



Fall 2023, 4 (3), 55-61

DOI: [10.71856/impcs.2023.903439](https://doi.org/10.71856/impcs.2023.903439)

Received: 15 July 2023

Accepted: 24 Aug 2023

مقاله پژوهشی

## Vertex Decomposability of Path Complexes Associated with Cycle Graphs

Seyyed Mohammad Ajdani<sup>1</sup>, Kamal Ahmadi<sup>2</sup>, Asghar Madadi<sup>3\*</sup>

1. Assistant Professor, Department of Mathematics, Zanzan Branch, Islamic Azad University, Zanzan, Iran.

[majdani2@yahoo.com](mailto:majdani2@yahoo.com)

2. Assistant Professor, Department of Mathematics, Zanzan Branch, Islamic Azad University, Zanzan, Iran.

[kamal.ahmadi.math@gmail.com](mailto:kamal.ahmadi.math@gmail.com)

3. Assistant Professor, Department of Mathematics, Zanzan Branch, Islamic Azad University, Zanzan, Iran.

(Corresponding Author) [amadadi2009@gmail.com](mailto:amadadi2009@gmail.com)

### Abstract:

**Introduction:** Monomials are the link between commutative algebra and combinatorics. With a simplicial complex  $\Delta$ , one can associate two square-free monomial ideals: the Stanley-Reisner ideal  $I_\Delta$ , whose generators correspond to the non-faces of  $\Delta$ , or the facet ideal  $I(\Delta)$ , which is a generalization of edge ideals of graphs and whose generators correspond to the facets of  $\Delta$ . The facet ideal of a simplicial complex was first introduced by Faridi. Let  $G$  be a simple graph. The edge ideal  $I(G)$  of graph  $G$  was first considered by R. Villarreal. He studied the algebraic properties of  $I(G)$  using a combinatorial language of  $G$ .

**Method:** In combinatorial commutative algebra, one can attach a monomial ideal to a combinatorial object. Then this ideal's algebraic properties are studied using the combinatorial properties of the combinatorial object. One of the interesting problems in combinatorial commutative algebra is the vertex decomposability of simplicial complexes, which many researchers study. In this abstract, we recall some definitions which will be needed later. A simplicial complex  $\Delta$  over a set of vertices  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  is a collection of subsets of  $V$ , with the property that  $\{x_i\} \in \Delta$ , for all  $i$  and if  $F \in \Delta$ , then all subsets of  $F$  are also in  $\Delta$  (including the empty set). An element in  $\Delta$  is called a face of  $\Delta$ . The dimension of a face  $F$  of  $\Delta$ ,  $\dim F$ , is  $|F| - 1$  where  $|F|$  is the number of elements of  $F$ . The maximal faces of  $\Delta$  under inclusion are called facets of  $\Delta$ . The dimension of the simplicial complex  $\Delta$ ,  $\dim \Delta$ , is the maximum of dimensions of its facets. If all facets of  $\Delta$  have the same dimension, then  $\Delta$  is called pure. Let  $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \dots, F_q\}$  be the facet set of  $\Delta$ . It is clear that  $\mathcal{F}(\Delta)$  determines  $\Delta$  completely and we write  $\Delta = \langle F_1, \dots, F_q \rangle$ .

**Results:** Let  $G$  be a simple graph, and  $\Delta_t(G)$  be a simplicial complex whose facets correspond to the paths of length  $t$  in  $G$  ( $t \geq 2$ ). We show that  $\Delta_t(C_n)$  is matroid, vertex decomposable, shellable, and Cohen-Macaulay if and only if  $n=t$  or  $n=t+1$ , where  $C_n$  is an  $n$ -cycle.

**Keywords:** Vertex decomposable, Matroid, Shellable, Cohen-Macaulay.



## تجزیه پذیری رأسی مجتمع‌های مسیری متناظر با گراف‌های دوری

دوره چهارم، پاییز ۱۴۰۲  
شماره سوم، صص: ۶۱-۵۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۲۴  
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۰۲

سیدمحمد آجدانی<sup>۱</sup>، کمال احمدی<sup>۲</sup>، اصغر مددی<sup>۳\*</sup>

۱. استادیار، گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران. [majdani2@yahoo.com](mailto:majdani2@yahoo.com)

۲. استادیار، گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران. [kamal.ahmadi.math@gmail.com](mailto:kamal.ahmadi.math@gmail.com)

۳. استادیار، گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران. (نویسنده مسئول) [amadadi2009@gmail.com](mailto:amadadi2009@gmail.com)

**چکیده:** تک‌جمله‌ای‌ها پل ارتباطی بین جبر جابجایی و ترکیبیات هستند. اگر  $\Delta$  یک مجتمع سادگی روی  $n$  رأس باشد آنگاه به دو صورت می‌توان به مجتمع سادگی  $\Delta$  ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای خالی از مربع نظیر کرد. یکی از این ایده‌آل‌ها، ایده‌آل استنلی-رایزنر  $I_\Delta$  می‌باشد که مولدهایش متناظر با ناوجه‌های  $\Delta$  هستند و دیگری ایده‌آل وجه‌واره‌ای  $I(\Delta)$  است که تعمیمی از ایده‌آل‌های یالی گراف‌ها است و مولدهایش متناظر با وجه‌واره‌های  $\Delta$  می‌باشند. در جبر جابجایی ترکیبیاتی با استفاده از خواص ترکیبیاتی مجتمع‌های سادگی، گراف‌ها، ابرگراف‌ها و ... به مطالعه خواص جبری ایده‌آل وابسته به این اشیا ترکیبیاتی می‌پردازند. یکی از مسائل جذاب در جبر جابجایی ترکیبیاتی که مورد مطالعه محققین زیادی قرار گرفته است، تجزیه‌پذیری رأسی مجتمع‌های سادگی است. فرض کنید  $G$  یک گراف ساده و  $\Delta_t(G)$  یک مجتمع سادگی با وجه‌واره‌های متناظر با مسیرهایی به طول  $t$  در گراف  $G$  باشد ( $t \geq 2$ ). همچنین فرض کنید  $C_n$  یک گراف دوری به طول  $n$  باشد. در این مقاله نشان داده می‌شود که  $\Delta_t(C_n)$  متروئید، تجزیه‌پذیر رأسی<sup>۲</sup>، پوسته‌پذیر<sup>۴</sup> و کوهن مکاولی است اگر و تنها اگر  $n = t$  یا  $n = t + 1$ .

**واژه‌های کلیدی:** تجزیه‌پذیر رأسی، متروئید، پوسته‌پذیر، کوهن مکاولی.

## ۱. مقدمه

فرض کنید  $G$  یک گراف ساده باشد. فاصله بین دو رأس  $x$  و  $y$  در  $G$  را با نماد  $d(x,y)$  نشان می‌دهند که طول کوتاهترین مسیر از  $x$  به  $y$  است. همچنین مجتمع مسیری  $\Delta_t(G)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta_t(G) = \langle \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\} : x_{i_1}, \dots, x_{i_t} \text{ is a path of length } t \text{ in } G \rangle$$

فرض کنید  $S = K[x_1, \dots, x_n]$  یک حلقه چندجمله‌ای و  $K$  یک میدان باشد. ایده‌ال مسیری  $I_t(G)$  در حلقه چندجمله‌ای  $S$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_t(G) = \langle x_{i_1}, \dots, x_{i_t} : x_{i_1}, \dots, x_{i_t} \text{ is a path of length } t \text{ in } G \rangle$$

اخیراً محققان زیادی روی مجتمع‌های مسیری متناظر با گراف‌ها کار کرده‌اند و نتایج زیادی را روی این مجتمع‌ها به دست آورده‌اند که یکی از این نتایج مربوط به ون توئل و جینگ هی می‌باشد که در [۱] نشان دادند اگر  $G$  یک درخت ریشه‌دار باشد آنگاه برای هر  $t \geq 2$  یک  $\Delta_t(G)$  درخت سادگی است. این مطلب انگیزه‌ای برای مطالعه خواص جبری مجتمع‌های مسیری متناظر با گراف‌های  $C_n$  و  $L_n$  ایجاد کرد. در ادامه این بخش، تعاریف و نتایجی را یادآوری می‌کنیم که بعداً به آن‌ها نیاز داریم.

**تعریف ۱-۱:** یک مجتمع سادگی  $\Delta$  روی مجموعه رئوس  $\{x_1, \dots, x_n\}$  یک گردایه از زیرمجموعه‌های  $\{x_1, \dots, x_n\}$  می‌باشد، مشروط بر اینکه هر گاه  $F \in \Delta$  باشد، آنگاه همه زیرمجموعه‌های  $F$  نیز متعلق به  $\Delta$  باشند.

هر عضو از  $\Delta$  را وجه می‌نامند. ماکزیمال وجه‌های  $\Delta$  تحت رابطه شمول را وجه‌واره می‌نامند. مجموعه همه وجه‌واره‌های  $\Delta$  را با نماد  $F(\Delta)$  نشان می‌دهند. بعد وجه  $F$  به صورت  $\dim F = |F| - 1$  تعریف می‌شود که  $|F|$  تعداد رئوس وجه  $F$  است. ماکزیمم بعد وجه‌واره‌های  $\Delta$  را بعد مجتمع سادگی می‌نامند.

هرگاه بعد همه وجه‌واره‌های  $\Delta$  یکسان باشد آنگاه مجتمع سادگی  $\Delta$  را خالص می‌نامند. مجتمع سادگی که تنها دارای یک وجه‌واره باشد را سادک می‌نامند. برای یک وجه  $F$  در  $\Delta$ ،  $link_{\Delta} F$  و  $\Delta \setminus F$  به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$link_{\Delta} F = \{G \in \Delta : F \cap G = \emptyset, F \cup G \in \Delta\}$$

9

$$\Delta \setminus F = \{G \in \Delta : F \not\subseteq G\}$$

ایده‌ال استنلی رایزنر از یک مجتمع سادگی  $\Delta$  روی مجموعه رئوس  $\{x_1, \dots, x_n\}$  را با نماد  $I_{\Delta}$  نشان داده و  $I_{\Delta}$  ایده‌ال تک‌جمله‌ای خالی از مربع است که مولدهایش متناظر با ناوجه‌های  $\Delta$  است.

ایده‌ال وجه‌واره‌ای از  $\Delta$  را با نماد  $I(\Delta)$  نشان می‌دهند و  $I(\Delta)$  ایده‌ال تک‌جمله‌ای خالی از مربع است که به وسیله تک‌جمله‌ای‌های

$$\Delta^{\vee} = \{F^C : F \notin \Delta\}$$

به آسانی می‌توان دید  $(\Delta^{\vee})^{\vee} = \Delta$ .

**لم ۱-۲.** فرض کنید  $\Delta$  یک مجتمع سادگی باشد. آنگاه:

$$I_{\Delta^{\vee}} = I(\Delta^C)$$

اثبات: از آنجا که

$$(\Delta^{\vee})^{\vee} = \Delta$$

لذا

$$\Delta = \{F^C : F \notin \Delta^{\vee}\}$$

تک‌جمله‌ای  $x_F$  متعلق به  $I_{\Delta^{\vee}}$  است اگر تنها اگر یک مینیمال ناوجه از  $\Delta^{\vee}$  باشد و این معادل این است که بگوییم  $F^C$  یک ماکزیمال وجه از  $\Delta$  است.

**تعریف ۱-۳.** مجتمع سادگی  $\Delta$  روی مجموعه رئوس  $\{x_1, \dots, x_n\}$  را متروئید نامند هرگاه برای هر دو وجه‌واره  $F$  و  $G$  از  $\Delta$  و هر  $x_i \in F$  عنصر  $x_j \in G$  وجود داشته باشد به طوری که  $(F \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\}$  یک وجه‌واره از  $\Delta$  باشد.

**تعریف ۱-۴.** مجتمع سادگی  $\Delta$  روی مجموعه رئوس  $\{x_1, \dots, x_n\}$  تجزیه‌پذیر رأسی است هرگاه  $\Delta$  یک سادک باشد یا رأسی مانند  $v$  وجود داشته باشد به طوری که  $\Delta \setminus v$  و  $link_{\Delta} v$  هر دو تجزیه‌پذیر رأسی باشند و هیچ وجه از  $link_{\Delta} v$  یک وجه‌واره از  $\Delta \setminus v$  نباشد.

**تعریف ۱-۵.** مجتمع سادگی  $\Delta$  پوسته‌پذیر است هرگاه وجه‌واره‌های آن بتوانند به صورت  $F_1, \dots, F_r$  مرتب شوند و برای هر  $1 \leq i < j \leq r$  وجود داشته باشد  $v \in F_j \setminus F_i$  و  $L \in \{1, \dots, j-1\}$  به طوری که  $F_j \setminus F_L = \{v\}$ .

به‌عنوان یکی از نتایج شناخته شده می‌توان به این نتیجه اشاره کرد: مجتمع سادگی متروئید  $\leftarrow$  تجزیه‌پذیر رأسی  $\leftarrow$  پوسته‌پذیر  $\leftarrow$  کوهن مکاولی

**تبصره ۱-۶.** فرض کنید  $I \neq 0$  یک ایده‌ال همگن از حلقه چندجمله‌ای  $S = K[x_1, \dots, x_n]$  باشد. همچنین فرض کنید  $\square$  مجموعه اعداد طبیعی باشد. برای هر  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  تعریف زیر را داریم:

$$t_i^s(I) = \max \{j : B_{i,j}^s(I) \neq \emptyset\}$$

و  $B_{i,j}^s(I) \neq \emptyset$  - امین عدد بتی مدرج ایده‌ال  $I$  (به‌عنوان  $S$  مدول) است.

عدد نظم کاستلنوو-مامفورد<sup>۵</sup> ایده‌ال  $I$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

(1) بعد پروژکتیو ایدهال های مسیری متناظر به گراف های  $C_n$  و  $L_n$  به صورت زیر است.

اگر  $d \neq 0$  آنگاه  $pd(I_t(C_n)) = 2p$  در غیر این صورت

$$pd(I_t(C_n)) = 2p - 1$$

اگر  $d \neq t$  آنگاه  $pd(I_t(L_n)) = 2p - 1$  در غیر این صورت

$$pd(I_t(L_n)) = 2p$$

(2) عدد نظم ایدهال های مسیری متناظر به گراف های  $C_n$  و  $L_n$  به صورت زیر است:

$$reg(I_t(C_n)) = (t-1)p + d + 1$$

اگر  $d = t$  آنگاه  $reg(I_t(L_n)) = p(t-1) + t$  و اگر  $d < t$

$$reg(I_t(L_n)) = p(t-1) + 1$$

نتیجه اصلی که در این بخش ثابت خواهد شد این است که مجتمع

سادگی مسیری  $\Delta_t(C_n)$  تجزیه پذیر رأسی است اگر و تنها اگر  $n = t$  یا  $n = t + 1$ . برای اثبات این نتیجه به لم ها و گزاره های زیر نیاز داریم.

**لم ۲-۲.** فرض کنید  $\Delta_t(L_n)$  یک مجتمع سادگی روی رؤس  $\{x_1, \dots, x_n\}$  و  $2 \leq t \leq n$ . آنگاه  $\Delta_t(L_n)$  تجزیه پذیر رأسی است.

**اثبات:** اگر  $t = n$ ، آنگاه  $\Delta_t(L_n)$  یک مجتمع سادگی است که تجزیه پذیر رأسی است.

فرض کنید  $2 \leq t < n$ ، آنگاه داریم:

$$\Delta_t(L_n) = \langle \{x_1, \dots, x_t\}, \{x_2, \dots, x_{t+1}\}, \dots, \{x_{n-t+1}, \dots, x_n\} \rangle$$

پس:

$$\Delta_t(L_n) \setminus x_n = \langle \{x_1, \dots, x_t\}, \{x_2, \dots, x_{t+1}\}, \dots, \{x_{n-t}, \dots, x_{n-1}\} \rangle$$

اکنون با استفاده از استقراء روی تعداد رؤس  $L_n$  اثبات را کامل می کنیم. بنابر فرض استقراء  $\Delta_t(L_n) \setminus x_n$  تجزیه پذیر رأسی است. از طرفی دیگر

$$link_{\Delta_t(L_n)} \{x_n\} = \langle \{x_{n-t+1}, \dots, x_{n-1}\} \rangle$$

یک مجتمع سادگی است که تجزیه پذیر رأسی است. به آسانی می توان دید که هیچ وجه از  $link_{\Delta_t(L_n)} \{x_n\}$  یک وجهواره از  $\Delta_t(L_n) \setminus x_n$  نیست. بنابراین  $\Delta_t(L_n)$  تجزیه پذیر رأسی است.

**لم ۲-۳.** فرض کنید  $\Delta_2(C_n)$  یک مجتمع سادگی روی رؤس  $\{x_1, \dots, x_n\}$  باشد. آنگاه  $\Delta_2(C_n)$  تجزیه پذیر رأسی است.

**اثبات:** از آنجا که

$$\Delta_2(C_n) = \langle \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_n, x_1\} \rangle$$

$$reg(I) = \sup \{t_i^s(I) - i : i \in \square\}$$

ایدهال  $I$  یک تحلیل  $d$  خطی دارد هرگاه  $I$  به وسیله چند جمله ای های همگن از درجه  $d$  تولید شود و برای هر  $i \geq 0$  و  $i + d \neq j$  داشته باشیم  $\beta_{i,j}^s(I) = 0$ . عدد نظم کاستلنوو - مامفورد ایدهال  $I$  که تحلیل  $d$  خطی دارد برابر با  $d$  است.

فرض کنید  $I$  یک ایدهال مدرج از  $S$  باشد. ایدهال تولید شده به وسیله همه چند جمله ای های همگن از درجه  $d$  متعلق به  $I$  را با نماد  $(I_d)$  نشان می دهند.

**تعریف ۱-۷.** ایدهال مدرج  $I$  مؤلفه ای خطی  $\vee$  است هرگاه مدار برای هر  $d$ ،  $(I_d)$  یک تحلیل خطی داشته باشد.

**تعریف ۱-۸.** مدول مدرج  $M$  به عنوان  $S$  - مدول را دنبا لهای کوهن مکاولی می نامند هرگاه یک فیلتر متناهی از  $S$  - مدول های مدرج

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_r = M$$

وجود داشته باشد به طوری که هر  $M_i/M_{i-1}$  کوهن مکاولی و بعد کرول مدول های خارج قسمتی افزایشی باشد.

$$\dim\left(\frac{M_1}{M_0}\right) < \dim\left(\frac{M_2}{M_1}\right) < \dots < \dim\left(\frac{M_r}{M_{r-1}}\right)$$

فرض کنید

$$I = (x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}, \dots, x_{t,1}, \dots, x_{t,s_t})$$

یک ایدهال تک جمله ای خالی از مربع در  $S$  باشد. الکساندر دوگان ایدهال  $I$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$I^\vee = (x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}) \cap \dots \cap (x_{t,1}, \dots, x_{t,s_t})$$

هرزگ و هیبی در [۲] قضیه زیر را ثابت کردند:

**قضیه ۱-۹.** فرض کنید  $I$  یک ایدهال تک جمله ای خالی از مربع در  $S$  باشد.

(i) ایدهال  $I$  به طور مؤلفه ای خطی است اگر و تنها اگر  $S/I^\vee$

دنباله ای کوهن مکاولی باشد.

(ii) ایدهال  $I$  تحلیل  $q$  - خطی دارد اگر و تنها اگر  $S/I^\vee$

کوهن مکاولی از بعد  $n - q$  باشد.

**۲. تجزیه پذیری رأسی مجتمع سادگی متناظر با گراف  $C_n$**

فریدی و علی لویی در [۳] اعداد بتی  $I_t(C_n)$  و  $I_t(L_n)$  را محاسبه کردند. به ویژه در قضیه زیر نشان دادند:

**قضیه ۲-۱.** فرض کنید  $d, p, t, n$  اعدادی صحیح باشند به طوری که:

$$0 \leq d < t + 1, P \geq 0, n = (t + 1)p + d, 2 \leq t \leq n$$

آنگاه:

بنابراین

$$\Delta_2(C_n) \setminus x_n = \langle \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{n-2}, x_{n-1}\} \rangle$$

حال بنابر لم ۲-۲،  $\Delta_2(C_n) \setminus \{x_n\}$  تجزیه پذیر راسی است. از طرفی دیگر، مجتمع سادگی

$$link_{\Delta_2(C_n)}\{x_n\} = \langle \{x_{n-1}\}, \{x_1\} \rangle$$

تجزیه پذیر راسی است و هیچ وجه از  $link_{\Delta_2(C_n)}\{x_n\}$  یک وجهواره از  $\Delta_2(C_n) \setminus x_n$  نیست و بنابراین  $\Delta_2(C_n)$  تجزیه پذیر راسی است.

برای مثال مجتمع سادگی

$$\Delta_2(C_5) = \langle \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_5, x_1\} \rangle$$

روی رئوس  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  را در نظر بگیرید. با استفاده از نرم افزار مکالی<sup>۲۲</sup> که در شکل ۱ آمده است، مشاهده می شود که مجتمع سادگی  $\Delta_2(C_5)$  تجزیه پذیر راسی است.

لم ۲-۴. فرض کنید  $\Delta_t(C_n)$  یک مجتمع سادگی روی رئوس

$\{x_1, \dots, x_n\}$  و  $3 \leq t \leq n-2$  باشد آنگاه  $\Delta_t(C_n)$  کوهن مکاولی نیست.

اثبات: کفایت نشان دهیم برای هر  $3 \leq t \leq n-2$ ،  $I_{\Delta_t(C_n)}^\vee$  تحلیل خطی ندارد. بنابر لم ۱-۲ می دانیم

$$I_{\Delta_t(C_n)}^\vee = I(\Delta_t(C_n))^c$$

و بنا بر قضیه ۱-۲

$$reg(I_{\Delta_t(C_n)}^\vee) = (n-t-1)p + d + 1$$

بنابراین برای هر  $3 \leq t < n-2$ ،  $reg(I_{\Delta_t(C_n)}^\vee) \neq n-t$  و بنا بر قضیه ۱-۹،  $\Delta_t(C_n)$  کوهن مکاولی نیست.

گزاره ۲-۵. فرض کنید  $\Delta_t(C_n)$  یک مجتمع سادگی روی

رئوس  $\{x_1, \dots, x_n\}$  باشد به طوری که  $t \geq 3$  آنگاه  $\Delta_t(C_n)$  تجزیه پذیر راسی است اگر و تنها اگر  $n = t$  یا  $n = t+1$ .

اثبات: بنا بر لم ۲-۴ کافی است نشان دهیم که اگر  $n = t$  یا  $n = t+1$  آنگاه  $\Delta_t(C_n)$  تجزیه پذیر راسی است.

اگر  $n = t$  آنگاه  $\Delta_t(C_n)$  یک مجتمع سادگی است که تجزیه پذیر راسی است. اگر  $t = n-1$  آنگاه

$$\Delta_{n-1}(C_n) = \langle \{x_1, \dots, x_{n-1}\}, \{x_2, \dots, x_n\}, \{x_3, \dots, x_n, x_1\}, \dots, \{x_n, x_1, \dots, x_{n-2}\} \rangle$$

اکنون با استفاده از استقراء روی تعداد رئوس  $C_n$ ، نشان می دهیم که  $\Delta_{n-1}(C_n)$  تجزیه پذیر راسی است. با توجه به وجهواره های

$$\Delta_{n-1}(C_n)$$

$$\Delta_{n-1}(C_n) \setminus x_n = \langle \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \rangle$$

یک مجتمع سادگی است که تجزیه پذیر راسی است. از طرفی دیگر

$$link_{\Delta_{n-1}(C_n)}\{x_n\} = \langle \{x_1, \dots, x_{n-2}\}, \dots, \{x_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-3}\} \rangle \\ = \Delta_{n-2}(C_{n-1})$$

بنابر فرض استقراء  $link_{\Delta_{n-1}(C_n)}\{x_n\}$  تجزیه پذیر راسی است. به آسانی می توان دید که هیچ وجه از  $link_{\Delta_{n-1}(C_n)}\{x_n\}$  یک وجهواره از  $\Delta_{n-1}(C_n) \setminus x_n$  نیست. بنابراین  $\Delta_{n-1}(C_n)$  تجزیه پذیر راسی است. برای مثال مجتمع سادگی

$$\Delta_3(C_4) = \langle \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_3, x_4, x_1\}, \{x_4, x_1, x_2\} \rangle$$

روی رئوس  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  را در نظر بگیرید. با استفاده از نرم افزار مکالی<sup>۲۲</sup> که در شکل ۱ آمده است، مشاهده می شود که مجتمع سادگی  $\Delta_3(C_4)$  تجزیه پذیر راسی است.

۳. شرایط معادل متروئید بودن و تجزیه پذیر راسی روی

مجتمع مسیر متناظر با گراف  $C_n$

به عنوان نتیجه اصلی این بخش نشان داده می شود که مجتمع مسیری  $\Delta_t(C_n)$  متروئید، تجزیه پذیر راسی، کوهن مکاولی است اگر و تنها اگر  $n = t$  یا  $n = t+1$ .

گزاره ۳-۱. مجتمع سادگی  $\Delta_2(C_n)$  متروئید است اگر و تنها اگر  $n = 3$  یا  $n = 4$ .

اثبات: اگر  $n = 3$  یا  $n = 4$  آنگاه واضح است که  $\Delta_2(C_n)$  یک متروئید است. اکنون ثابت می کنیم که برای هر  $n \geq 5$ ،  $\Delta_2(C_n)$  متروئید نیست. کفایت دو وجهواره  $\{x_1, x_2\}$  و  $\{x_{n-1}, x_n\}$  را در نظر بگیریم. آنگاه:

$$(\{x_1, x_2\} \setminus \{x_1\}) \cup \{x_{n-1}\} = \{x_2, x_{n-1}\}$$

و

$$(\{x_1, x_2\} \setminus \{x_1\}) \cup \{x_n\} = \{x_2, x_n\}$$

از آنجا که  $\{x_2, x_{n-1}\}$  و  $\{x_2, x_n\}$  وجهواره های  $\Delta_2(C_n)$  نیستند، نتیجه می شود  $\Delta_2(C_n)$  متروئید نیست.

اکنون آماده هستیم قضیه اصلی این مقاله را ثابت کنیم.

قضیه ۳-۲. فرض کنید  $t \geq 3$ ، آنگاه شرایط زیر معادلند:

$$(i) \quad \Delta_t(C_n) \text{ متروئید است.}$$

$$(ii) \quad \Delta_t(C_n) \text{ تجزیه پذیر راسی است.}$$

$$(iii) \quad \Delta_t(C_n) \text{ پوسته پذیر است.}$$

$$(iv) \quad \Delta_t(C_n) \text{ کوهن مکاولی است.}$$

$$(v) \quad n = t \text{ یا } n = t+1$$

اثبات: (i)  $\leftarrow$  (ii), (ii)  $\leftarrow$  (iii), (iii)  $\leftarrow$  (iv) نتایج

شناخته شده می باشند.

بنابر لم ۲-۴ و گزاره ۲-۵،  $(iv)$  به  $(v)$  نتیجه می‌شود. اگر  $n = t$  آنگاه  $\Delta_t(C_n)$  یک مجتمع سادگی است که متروئید می‌باشد. اگر  $n = t + 1$  آنگاه

$$\Delta_t(C_n) = \langle \{x_1, \dots, x_t\}, \{x_2, \dots, x_{t+1}\}, \{x_3, \dots, x_{t+1}, x_1\}, \dots, \{x_{t+1}, x_1, \dots, x_{t-1}\} \rangle$$

با توجه به وجه‌واره‌های  $\Delta_t(C_n)$  برای هر دو وجه‌واره  $F$  و  $G$  از  $|F \cap G| = t - 1$ ،  $\Delta_t(C_n)$

ادعا می‌کنیم که برای هر دو وجه‌واره  $F$  و  $G$  از  $\Delta_t(C_n)$  و هر

$x_i \in F$ ، یک عضو  $x_j \in G$  وجود دارد به طوری که

$(F \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\}$  یک وجه‌واره از  $\Delta_t(C_n)$  باشد. باید دو

حالت را در نظر بگیریم. اگر  $x_i \in F$  و  $x_i \notin G$  آنگاه عضو

$x_j \in G$  را انتخاب می‌کنیم به طوری که  $x_j \notin F$ . بنابراین

$(F \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\} = G$  یک وجه‌واره از  $\Delta_t(C_n)$  است. اگر

$x_i \in F$ ،  $x_i \in G$  آنگاه عضو  $x_j \in G$  را انتخاب می‌کنیم به-

طوری که  $x_j$  همان  $x_i$  است. پس  $(F \setminus \{x_i\}) \cup \{x_i\} = F$

یک وجه‌واره از  $\Delta_t(C_n)$  است.

### سپاسگزاری

نویسندگان این مقاله از هم‌فکری داوران محترم و اعضای هیئت

تحریریه مجله سامانه‌های پردازشی و چندرسانه‌ای هوشمند دانشگاه

آزاد اسلامی واحد زنجان کمال سپاسگزاری را دارند.

```

i1 : loadPackage"SimplicialDecomposability"
o2 = SimplicialDecomposability
o2 : Package
i2 : S=QQ[x_1..x_5]
o3 = S
o3 : PolynomialRing
i3 :
D1=simplicialComplex{face{x_1,x_2},face{x_2,x_3},face{x_3,x_4},face{x_4,x_5},face{x_1,x_5}}
o4 = | x_4x_5 x_1x_5 x_3x_4 x_2x_3 x_1x_2 |
o4 : SimplicialComplex
i4 : isVertexDecomposable D1
o5 = true
i5 :
D2=simplicialComplex{face{x_1,x_2,x_3},face{x_2,x_3,x_4},face{x_1,x_3,x_4},face{x_1,x_2,x_4}}
o6 = | x_2x_3x_4 x_1x_3x_4 x_1x_2x_4 x_1x_2x_3 |
o6 : SimplicialComplex
i6 : isVertexDecomposable D2
o7 = true
i7 :

```

شکل ۱: تجزیه پذیری راسی مجتمع‌های سادگی  $\Delta_2(C_5)$  و  $\Delta_3(C_4)$  با استفاده از نرم‌افزار مکالی ۲

## References

- [1] J. He and A. Van Tuyl, "Algebraic properties of the path ideals of a tree", *Comm. Algebra*. 38 (2010), 1725-1742.
- [2] J. Herzog and T. Hibi, "Component wise linear ideals", *Nagoya Math J.* 153 (1999), 141-153.
- [3] A. Aliloei and S. Faridi, "Betti numbers of the path ideals of cycles and lines", *Pre Print* (2011).

## پی‌نوشت

Non-faces	.۱
Facet ideal	.۲
Vertex decomposable	.۳
Shellable	.۴
Castelnuovo- Mumford regularity	.۵
Resolution	.۶
Component wise linear	.۷
Macaulay2	.۸