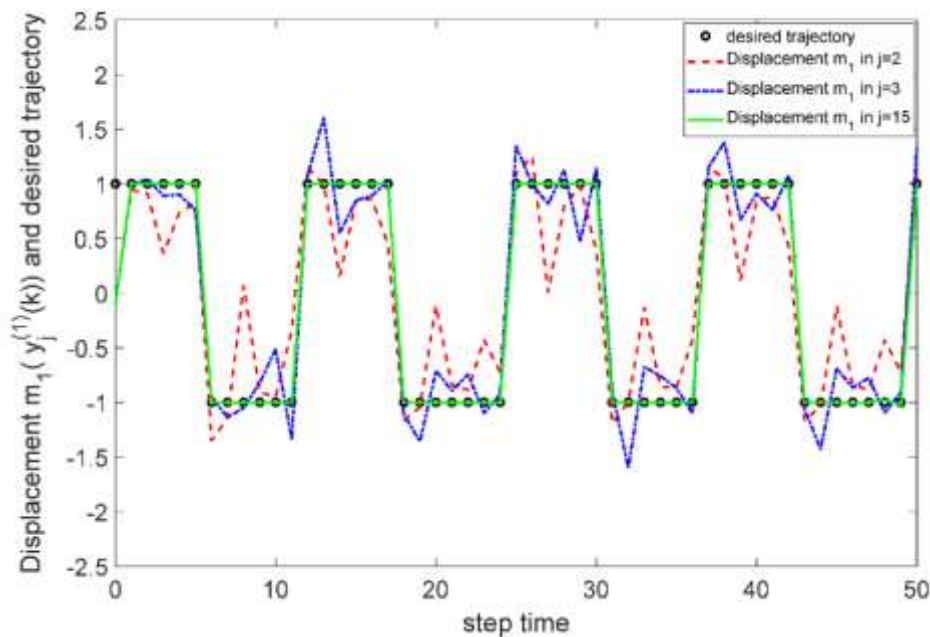
$$SAE_j(k) = \sum_{l=1}^p |e_j^{(l)}(k)| \quad (40)$$

⁵ Sigma

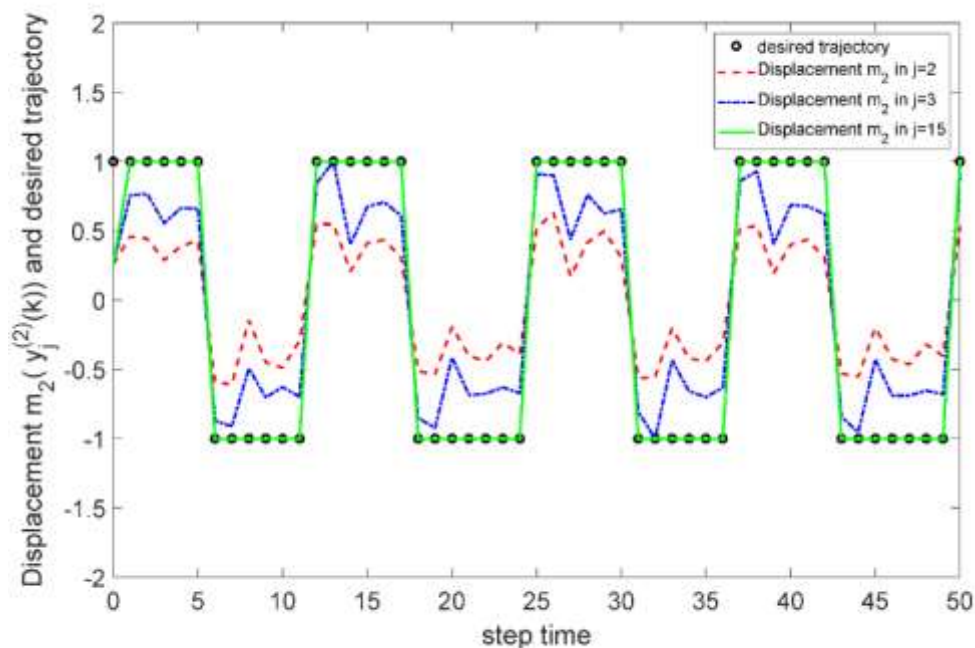


شاخص (۴۰) برای ارزیابی رویکردها در حوزه تکرار و زمان به کار رفته و دید جامعی را از روند کاهش خطای ردیابی در دو بعد ایجاد می‌نماید.

