مطالعه مروری بر کارآیی روش بدون‌المان درونیابی نقطه‌ای شعاعی در حل مسائل مکانیک شکست

بهروز آرین نژاد[۱]، شهرام شهروئی[۱*]، محمد شیشه ساز[۲]

۱.گروه مهندسی مکانیک،واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز،ایران
۲. گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی،دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

*نویسنده مسئول: shahramshahrooi@iauahvaz.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۱۷

چکیده
گسسته‌سازی دامنه‌های تحلیل در مسائل دارای هندسه پیچیده یا بی‌قاعده از طریق معادلات انتگرالی نیازمند انتخاب روش‌های عددی مناسب، معرفی نقاط گاووسی و گره‌ای با توزیع مطلوب، توابع پایه و وزن، تعیین روش تقریب‌زنی یا درونیابی است. جملات ناهمگن، هندسه و شرایط مرزی، بارگذاری خاص ناشی از شبیه‌سازی مدل فیزیکی رخدادها به مدل ریاضی، کارآیی برخی روش‌ها را کاهش می‌دهند. در این میان روش بدون المان درونیابی نقطه‌ای شعاعی در زمره روش‌های عددی بدون المان نسبتاً جدید به شمار می‌آید. در این‌روش، درکنار توابع پایه چندجمله‌ای با امکان غنی‌سازی آنها، می‌توان از توابع پایه شعاعی‌که منجر به تبدیل دامنه‌های نامتناهی به دامنه‌ای متناهی فرضی برای رفع تکینگی می‌شود، نیز استفاده نمود. در این تحقیق مروری ضمن بیان تئوری این روش عددی تا حد امکان به بیان سیر تکامل، بهبود و بکارگیری آن در بحث مکانیک شکست پرداخته و درنهایت ضمن بیان مزایا و معایب این‌روش طرح‌واره‌های پیشنهادی جهت تکمیل و ادامه مطالعات مطرح می‌گردد.

کلید واژه: روش بدون‌المان درونیابی نقطه‌ای شعاعی، تابع پایه شعاعی، گسسته‌سازی دامنه محلی، ترک و تکینگی، مکانیک شکست

مقدمه
مهندسان برای طراحی، تولید و بهینه‌سازی قطعات در سیستم‌های پیشرفته با پیچیدگی‌های خاصی جهت شبیه سازی و تحلیل مواجه هستند. پدیده‌های فیزیکی بسیاری وجود دارندکه جنبه‌های مختلف آنها با فرضیات ساده کننده(متناسب با رشد علوم) مورد بررسی و تحلیل قرارگرفته‌اند. اما هنوز نکات مختلف و قابل پرداختی برای بهبود عملکرد و بهینه شدن طراحی با توجه به نیاز روز وجود داردکه قابل بررسی می‌باشند. لازمه تبدیل مدل فیزیکی رخدادها به مدل ریاضی، درک عمیقی از شرایط کاری سیستم و توان بالا در شبیه سازی را می‌طلبد. مسائل مکانیک جامدات نیز از این قاعده مستثنی نیستند. معمولاً شبیه سازی پدیده‌ها با یافتن معادلات دیفرانسیل حاکم بر دامنه تحلیل[۱] حل آنها صورت می‌پذیرد. تبعاً حل همه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی تعریف شده از طریق حل دقیق(حل تحلیلی)[۲] میسر نیست[۱]. بنابراین استفاده از روش‌های عددی و حل تقریبی[۳] اصلاح و تکمیل آنها به شکل مداوم مورد توجه محققین جهت تکمیل فرآیند شبیه‌سازی بوده است. حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر دامنه‌های تحلیل به دو شکل حل قوی یا رویکرد مستقیم[۴] حل ضعیف یا رویکرد غیر مستقیم[۵]صورت می‌پذیرد. روش‌های تفاضل محدود، اجزاء محدود، حجم محدود و مرزمحدود از جمله روش‌های عددی رایج جهت تحلیل مسائل

---
[1] Partial Differential Equations governing the domain of analysis
[2] Exact Solution
[3] Approximate Solution
[4] Direct Approach
[5] Indirect Approach

در حوزه‌های مختلف علوم و مهندسی هستند[۲]. اخیراً روش عددی دیگری نظیر روش بدون المان[1]نیز مورد اقبال پژوهشگران قرار گرفته است. این روش مانند روش‌های رایج هنوز از بسته‌های نرم افزاری کمتر برخوردار بوده و محققین با کدنویسی به حل مسائل توسط آنها می‌پردازند. رویکرد غیر مستقیم حل معادلات دیفرانسیل انطباق، پایداری، دقت وکارآیی بیشتری در جزئیات و رفتار عمومی سیستم‌ها دارد. در مسائل مکانیک جامدات اغلب با کمینه کردن انرژی پتانسیل درون یک جسم صلب و در حالت‌کلی، انرژی پتانسیل‌کرنشی ناشی از نیرو و بارگذاری‌های اعمال شده به جسم صلب، می‌توان به یافتن میدان‌های جابجایی پرداخت[۳].

گسسته‌سازی دامنه‌های تحلیل در روش‌های عددی اجزاءمحدود، حجم محدود و تفاضل‌محدود توسط شبکه‌بندی صورت می‌پذیرد. به این نحو که هر فضای باز یا متقاطع بین رشته‌های یک شبکه‌بندی از پیش تعریف شده با اتصالات‌گره‌ای(نقاط گره‌ای)، یک شبکه نامیده می‌شود. از شبکه در روش تفاضل‌محدود به توری، در روش‌حجم محدود به حجم یا سلول و در روش اجزاءمحدود به المان تعبیر می‌شود. هر کدام از این توری‌ها، احجام یا سلول‌ها و المان‌ها از طریق روابط تعریف شده بین نقاط گره‌ای متناسب با شرایط فیزیکی و شبیه سازی ریاضی آن توسط معادلات دیفرانسیل(معمولی یا جزئی) با هندسه و آرایش نقاط گره‌ای خاص خود تعریف شده که ارضا کننده شرایط مطلوب، جهت انجام محاسبات مورد نظر می‌باشند[۴].

پس‌ازگسسته‌سازی دامنه تحلیل، نوشتن معادلات گره‌ای، حل دستگاه معادلات گره‌ای و یافتن ضرایب مجهول، محاسبه ماتریس‌های سختی برای جزء و کل دامنه می‌توان میدان‌های جابجایی، تنش و کرنش را محاسبه نمود. از چالش‌های اینگونه تحلیل‌ها برخورد با مسایل دارای تغییرشکل‌بزرگ، اعوجاج‌های تصادفی، رشد ترک و ناپیوستگی‌ها و مشکلات مربوط به تعیین مسیر پیش فرض برای رشدترک، انطباق مسیر تعریف شده با مسیر واقعی، ادغام و شبکه بندی‌های مجدد می‌توان نام برد[۶و۵]. این درحالی است که روش‌های بدون المان بکار گرفته شده جهت گسسته‌سازی دامنه‌های تحلیل(عمومی، محلی و زیر دامنه‌های محلی) به دلیل عدم استفاده از شبکه‌بندی به شیوه‌های رایج در روش‌های عددی یادشده با چالش‌های فوق روبرو نیستند. زیرا عملکرد آنها فقط بر مبنای توزیع نقاط گره‌ای در دامنه تحلیل بوده و ضمن دقت خوب محاسبات از سهولت نسبی عملکرد در تحلیل مسائل سه بعدی نیز برخوردار هستند[۷].

روش‌های بدون المان متعددی برای تقریب زدن متغیرهای میدان ابداع، استفاده و معرفی گردیده‌اند. این روش‌ها بر اساس نحوه تخمین و محاسبه میدان‌های مورد بررسی به دو دسته تقریب‌زن و درونیاب تقسیم می‌شوند. توزیع نقاط گره‌ای هم می‌تواند در پس زمینه‌های از پیش تعیین شده و یا بدون آن در دامنه‌های عمومی و محلی در هریک، با رویکرد مستقیم یا غیر مستقیم صورت پذیرد[۸-۱۰]. هنوز بررسی جامعی در خصوص برتری یک روش بر روش دیگر ارائه نشده است. زیرا بررسی‌های انجام شده بیشتر پیرامون معرفی، تلاش جهت بیان‌کارآیی روش‌ها در حل مسائل مختلف در زمینه‌های مکانیک جامدات(تحلیل تنش، ارتعاشات مکانیکی، تحلیل‌های الاستیک-پلاستیک، مسئله تکینگی ترک و ضرایب شدت تنش)، مکانیک سیالات و توزیع دما، آنالیز ریاضی، مهندسی برق و ژئوتکنیک می‌باشند. دربرخی نیز به شکل محتاطانه به بیان برتری آنها نسبت به روش‌های رایج(سنتی) و نزدیکی نتایج به یافته‌های تجربی اشاره شده است[۱۱]. یکی از روش‌های عددی بدون‌المان‌که در واقع فرم خاص و تعمیم یافته روش درونیابی نقطه‌ای[2]بوده و نسبت به روش‌های بدون‌المان دیگر به ویژه روش بدون المان پتروف–گلرکین محلی[3]جدیدتر است، روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی[4]است.

در این مطالعه مروری درحد امکان، به بیان‌تئوری، قابلیت‌ها، کارآیی، چالش‌ها و پیشنهادهایی جهت ادامه مطالعات در این روش برای حل مسائل مکانیک شکست پرداخته می‌شود.

---

1 Meshfree or Meshless Method
2 Point Interpolation Method (PIM)
3 Meshless Local Petrov – Galerkin (MLPG)
4 Radial Point Interpolation Method (RPIM)

مزایای استفاده از روش بدون‌المان

روش عددی اجزاءمحدود[1]روشی کارآمد و رایج در تحلیل مسایل مکانیک جامدات است. اما وجود مشکلاتی درآن باعث شده محققین به موازات توسعه و بهینه‌سازی بسته‌های نرم افزاری در این روش، برای رفع این چالش‌ها تلاش‌هایی جهت استفاده از روش‌های عددی بدون المان نیز انجام دهند. به طور کلی دلایل عمده رویکرد و استفاده از روش‌های بدون المان عبارت هستند از[۱۱و۱]:

- هزینه تولید شبکه و المان به عبارت بهتر نیاز به تولید شبکه‌بندی‌های متفاوت با المان‌هایی با ویژگی‌های خاص و آرایش گره‌ای مختلف برای مسائل مختلف با دامنه‌های تحلیل گوناگون
- عدم دقت مورد انتظار در محاسبه مقادیر میدان تنش در فصل مشترک‌ها به دلیل عدم پیوستگی مناسب المان‌ها یا شکستگی آنها در فرمولاسیون‌های پیش فرض بسته‌های نرم افزاری
- نیاز به کد نویسی تکمیلی یا ارتقا بسته‌های نرم افزاری برای رسیدن به همگرایی بیشتر و محاسبه دقیق‌تر تنش‌ها
- چالش عدم رسیدن به دقت لازم برای تخمین مناسب از طریق یک تحلیل تطبیقی ناشی از تولید خودکار شبکه‌بندی و پیچیدگی بحث نگاشت در میدان‌های متغیر در مسائل سه بعدی
- حل مسائل خاص دارای تغییر شکل‌های بزرگ، شبیه‌سازی رشد ترک در مسیرهای دلخواه و پیچیده
- تحلیل نادرست مسیر شکست و ایجاد خطا به ویژه در مسائل غیرخطی به دلیل عدم امکان انعطاف‌پذیری مطلوب المان‌ها به دلیل عملکرد روش اجزاءمحدود مبتنی بر تئوری های مکانیک محیط‌های پیوسته
- احساس نیاز به روشی مستقل از المان و رهایی از چالش‌های آن و در عین حال سهولت مدلسازی مبتنی بر توزیع نقاط گره‌ای

روش بدون‌المان درونیابی نقطه‌ای شعاعی

روش بدون‌المان درونیابی نقطه‌ای و تعمیم یافته آن، مبتنی بر حل ضعیف معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. نحوه محاسبات میدان‌های متغیر مورد نیاز در این روش استفاده از روش درونیابی است. داده‌های پیوسته به دلیل پیوستگی قابل اندازه‌گیری در تمام سطوح نیستند، بنابراین به طور نمونه‌ای استخراج می‌شوند. به عبارت دیگر درونیابی روش برآورد ارزش در مکان‌های نمونه‌برداری نشده با استفاده از مقادیر معلوم در نقاط همسایه(نقاط همسایه ممکن است به طور منظم یا نامنظم در آن ناحیه پراکنده شده باشند) است. لازمه این‌کار تعریف توابع پایه، توابع شکل و گسسته‌سازی دامنه تحلیل است. در مسائل مکانیک جامدات حصول به میدان جابجایی نقاط مختلف(نقاط گره‌ای) یک دامنه، منجر به یافتن میدان‌های تنش و کرنش خواهد شد. مقدار تقریبی جابجایی گره‌ای تخمینی در این روش عبارت است از:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} R_i(x)a_i + \sum_{j=1}^{m} P_j(x)b_j = \mathbf{R}^T a + \mathbf{P}^T b \qquad (۱)$$

در جایی‌که" $R_i(x)$" و" $P_j(x)$" به ترتیب توابع پایه شعاعی و چند جمله‌ای،" a_i" و" b_j" ضرایب مجهول توابع پایه شعاعی و چند جمله‌ای هستند. بردار ضرایب مجهول" a_0^T" نیز عبارت است از:

$$a_0^T = [\, a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \; a_n \;\; b_1 \;\; b_2 \;\; \dots \;\; b_m \,] \qquad (۲)$$

توابع پایه شعاعی رایج مورد استفاده در تحلیل‌ها به صورت زیر تعریف می‌گردند:

الف) چند رُبعی (MQ: Multi-Quadrics):

$$R_i(x,y,z) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q \qquad (۳)$$

[1] Finite Element Method (FEM)

ب) گاووسی (EXP: Gaussian):

$$R_i(x,y,z) = EXP\{-\alpha_s(\frac{r_i}{d_c})^2\} \quad (۴)$$

ج) اسپلاین (TPS: Tin Plate Spline):

$$R_i(x,y,z) = r_i^{\eta} \quad (۵)$$

د) لگاریتمی (Logarithmic):

$$R_i(x,y,z) = r_i^{\eta}\log r_i \quad (۶)$$

توضیح اینکه توابع پایه شعاعی معرفی‌شده از نوع اسپلاین و لگاریتمی بیشتر در مباحث انتقال و توزیع گرما کاربرد دارند. در روابط فوق" α_c "،"q"و"η" سه پارامتر شکل بوده که توسط تحلیل‌گر تعیین یا بر اساس مقادیر استاندارد ارائه شده، مقادیر آنها انتخاب می شوند[۷]. توابع پایه چند جمله‌ای براساس مثلث یا هرم خیام – پاسکال عبارتند از:

$$\mathbf{P}^T(x) = [\,1\ \ x\ \ y\ \ z\,] \qquad \text{m=4 (خطی)}$$
$$\mathbf{P}^T(x) = [\,1\ \ x\ \ y\ \ z\ \ x^2\ \ y^2\ \ z^2\,] \qquad \text{m=7 (درجه دوم)} \quad (۷)$$
$$\mathbf{P}^T(x) = [\,1\ \ x\ \ y\ \ z\ \ x^2\ \ y^2\ \ z^2\ \ xy\ \ xz\ \ yz\,] \qquad \text{m=10 (درجه دوم با جملات کامل)}$$

همچنین" r_i "و" d_c " به ترتیب فاصله نقطه گره‌ای تا نقطه مُعین و کوتاه‌ترین فاصله بین نقاط گره‌ای مجاور تا نقطه مُعین بوده که برای توزیع نامنظم به صورت میانگین(در حالت سه بعدی بر حسب حجم تخمین زده شده " V_S "، در حالت دو بعدی برحسب سطح تخمین زده شده" A_S" و در حالت تک بعدی برمبنای فاصله تخمین زده شده " D_S ") دردامنه پشتیبان و تعداد نقاط گره‌ای موجود در حالت سه بعدی با "n_{V_S}"، درحالت دو بعد" n_{A_S} " ودر حالت تک بعدی با"n_{D_S}" محاسبه می‌گردند.

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} \quad (۸)$$

$$d_c = \frac{\sqrt[3]{V_S}}{\sqrt[3]{n_{V_S}} - 1} \quad (۹)$$

با اعمال رابطه فوق، میدان جابجایی و ضرایب مجهول عبارتند از:

$$u(x) = \{\,R^T(x)\ \ P^T(x)\,\}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \{\,R^T(x)\ \ P^T(x)\,\}\mathbf{G}^{-1}\widetilde{U_S} \quad (۱۰)$$

و

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_n & P_m\\ P_m^T & 0\end{bmatrix}[\,u_1\ u_2 \dots u_n\ \ 0\ 0 \dots 0\,] = \mathbf{G}^{-1}\widetilde{U_S} \quad (۱۱)$$

که در آن" $\mathbf{G}$ "ماتریس مومنتوم کلی و " $\widetilde{U_S}$" بردار جابجایی توسعه یافته نامیده می‌شود که شامل ماتریس‌های مومنتوم توابع پایه شعاعی" $\mathbf{R}_n$ "و چند جمله‌ای" $\mathbf{P}_m$ " است:

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix}R_n & P_m\\ P_m^T & 0\end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

تابع شکل تولید شده برابر است با:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}^T(x) &= \{\,R^T(x)\ \ P^T(x)\,\}\ \mathbf{G}^{-1}\\ &= [\,\phi(x)_1\ \phi(x)_2 \dots \phi(x)_n\ \ \phi(x)_{n+1}\ \phi(x)_{n+2} \dots \phi(x)_{n+m}\,]\end{aligned} \quad (۱۳)$$

در نهایت میدان جابجایی محاسبه شده بر حسب توابع شکل تولیدی و مقادیر جابجایی نقاط گره‌ای به صورت زیر است:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\phi}_i u_i=\boldsymbol{\phi}^T(x)U_s \tag{۱۴}$$

توجه گردد که در روش درونیابی نقطه‌ای فقط از توابع پایه چند جمله‌ای و در بعضی مسائل خاص مانند مسئله ترک با ترکیب کردن توابع پایه مثلثاتی این روش توسعه و یا به اصطلاح رایج غنی‌سازی می‌گردد. از طرفی تعداد ضرایب مجهول و تعداد معادلات دیفرانسیل انتگرالی حاکم بر تحلیل برای نقاط گره‌ای نیز بیشتر می‌شوند [۱۳و۱۲]. در روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی نیز برای رفع تکینگی تنش در نقاط گره‌ای نوک ترک مشابه جملات روابط وسترگارد[۱] به منظور غنی‌سازی توابع پایه مثلثاتی زیر به جملات رابطه (۱) اضافه می‌گردند و می توان نوشت:

$$u^h(x)=\sum_{i=1}^{n}R_i(x)a_i+\sum_{j=1}^{m}P_j(x)b_j+\sum_{k=1}^{l}E_k(x)c_k \tag{۱۵}$$

که در آن تابع پایه مثلثاتی عبارت است از:

$$\mathbf{E^T}(\mathbf{x})=\left[\sqrt{r}\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\quad \sqrt{r}\,\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\quad \sqrt{r}\,\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\mathrm{Sin}\theta\quad \sqrt{r}\,\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\mathrm{Sin}\theta\right] \tag{۱۶}$$

در رابطه فوق" r " فاصله شعاعی نقطه گره‌ای مورد بررسی تا نوک ترک و "θ " زاویه این فاصله نسبت به محور افقی با جهت پادساعتگرد است. بدیهی است با افزایش جملات توابع پایه، ضرایب مجهول نیز افزایش یافته و برای تعداد معینی نقطه گره‌ای توزیع شده در دامنه و معادلات انتگرالی نظیر آنها، تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر می‌شود، که ضمن بزرگ شدن ابعاد ماتریس‌ها باید به همان تعداد افزایش بُعد رخ داده شده معادلات قیدی به روابط افزود تا مسئله قابلیت حل شدن پیدا کند.

بهبود روش بدون‌المان درونیابی نقطه ای شعاعی جهت حل مسائل مکانیک شکست

فرانک و اسچابک[۱۲] بر مبنای انجام مطالعات عددی قبلی جهت امکان استفاده از توابع پایه شعاعی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی به ارائه مبانی تئوری استفاده از این توابع پایه در حل‌تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی پرداختند. وانگ و لیو [۱۳] برای بهبود و رفع اولیه مشکلات تکینگی در روش درونیابی نقطه‌ای، توابع پایه شعاعی را تعریف و با ترکیب آنها با توابع چندجمله ای توابع شکل جدید ترکیبی را معرفی و استفاده نمودند. در ابتدا چون مسئله توزیع نقاط گره‌ای، به عنوان جایگزین روش شبکه‌بندی و تکینگی تنش در نوک ترک مطرح بود، استفاده از روش‌های کوپل شده در بهبود پاسخ ها مفید بود. ژو و ژانگ[۱۴] یک مدل مبتنی بر شبیه‌سازی همزمان توسط روش اجزاءمحدود و روش بدون‌المان ارائه نمودند. در مدل آنها جهت تحلیل نقاط پیرامون ترک از یک دامنه محلی و روش بدون‌المان در فرم ضعیف و درخارج از این محدوده از روش اجزاءمحدود استفاده شده بود. انتقال بین این دو دامنه از طریق تکنیک چند کاره لاگرانژ صورت گرفت. جو و همکاران[۱۶و۱۵] با اضافه کردن توابع مثلثاتی و توابع پایه شعاعی غنی‌شده به توابع پایه چند جمله‌ای رایج در روش درونیابی نقطه‌ای، تابع درونیاب جدیدی را برای تحلیل تنش در نوک ترک، ارائه نمودند. نتایج مطالعات آنها بیان نمود که توسعه و غنی‌سازی توابع پایه می‌تواند به شکل مطلوبی در محاسبات مکانیک شکست خطی و مسئله ترک موثر واقع شود. در ادامه مطالعات صورت گرفته، ژانگ و همکاران[۱۷] برای بهبود روش غنی‌سازی و کاهش هزینه محاسبات، روش جدیدی برای محاسبه ضرایب شدت تنش در نوک ترک و نقاط گره‌ای نزدیک به آن معرفی نمودند. آنها با تعریف زیر دامنه‌هایی تئوری تنش ویلیامز را برای ترک در حالات I و III بکار گرفته و بر خلاف روش‌های رایج معرفی شده از اصل حساب تغییرات نیز به شکل ترکیبی جهت رفع تکینگی بهره بردند. در پژوهشی دیگر که توسط آزودو و همکاران[۱۸] صورت گرفت، مسیر انتشار ترک از روش همسایگی طبیعی[۲]پیش‌بینی گردید. آنها با یک الگوریتم توزیع نقاط گره‌ای محاسباتی- انطباقی (سازگارشونده) طی چند مرحله بر مبنای رهیافت تنش بیشینه، بازشدگی ترک را بررسی نموده و معیار خود را بر روی چند نمونه نمونه اجرا کردند. نگوین و همکاران[۲۰و۱۹] با رویکرد جدیدی به

[2] Natural Neighbour method in RPIM

تحلیل مسئله ترک در حالت الاستیک دو بُعدی پرداختند. به این نحو که ابتدا با یک شبکه‌بندی محلی از پیش تعریف شده مبتنی بر روش گالرکین، توزیع نقاط گره‌ای خود را در دامنه تحلیل انجام دادند. سپس ضمن استفاده از توابع استاندارد پایه غنی شده، در محل ناپیوستگی‌ها و شکاف ترک از عملگر پراش کمک گرفته و رشد ترک را در حالت مُود ترکیبی تخمین زدند. همچنین در تحقیق دیگری، از توابع هویسایدِ[1] در روش توسعه یافته خود استفاده کرده و ضرایب شدت تنش دینامیکی در جامدات ایزوتروپیک و کامپوزیت‌های ارتوتروپیک دارای ترک را محاسبه نمودند. نوع بارگذاری در تحلیل آنها، انفجاری و سینوسی بوده و به شکل ضمنی نقش توابع خطی رمپ[2]را نیز روی مدل خود بررسی نمودند. وجه دیگر مطالعات انجام شده در روش RPIMبررسی پارامترهای شکل، مقادیر آنها و چگونگی تعریف توابع شکل است. معمولاًمقدار مناسب هریک از این پارامترهای شکل و تعریف توابع شکل توسط محقق انتخاب می‌گردد. هرچند مقادیر استانداردی جهت عمومیت بخشی و سهولت استفاده از آنها در تحلیل مسایل با هندسه ساده ارائه شده است. وانگ و لیو[۲۱] با بکارگیری طیف وسیعی ازمقادیر به مطالعه تاثیر پارامترهای شکل مورد استفاده در تابع پایه شعاعی-گاووسی و چند رُبعی پرداختند. در عین حال به بررسی افزایش ضرایب مجهول که منجربه افزایش ابعاد ماتریس‌ها شده و تاثیرآنها درمیزان خطا در محاسبات پرداختند. در نهایت مقادیر عددی سه پارامتر شکل با نتایج بهتر را معرفی نمودند. روش اعتبارسنجی متقاطع مورد استفاده در تحلیل‌های آماری به عنوان جایگزینی مناسب برای رگرسیون خطی یا تقریب اسپلاین هموار برای تقریب‌زنی و تخمین مقادیر پارامترهای شکل توسط فشر و ژانک[۲۲] معرفی گردید. در برخی از مطالعات تغییرات چند پارامتر را به شکل منفرد یا تاثیر یک متغیر را با ثابت فرض کردن پارامتر دیگر بر دقت محاسبات بررسی کرده‌اند. اما در یک استراتژی جدید که توسط سارا و استارگیل[۲۳] مطرح شد به شکل تصادفی متغیرها یا همان مقادیر پارامترهای شکل تغییر و محاسبات انجام و مقادیری که به نتایج مطلوب‌تر می‌انجامید به عنوان مقادیر بهینه پارامتر شکل انتخاب و معرفی شدند. مانگیلو[۲۴] با استفاده از روش‌های محاسباتی و خطاگیری به شکل کلی به بررسی نقش پارامترهای شکل در توابع شعاعی پرداخت. روش کار او اینگونه بود که شش نمونه تابع پایه شعاعی دارای پارامتر شکل را انتخاب و پس از اعمال داده‌های خود، محاسبه خطای RMS،کمینه کردن تابع پیشگو به معرفی مقادیر بهینه پارامترهای شکل پرداخت. لیکن تحقیق ایشان مبتنی بر ریاضیات محض بود. عافیت دوست و اسماعیل بیگی[۲۵] از الگوریتم ژنتیک جهت پیداکردن مقادیر بهینه پارامتر شکل تابع شعاعی مورد تعریف در حل معادلات دیفرانسیل معمولی در دو حالت خطی و غیرخطی استفاده نمودند. سپس نشان دادند که استراتژی آنها در مقایسه با روش‌های آماری و سعی خطا مفیدتر است. بی آزار و حسامی[۲۶] بر خلاف رویکردهای عددی مبتنی بر به حداقل رساندن تابع خطا یا تابع هزینه و حتی روش ریپا و اصلاحات آن، از تکنیک عملگرای همگرایی پاسخ‌ها استفاده نمودند. آنها با یافتن مقادیر بهینه پارامترهای شکل به حل معادلات دیفرانسیل جزئی پرداخته و نشان دادند نسبت به روش‌های اعتبارسنجی یا آماری مفیدتر است. سراج الحق و منظورحسین [۲۷] به بررسی کارآیی دو روش سری‌های توانی باقیمانده و روش همسویی در روش بدون‌المان(ترکیبی) در یافتن مقادیر پارامترهای شکل جهت حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت و متغیر پرداختند. دقت شبیه سازی مدل‌های خود را با روش سنجش هنجاری خطاها نمایش دادند. بررسی‌های اجمالی بیشتر نیز مبین عدم وجود مطالعات کاربردی در حوزه تعیین پارامترهای شکل در مسایل مکانیک شکست(با هندسه ساده و پیچیده) است. به نحوی که تحلیلگران یا از مقادیر استاندارد یا با سعی و خطا به گزینش مقادیر پرداخته‌اند. لزوم رسیدن به پاسخ‌های مناسب با دقت محاسباتی بالا به ویژه در مسائل غیرخطی و سطح مقطع دارای ناپیوستگی هندسی با عیوب ساختاری یا ایجادی، نیازمند توزیع نقاط گره‌ای با تراکم بیشتر در آن نواحی بود. زیرا که افزایش نقاط گره‌ای در سرتاسر دامنه تحلیل(دامنه عمومی) حجم محاسبات را بسیار بالا وحتی غیر ممکن می‌ساخت. در این راستا ماسوئی و بوزئان[۲۸] روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی محلی را برای تجزیه تحلیل الاستو استاتیکی دو بُعدی بکار گرفتند. آنها به طور مشخص تاثیر پارامتر ابعاد دامنه را در دامنه‌های محلی تعریفی در مسئله خود با دو روش MLPG و LRPIM بررسی نمودند. لیو و همکاران[۲۹] برای مسئله تکینگی نوک ترک روشی معرفی نمودند که بر مبنای توزیع نقاط گره‌ای در سلول‌های

[1] Heaviside functions
[2] Linear ramp functions

مثلثی پس‌زمینه بود. آنها برای اعمال روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در نقاط نزدیک ترک و نوک ترک از پنج لایه سلول مثلثی شکل با آرایش پنج نقطه گره‌ای در هر سلول بهره گرفتند. مدل ارائه شده آنها با تولید ماتریس سختی و فرمول ضعیف شده و توابع شکل در کنار حل چند مثال عددی برای تایید روش جدید توسعه یافته خود با نتایج مرجع، حکایت از دقت مطلوب محاسبات داشت. بلینها و همکاران[۳۱و۳۰] از روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی همسایه طبیعی مبتنی بر اطلاعات گره‌ای، تابع درونیاب جابجایی را تولید کردند که طی آن بدون توزیع نقاط گره‌ای در پس‌زمینه و صرفاً با اجرای یک الگوریتم تطبیق‌پذیر در مسیر رشد ترک الاستیک خطی، به گسسته‌سازی و تحلیل مسئله ترک پرداخته شده بود. آنها سپس در ادامه تحقیق خود تاثیر نحوه آرایش گره‌ای را در دو حالت درجه یک و درجه دو بر دقت محاسبات را بررسی نموده و صحت‌سنجی یافته‌ها را با نتایج موجود در مرجع خود انطباق دادند. ژو و همکاران[۳۲] از تکنیک پوششی مستقل گره‌ای مبتنی بر توزیع نقاط گره‌ای با حوزه تاثیر مثلثی و هرم‌های مثلث القاعده جهت همپوشانی حوزه‌های اطراف نوک ترک بهره گرفتند. آنها ضرایب شدت تنش را بر مبنای تاثیر میزان تراکم نقاط گره‌ای برای مسئله ترک محاسبه نمودند. ژانگ و وانگ[۳۳] با معرفی یک فرمولاسیون جدید برای روش بدون‌المان کرنل جهت باز تولید نقاط گره‌ای توسط توابع پایه بی‌اسپلاین(نربز)که در تحلیل هم‌هندسی از آن استفاده می‌شد، به اصلاح مدلسازی‌های رایج پرداختند. آنها با اصلاح اندازه دامنه پشتیبانی و پیوند بین روش بدون‌المان و روش هم‌هندسی در دامنه محلی به شکل موثری به دقت محاسبات و سهولت آن در تحلیل مسایل دارای ناپیوستگی هندسی کمک نمودند. گیرگوتی و همکاران[۳۴] برای تحلیل نحوه رشد ترک‌های نزدیک به سطح از استراتژی جدید بهره گرفتند. آنها با استفاده شبکه‌بندی انجام شده در نرم افزار انسیس و فراخوان نقاط گره‌ای در روش بدون‌المان به تلفیق دو روش اجزاءمحدود و بدون‌المان پرداختند. در واقع می‌توان گفت روش آنها(روش مش–مُرفر)، روش بدون‌المان با آرایش گره‌ای در روش اجزاءمحدود است‌که به محاسبه میدان جابجایی و تغییرشکل‌ها می‌پردازد. لیو و همکاران[۳۵] برای شبیه سازی انتشار ترک در یک محیط الاستیک-پلاستیک روش LRPIM را با روش XFEM مقایسه نمودند. آنها نشان دادند که اگر چه نتایج روش به نتایج مدل تجربی نزدیک است اما در قیاس با نتایج XFEM دقت کمتری دارد و باید اصلاحاتی در آن انجام داد تا مسیر انتشار ترک با منحنی هموارتری پیش‌بینی گردد. ازجمله جنبه‌های کاربردی دیگر استفاده از روشRPIM می‌توان به بررسی میدان جابجایی در ساختارهای تحت تاثیر میدان مغناطیسی الکترو–الاستیک و دما با روش بدون‌المان درونیابی شعاعی توسط ژو و همکاران [۳۶] اشاره کرد. آنها بر اساس روش نیومارک اصلاح شده، تئوری فضای جی[1]و فرمولاسیون ضعیف- ضعیف شده[2]با یک شبکه‌بندی مثلثی پس‌زمینه به تحلیل عددی خود پرداختند. دلیل استفاده از آرایش گره‌ای مثلثی انطباق خوب این چینش گره‌ای در هندسه‌های پیچیده است و در برخی موارد با توجه به محدودیت مرزی به راحتی قابل تولید هستند. نتایج اعمال روش پیشنهادی بر روی چند مدل فیزیکی تحت میدان مغناطیسی-الکترو–ترمو–الاستیک، حکایت از عملکرد خوب آن دارد. رامولا وهمکاران[۳۷] الگوریتم توسعه یافته‌ای برای پیش‌بینی مسیر ترک با ترکیب روش اجزاءمحدود و روش RPIM مبتنی بر رهیافت‌های حداکثر تنش مماسی معرفی نمودند. از آنجایی‌که توابع شکل مورد نیاز در روشRPIM دارای ویژگی دلتا کرونکر هستند، تمام تکنیک-های عددی موجود در روشFEM را می‌توان برای اعمال شرایط مرزی طبیعی و ضروری در روش تلفیقی پیشنهادی نیز اعمال نمود. لیو و همکاران[۳۸] در مطالعه خود از روش تفریق یکپارچه برای مدل‌سازی عیوب اولیه موجود در سازه‌ها به عنوان یک مدل تطبیق‌پذیر استفاده کردند. این عیوب(حفره‌ها یا ترک‌ها) به کمک منحنی‌های بسته غیر یکنواخت منطقی بی اسپیلان که بسیار در طراحی به کمک رایانه مورد استفاده قرار می‌گیرند و به روش هموتوپیک شبکه‌بندی گره‌ای شده از کل نقاط گره‌ای دامنه تحلیل که از پیش تعیین شده‌اند، کسر می‌گردد. وقتی اندازه عیوب تغییر می‌کند از تکنیک تفریق متحرک که در آن فقط قسمت متغیر بین مرزهای جدید و مرز قدیم استفاده می‌شود. آنگاه کسورات اعمال و با نتایج مرحله قبل ادغام می‌گردند. یافته‌های آنها از کارآیی خوب روش پیشنهادی در حل سه نمونه مسئله الاستیک خطی با عیب اولیه (حفره و ترک) حکایت دارد. نگوین و همکاران[۳۹] برای اولین بار روش بدون‌المان درونیابی شعاعی را برای رشد ترک در یک سازه تحت بارگزاری حرارتی–

[1] G space theory
[2] weakened weak formulation

مکانیکی بکار گرفتند. آنها برای اعمال روش بدون‌المان، هر دو سطح ترک را آدیاباتیک در نظر گرفته و توابع پایه را به گونه‌ای تعریف نمودند که تابع پرش در سطح ترک، اثر دما، جابجایی، تکینگی، شارحرارتی و شدت تنش را در نوک ترک پاسخگو باشد. آنها از روش تبدیل دکارتی به جای رُبع گاوسی با چینش گره‌ای چهارضلعی و مثلثی استفاده نمودند. سطوح ترک را به عنوان بخشی از مرزهای حوزه تحلیل مدل نموده و دقت محاسبات خود را با نتایج روش‌های عددی و تجربی مقایسه نمودند. نولی و همکاران[۴۰] برای اولین بار از منطق فازی در روش بدون‌المان درونیابی نقطه‌ای شعاعی استفاده کرده و طی آن به بررسی میدان‌های جابجایی فازی در شکست تُرد در مسئله ترک در مراحل شروع انتشار و شاخه‌زنی آن پرداختند. آنها برای ارائه عملی بودن پیشنهاد خود به حل عددی چند دامنه تحلیل با استراتژی‌های مختلف (تعریف سناریوهای مختلف فازی) در انتخاب نقاط گره‌ای پشتیبان جهت دستیابی به میدان‌های جابجایی پرداختند.

می‌توان در روند مطالعات صورت گرفته به روشRPIM به موارد زیر نیز برخورد نمود:

* حل مسئله ترک با هندسه‌های مختلف(خطی، محیطی، ضربدری، سطحی) در سازه‌ها(میله، لوله، ورق، پوسته یا تیر) تحت بارگذاری‌های مختلف

* نحوه توزیع نقاط گره‌ای (منظم یا نامنظم) با تراکم مختلف در دامنه‌های محلی یا زیر دامنه‌ها و تعیین حوزه دامنه پشتیبان با اشکال مختلف هندسی(مربع، مستطیل، دایره یا چند ضلعی منتظم یا نامنتظم)

*منطقه‌بندی با استفاده از تکنیک‌های هندسی نظیر روش فرانمایی و حلزونی

* تعیین ضرایب شدت تنش و رشد ترک تحت بار گذاری‌های منفرد

* حل مسئله ترک در زمینه تیرها یا محورهای مرتعش از جنس مختلف و نحوه انتشار موج در محیط‌های الاستیک و بررسی رفتار آنها

* تلاش جهت معرفی روش بدون‌المان به عنوان روشی ساده تر از روش اجزاءمحدود در حل مسائل با شرایط خاص هندسی و تغییر شکل‌های بزرگ

* تحقیقات موردی در خصوص استفاده از توابع خاص نظیر تابع وزنی هویساید، تابع درونیاب هرمیت–بیرخاف جهت تعریف توابع پایه درونیاب

* تخمین خطا و آنالیز انطباق جهت بهبود پاسخ‌ها

جمع بندی و پیشنهادات

از روش‌های عددی بدون‌المان در سال‌های اخیر بیشتر به عنوان یک روش قوی در حل و بحث معادلات دیفرانسیل جزئی و تخمین میدان‌های متغیر استفاده شده و روند معرفی، کارآیی و ارزیابی از این روش‌ها هم هنوز ادامه دارد و مورد توجه محققین است. هرچند تعداد ضرایب مجهول و ابعاد ماتریس‌ها در این روش نسبت به سایر روش‌ها بزرگتر بوده و تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر است، به نحوی که باید این کمبود را با نوشتن معادلات قیدی جبران نمود. اما با بررسی انجام شده موارد زیر جهت بهبود و تکمیل این روش عددی پیشنهاد می‌گردد:

- تعریف، توصیف و ارزیابی توابع پایه شعاعی چند متغیره جدید
- بکارگیری الگوریتم‌های هندسی جهت تعیین حوزه تاثیر نقاط گره‌ای به منظور عدم افزایش نقاط گره‌ای توزیع شده در زیر دامنه محلی و کاهش خطای تدریجی در گسسته‌سازی
- استفاده از الگوریتم‌های بهینه سازی فراابتکاری جهت بهینه‌سازی تک و چند هدفه درجهت بهینه کردن مقادیر پارامتر شکل و ابعاد دامنه‌های پشتیبان
- استفاده از توابع درونیاب با مشتق‌پذیری مراتب بالاتر نظیر تابع درونیاب هرمیتی
- بررسی تاثیر تعداد جملات توابع پایه چندجمله‌ای در دقت پاسخ‌ها

- بررسی و امکان‌سنجی روش‌های مختلف(فرانمایی، حلزونی و...) تعیین حوزه تاثیر نوک ترک و نقاط گره‌ای نزدیک به آن در دقت محاسبات
- ارزیابی هم‌زمان چند روش بدون‌المان بر روی یک دامنه تحلیل مشترک جهت مقایسه،انتخاب و معرفی مناسب‌ترین روش

تشکر و قدردانی:

نویسندگان نهایت تشکر و قدردانی خود را برای همکاری موثر هسته پژوهشی محاسبات پیشرفته دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز اعلام می‌دارند.

مراجع

[1] Kleiber, M. (Ed.). (1998). Handbook of computational solid mechanics: survey and comparison of contemporary methods. Springer Berlin Heidelberg.
[2] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Zhu, J. Z. (2005). The finite element method: its basis and fundamentals. Elsevier.
[3] Liu, G. R. and Han, X. (2003). Computational inverse techniques in nondestructive evaluation. CRC press.
[4] Liu, G. R. and Quek, S. S. (2013). The finite element method: a practical course. Butterworth-Heinemann.
[5] Munjiza, A., Knight, E. E. and Rougier, E. (2015). Large strain finite element method: a practical course. John Wiley & Sons.
[6] Arregui-Mena, J. D., Margetts, L. and Mummery, P. M. (2016). Practical application of the stochastic finite element method. Archives of Computational Methods in Engineering, 23(1), pp 171-190.
[7] Liu, G. R.and Gu, Y. T. (2005). An introduction to meshfree methods and their programming. Springer Science & Business Media.
[8] Liu, M. B., Liu, G. R. and Zong, Z. (2008). An overview on smoothed particle hydrodynamics. International Journal of Computational Methods, 5(01), pp 135-188.
[9] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M.,and Krysl, P. (1996). Meshless methods: an overview and recent developments. Computer methods in applied mechanics and engineering, 139(1-4), pp 3-47.
[10] Liu, W. K., Chen, Y., Jun, S., Chen, J. S., Belytschko, T., Pan, C. and Chang, C. (1996). Overview and applications of the reproducing kernel particle methods. Archives of Computational Methods in Engineering, 3(1), pp 3-80.
[11] Patel, V. G. and Rachchh, N. V. (2020). Meshless method–review on recent developments. Materials today: proceedings, 26, pp 1598-1603.
[12] Franke, C. and Schaback, R. (1998). Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions. Applied Mathematics and Computation, 93(1), pp 73-82.
[13] Wang, J. G. and Liu, G. (2002). A point interpolation meshless method based on radial basis functions. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54(11), pp 1623-1648.
[14] Gu, Y. and Zhang, L. C. (2008). Coupling of the meshfree and finite element methods for determination of the crack tip fields. Engineering Fracture Mechanics, 75(5), pp 986-1004.
[15] Gu, Y., Wang, W., Zhang, L. C. and Feng, X. Q. (2011). An enriched radial point interpolation method (e-RPIM) for analysis of crack tip fields. Engineering Fracture Mechanics, 78(1), pp 175-190.
[16] Gu, Y. (2011). An enriched radial point interpolation method based on weak-form and strong-form. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 18(8), pp578-584.
[17] Zhuang, X., Cai, Y.,and Augarde, C. (2014). A meshless sub-region radial point interpolation method for accurate calculation of crack tip fields. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 69, pp 118-125.
[18] Azevedo, J. M. C., Belinha, J., Dinis, L. M. J. S. and Jorge, R. N. (2015). Crack path prediction using the natural neighbour radial point interpolation method. Engineering Analysis with Boundary Elements, *59*, 144-158.
[19] Nguyen, N. T., Bui, T. Q., Zhang, C. and Truong, T. T. (2014). Crack growth modeling in elastic solids by the extended meshfree Galerkin radial point interpolation method. Engineering analysis with boundary elements, 44, pp 87-97.
[20] Nguyen, N. T., Bui, T. Q. and Truong, T. T. (2017). Transient dynamic fracture analysis by an extended meshfree method with different crack-tip enrichments. Meccanica, 52(10), pp2363-2390.

[21] Wang, J. G. and Liu, G. (2002). On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. Computer methods in applied mechanics and engineering, 191(23-24), pp2611-2630.

[22] Fasshauer, G. E. and Zhang, J. G. (2007).On choosing "optimal" shape parameters for RBF approximation. Numerical Algorithms, *45*(1), pp345-368.

[23] Sarra, S. A. and Sturgill, D. (2009). A random variable shape parameter strategy for radial basis function approximation methods. Engineering Analysis with Boundary Elements, 33(11), pp1239-1245.

[24] Mongillo, M. (2011). Choosing basis functions and shape parameters for radial basis function methods. SIAM undergraduate research online, 4(190-209), pp2-6.

[25] Afiatdoust, F. and Esmaeilbeigi, M. (2015). Optimal variable shape parameters using genetic algorithm for radial basis function approximation. Ain Shams Engineering Journal, 6(2), pp639-647.

[26] Biazar, J. and Hosami, M. (2017). An interval for the shape parameter in radial basis function approximation. Applied Mathematics and Computation, 315, pp131-149.

[27] Haq, S. and Hussain, M. (2018). Selection of shape parameter in radial basis functions for solution of time-fractional Black–Scholes models. Applied Mathematics and Computation, 335, pp248-263.

[28] Moussaoui, A. and Bouziane, T. (2019). A comparative study of size parameter effects in meshless methods Local PETROV-GALERKIN (MLPG) and Local Radial Point Interpolation method (LRPIM). International Journal of Mechanical Engineering and Technology, 10(7).

[29] Liu, G. R., Jiang, Y., Chen, L., Zhang, G. Y. and Zhang, Y. W. (2011). A singular cell-based smoothed radial point interpolation method for fracture problems. Computers & structures, 89(13-14), pp1378-1396.

[30] Belinha, J., Azevedo, J. M. C., Dinis, L. M. J. S. and Natal Jorge, R. M. (2016). The natural neighbor radial point interpolation method extended to the crack growth simulation. International Journal of Applied Mechanics, 8(01), 1650006.

[31] Belinha, J., Azevedo, J. M. C., Dinis, L. M. J. S. and Natal Jorge, R. M. (2017). The natural neighbor radial point interpolation method in computational fracture mechanics: a 2D preliminary study. International Journal of Computational Methods, 14(04), 1750045.

[32] Zhu, H., Sun, P. and Cai, Y. (2017). Independent cover meshless method for the simulation of multiple crack growth with arbitrary incremental steps and directions. Engineering Analysis with Boundary Elements, 83, pp242-255.

[33] Zhang, H. and Wang, D. (2017). Reproducing kernel formulation of B-spline and NURBS basis functions: A meshfree local refinement strategy for isogeometric analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 320, pp474-508.

[34] Giorgetti, F., Cenni, R., Chiappa, A., Cova, M., Groth, C., Pompa, E., ... & Biancolini, M. E. (2018). Crack propagation analysis of near-surface defects with radial basis functions mesh morphing. Procedia Structural Integrity, 12, pp471-478.

[35] Li, Y., Xu, N., Tu, J. and Mei, G. (2019). Comparative modelling of crack propagation in elastic–plastic materials using the meshfree local radial basis point interpolation method and extended finite-element method. Royal Society open science, 6(11), 90543.

[36] Zhou L, Ren S, Meng G, Ma Z. (2020). Node-based smoothed radial point interpolation method for electromagnetic-thermal coupled analysis. Applied Mathematical Modelling. 78, pp841-62.

[37] Ramalho LD, Belinha J, Campilho RD. (2020). Fracture propagation using the radial point interpolation method. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 43(1), pp77-91.

[38] Liu Y, Wan Z, Yang C, Wang X. (2020). NURBS-Enhanced meshfree method with an integration subtraction technique for complex topology. Applied Sciences. 10(7), pp2587.

[39] Nguyen NT, Bui TQ, Nguyen MN, Truong TT. (2020). Meshfree thermomechanical crack growth simulations with new numerical integration scheme. Engineering Fracture Mechanics. 235, pp107121.

[40] Novelli L, Gori L, da Silva Pitangueira RL. (2022). Phase-field modelling of brittle fracture with Smoothed Radial Point Interpolation Methods. Engineering Analysis with Boundary Elements. 138, pp219-34.