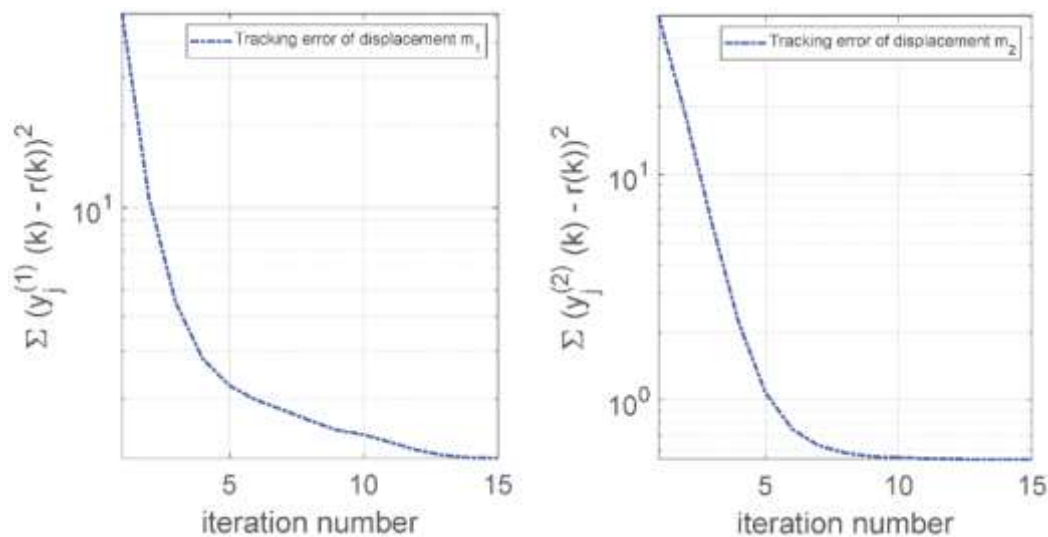
در شکل (۴) و شکل (۵) به ترتیب نمودار جابه‌جایی جرم‌های m_1 ، m_2 ، شکل (۶) نمودار خطای ردیابی و شکل ۷ نمودار مجموع خطای ردیابی جابه‌جایی جرم‌های سیستم MSD نشان داده شده است.



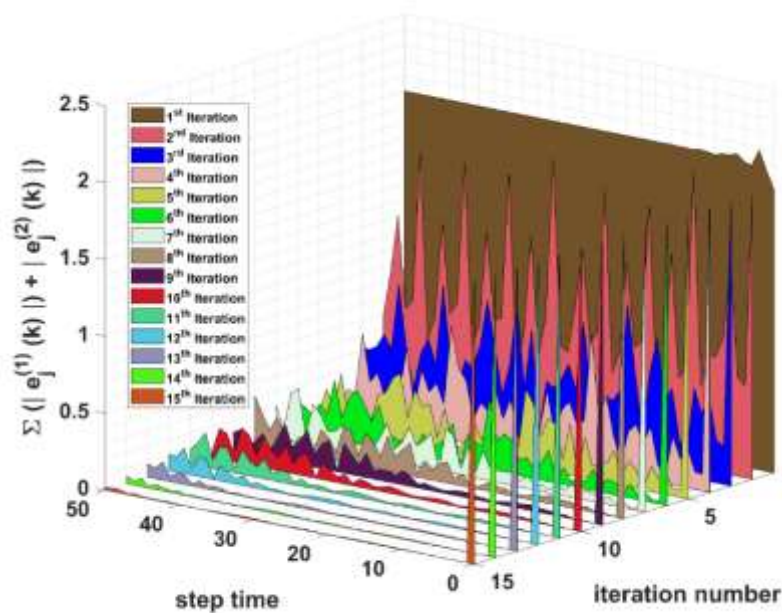
شکل (۴): نمودار جابه‌جایی جرم m_1 سیستم MSD در تکرارهای ۲ و ۳ و ۱۵، همراه با مسیر مطلوب در طول زمان



شکل (۵): نمودار جابه‌جایی جرم m_2 سیستم MSD در تکرارهای ۲ و ۳ و ۱۵، همراه با مسیر مطلوب در طول زمان



شکل (۶): نمودار خطای ردیابی خروجی‌های سیستم MSD برای ۱۵ تکرار اول با استفاده از شاخص (۳۹)، در طول تکرار (سمت چپ): خطای ردیابی جرم m_1 ، سمت راست: خطای ردیابی جرم m_2



شکل (۷): نمودار مجموع خطای ردیابی جابه‌جایی جرم‌های m_1 ، m_2 ، برای ۱۵ تکرار اول با استفاده از شاخص (۴۰) در طول زمان و تکرار

بحث: در شکل (۴) و شکل (۵) نشان داده شده که جابه‌جایی جرم‌های m_1 ، m_2 ، پس از ۱۵ تکرار طبق مسیر مطلوب انجام شده است. همچنین شکل (۶) نشان می‌دهد که خطای ردیابی همواره نزولی بوده و الگوریتم پیشنهادی همگرا است. شکل (۷) نیز روند کاهش خطای ردیابی هر دو خروجی در بعد تکرار و زمان مشخص شده و از تکرار ۱۵ به بعد خطای ردیابی صفر را نشان می‌دهد. از نتایج بدست آمده به راحتی می‌توان دریافت که فرآیند یادگیری الگوریتم ILC مقاوم پیشنهادی علی‌رغم عدم قطعیت متغیر با زمان و تکرار، به درستی در امتداد محور تکرار انجام شده است. توجه به این نکته ضروری است که خطای ردیابی راه اندازی را می‌توان با یادگیری شرایط اولیه یا انتخاب مناسب شرایط اولیه با توجه به مسیر مورد نظر به صفر رساند.



نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک شرایط همگرایی مقاوم جدید از الگوریتم ILC برای سیستم‌های زمان گسسته چند متغیره خطی در حضور عدم قطعیت متغیر تکرار در ماتریس‌های ورودی و خروجی پیشنهاد شده است. راه حل شرایط همگرایی مقاوم پیشنهادی یک بهره یادگیری ثابت در طول زمان و تکرار فراهم می‌کند. نتایج شبیه‌سازی روی یک ربات توانبخشی نشان داد که وقتی عدم قطعیت‌ها به‌طور تصادفی از تکراری به تکرار دیگر تغییر می‌کنند، این تکنیک می‌تواند کارآمدی بالایی داشته باشد و مقاومت کافی را از خود نشان دهد. تحقیقات آینده بر راه حل تحلیلی برای محاسبه بهره یادگیری مقاوم و همچنین یادگیری شرایط اولیه تمرکز خواهد کرد.

مراجع

- [1] Burgar, C. G., Lum, P. S., Shor, P. C., and Van der Loos, H. M. (2000). Development of robots for rehabilitation therapy: The Palo Alto VA/Stanford experience. *Journal of rehabilitation research and development*, 37(6), pp 663-674.
- [2] Krebs, H. I., Hogan, N., Aisen, M. L., and Volpe, B. T. (1998). Robot-aided neurorehabilitation. *IEEE transactions on rehabilitation engineering*, 6(1), pp 75-87.
- [3] Khoshdel, V., Akbarzadeh, A., and Moeenfar, H. (2015). Variable impedance control for rehabilitation robot using interval type-2 fuzzy logic. *International Journal of Robotics, Theory and Applications*, 4(3), pp 46-54.
- [4] Berezny, N. J. (2019). Design and Implementation of a Novel Rehabilitation Robot for Acute Stroke Patients. Carleton University.
- [5] Xu, G., Song, A., and Li, H. (2011). Adaptive impedance control for upper-limb rehabilitation robot using evolutionary dynamic recurrent fuzzy neural network. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 62(3), pp 501-525.
- [6] Ju, M.-S., Lin, C.-C., Lin, D.-H., Hwang, I.-S., and Chen, S.-M. (2005). A rehabilitation robot with force-position hybrid fuzzy controller: hybrid fuzzy control of rehabilitation robot. *IEEE transactions on neural systems and rehabilitation engineering*, 13(3), pp 349-358.
- [7] Geng, Y. and Ruan, X. (2015). Quasi-Newton-type optimized iterative learning control for discrete linear time invariant systems. *Control Theory and Technology*, 13(3), pp 256-265.
- [8] Van De Wijdeven, J., Donkers, M., and Bosgra, O. (2011). Iterative learning control for uncertain systems: Noncausal finite time interval robust control design. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(14), pp 1645-1666.
- [9] Xu, J., Sun, M., and Yu, L. (2005). LMI-based robust iterative learning controller design for discrete linear uncertain systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 3(3), pp 259-265.
- [10] Meng, D. and Moore, K. L. (2014). On robust iterative learning control against iteration-varying uncertain plant parameters. Paper presented at the 2014 American Control Conference.
- [11] Meng, D. and Moore, K. L. (2016). Robust iterative learning control for nonrepetitive uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(2), pp 907-913.
- [12] Emelianova, J., Pakshin, P., and Emelianov, M. (2019). Observer Based Iterative Learning Control of Uncertain Plant. *IFAC-PapersOnLine*, 52(29), pp 298-303.
- [13] Zhu, X., Soh, Y. C., and Xie, L. (2002). Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters. *Automatica*, 38(6), pp 1069-1077.



- [14] Zhu, M., Ye, L., and Ma, X. (2020). Estimation-based quadratic iterative learning control for trajectory tracking of robotic manipulator with uncertain parameters. *IEEE Access*, 8, pp 43122-43133.
- [15] Ahn, H.-S., Chen, Y., and Moore, K. L. (2007). Iterative learning control: Brief survey and categorization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 37(6), pp 1099-1121.
- [16] Moore, K. L., Chen, Y., and Bahl, V. (2005). Monotonically convergent iterative learning control for linear discrete-time systems. *Automatica*, 41(9), pp 1529-1537.
- [17] Noueili, L., Chagra, W., and Ksouri, M. (2015). Optimal iterative learning control for square MIMO linear systems. Paper presented at the 2015 7th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC).