فصلنامه مدیریت راهبردی در سیستم های صنعتی ( مدیریت صنعتی سابق)
دانشگاه آزاد اسلامی واحد سنندج
سال نوزدهم/ شماره ۶۸/ تابستان ۱۴۰۳

# بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از مدل مارکویتز و برنامه‌ریزی چندهدفه فازی (مطالعه موردی: بورس و اوراق بهادار تهران)

**شادی کنعانی**
گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه غیرانتفاعی الغدیر، تبریز، ایران
**مهدی یوسفی‌نژاد عطاری** (نویسنده مسؤول)
گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بناب، بناب، ایران
E-mail: mahdi_108108@yahoo.com
**زهره خلیل پور شیراز**
گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بناب، بناب، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۳۰ * تاریخ پذیرش ۱۴۰۲/۰۸/۱۳

## چکیده
مدل بهینه‌سازی سبد سهام بر این اساس می‌باشد که آینده شرکت قابل پیش‌بینی و تخمین زدن با استفاده از داده‌های گذشته شرکت است. با این حال هیچ تضمینی در صحت این داده‌ها وجود ندارد، چون در بازارهای مالی نوسانات زیادی وجود دارد. الگوی مارکوویتز در تعیین سهم هریک از سهام در سبد دارایی، برمبنای انتخاب بهینه سهام برای حداکثر نمودن درآمد انتظاری سبد استوار است. از یک طرف، این الگو امید ریاضی ارزش هر سهم را در الگو وارد می‌نماید. ازطرف دیگر، این مدل کوواریانس نوسانات ارزشی سهام را ثابت و برونزا در نظر می‌گیرد. لذا در این پژوهش از طریق نظریه مارکوویتز، با پیشنهاد مدلی جدید الگوی جامع‌تری معرفی شده است که نسبت به مرز سنتی مارکوویتز کاراتر است. در این پژوهش در مورد مسئله بهینه‌سازی سهام ابتدا از برنامه‌ریزی چندهدفه استفاده شد و سپس برنامه‌ریزی فازی به آن اضافه شده است. مدل انحراف استاندارد ریسک و نظریه توسعه زاده از جمله روش‌های حل مسئله بهینه‌سازی سهام در حالت فازی هستند. همچنین برای حل مسئله مورد نظر از روش برنامه‌ریزی ریاضی جهت محاسبه حدود بالا و پایین سهم برگشتی استفاده شد. سرانجام با تشریح مسئله و مدلسازی آن در نرم افزار گمز یک مثال از بورس و اوراق بهادار تهران مورد بررسی قرار گرفته است که کلیه مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را در حالت فازی تشریح می‌کند. نتایج تحقیق نشان داد که ریسک یا انحراف معیار بازده‌ها بیشترین تأثیر را در بازده سبد سهام دارند. از این رو به سرمایه گذاران پیشنهاد می‌شود که تغییرات ریسک را برای دستیابی به بازدهی بیشتر مد نظر قرار دهند.

**کلمات کلیدی:** برنامه‌ریزی فازی، بهینه‌سازی، سبد سهام، مدل زیمرمن، مدل مارکویتز.

## ۱- مقدمه

وجود یک بازار سرمایه پُررونق به عنوان یکی از نشانه‌های توسعه یافتگی کشورها مـی‌باشـد. در کشـورهای توسـعه یافتـه اکثـر سرمایه‌گذاری‌ها از طریق بازارهای مالی انجام می‌گیرد و مشارکت فعال افراد جامعه در بورس تضمین کننده حیات بازار سـرمایه و توسعه پایدار کشورهاست. مسئله انتخاب سبد سـرمایه‌گـذاری یکـی از حـوزه‌هـای مهـم در اقتصـاد و مسـائل مـالی مـی‌باشـد. سرمایه‌گذاران در بخش‌های مالی به دنبال کسب بیشترین مقدار سود و متحمل شدن کمترین مقدار ریسک در سرمایه‌گذاری‌شان هستند. از این رو بهینه‌سازی سبد سهام به عنوان یک امر بسیار حیاتی در سرمایه‌گذاری نمایان شده است و مسئله انتخـاب سـبد سرمایه با بهینه‌سازی بازده و ریسک به طور همزمان محقّق می‌شود (Liagkouras & Metaxiotis, 2014). وجود عوامـل گوناگونی که قیمت سهام شرکت‌های مختلف را تحت تأثیر خود قرار می‌دهد و از طرفی عدم توانـایی مـدل‌هـای ریاضـی بـرای مدنظر قرار دادن همه این عوامل و پیش‌بینی دقیق و بدون خطای این قیمت‌ها برای دوره‌های پیش‌رو، محقّقان را بر این داشـته که با ارائه مدل‌هایی که کمترین میزان حساسیت را نسبت به پارامترهای ورودی از خـود نشـان مـی‌دهنـد بتواننـد بـه مـدیریت سبدهای سهام بپردازند. بازده و ریسک دو عامل اساسی در انتخاب سبد سهام به شمار می‌روند و بـه صـورت دو هـدف مشـترک استفاده می‌شوند. اما تنها بازده و ریسک نمی‌توانند تصمیم‌گیری لازم در سرمایه‌گذاری را ارائه کنند بلکـه پارامترهـای زیـادی در این زمینه تأثیرگذارند (Feldt, 2015). عدم قطعیت پارامترها یک اصل جدایی‌ناپذیر در تصمیم‌گیری‌های مالی به ویژه انتخـاب یک سبد سرمایه‌گذاری است. چرا که تأثیر بسیار بسزایی روی جواب نهایی مسئله دارد در صورتی که این پارامترهـا بـه درسـتی تخمین زده نشوند چه بسا جواب نهایی حاصل از حل مسئله قابلیت پیاده‌سازی را نداشته و در محدوده امکـان‌پـذیر مسـئله قـرار نگیرد. بر این اساس روش‌های قضاوتی برای غالب شدن بر این مشکل ارائه شده است که از جمله می‌توان برنامه‌ریزی احتمالی، برنامه‌ریزی پویا، روش‌های فازی و... را نام برد (Marzban, 2012). استفاده از منطـق فـازی در مسـائل بهینـه‌سـازی تحـت شرایط عدم قطعیت حائز اهمیت است. در این گونه مسائل چون نرخ بازگشت سود کاملاً مشـخص نمـی‌شـود و تغییراتـی دارد و برای هر سبد با گذشت زمان تغییر می‌کند، در نتیجه برنامه‌ریزی فازی می‌تواند در مورد عدم قطعیت و یا ابهام مسائل با توجه به مفهوم فازی کمک شایانی به حل و تشریح این مسائل کند. حالت توسعه یافته بهینه‌سازی فازی با ترکیب اهداف فازی و فضـای تصمیم‌گیری فازی ارائه شده است (Zadeh, 1978). مسئله‌ای که هدف این مطالعه قرار گرفته است ارائه مدلی برای مـدیریت سبد سهام در محیط کاملاً غیر قابل پیش‌بینی بورس است. با توجه به اینکـه عوامـل بسـیاری روی قیمـت سـهام شـرکت‌هـای مختلف تأثیرگذار هستند ارائه مدلی که بتواند تأثیر منفی عدم قطعیت موجود در پارامترهایی را که یک سرمایه گـذار، بـه عنـوان شخص تصمیم‌گیرنده در این محیط با آن‌ها روبرو است روی انتخاب صحیح سهام برای سرمایه‌گذاری را تاحد امکان کاهش دهد از اهمیت بسیاری برخوردار است (Marzban, 2012).

مسئله مدلسازی سبد سرمایه‌گذاری بهینه با این فرض بررسی می‌شود که یک سرمایه‌گذار بودجه اولیه‌ای دارد و قصـد دارد یـک سبد سرمایه‌گذاری از دارایی‌های ریسکی تشکیل دهد و معمولاً هدف این است که سود را حداکثر و یا ریسک را حداقل کنـد. در زمینه برنامه‌ریزی سبد سهام تحقیقات گسترده‌ای توسط افراد زیادی انجام گرفته است امـا مـدل مـارکوویتز بـه عنـوان یکـی از رایج‌ترین و پرکاربردترین مدل‌ها در بهینه‌سازی سبد سهام می‌باشد. مارکوویتز کاربرد بهینه‌سازی را در مسائل مـالی توسـعه داده است و تئوری سبد سرمایه‌گذاری را به صورت مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک تعریـف و اصـول تنـوع بخشـی را در انتخـاب سـبد سرمایه‌گذاری فرموله کرده است (Karimiyan & Aedzadeh, 2012). از آن به بعد تکنیک‌های برنامه‌ریـزی ریاضـی بـه ابزاری ضروری در تصمیم‌گیری‌های مالی تبدیل شده‌اند. در این پژوهش، یک مدل کاربردی برای بهینه‌سازی سـبد سـهام ارائـه می‌شود که به دو عامل افزایش بازده و کاهش ریسک تواماً توجّه دارد. از این رو مسئله سبد سهام به یک مسئله چند هدفه تبدیل می‌شود. سپس رویکرد فازی برای برخورد با عدم قطعیت بازده سرمایه سهام به کار گرفته می‌شود. با مدل‌های بهینه‌سـازی سـبد سهام می‌توان شرایط آینده بازار سهام را پیش‌بینی کرد (Sun et al., 2011). با توجه به اینکه سرمایه‌گذاری بهینه عـلاوه بـر اینکه باعث افزایش ثروت سهامداران می‌شود در دیدگاه کلان باعث رشد اقتصادی هر کشور نیز می‌گردد. اسـتفاده از مـدل‌هـای ریاضی می‌تواند بازده سرمایه‌گذار را بیشتر کند و همچنین منجر به تخصیص بهینه سرمایه شـود (Afshar Kazemi et al., 2014). درکشورهای پیشرفته بخش عمده‌ای از سرمایه‌گذاری‌ها از طریق بازارهای مالی (بورس‌ها) انجام مـی‌پـذیرد. انتخـاب و

گزینش سهام شرکت‌های حاضر در بورس اوراق بهادار و تشکیل سبد سهام بهینه بستگی به عوامل متعددی دارد که تصمیم‌گیری را برای تحلیل‌گران و کارشناسان پیچیده می‌نماید. می‌توان با استفاده از برنامه‌ریزی چند هدفه، یک برنامه‌ریزی ریاضی مدلسازی کرد تا سبد سرمایه‌گذاری بهینه را براساس ترجیهات تصمیم‌گیرنده انتخاب نمود (Karimiyan & Aedzadeh, 2012). با توجّه به اینکه عدم قطعیت در شرایط اقتصادی آینده نقش کلیدی را در تصمیم‌گیری‌های مالی به ویژه مسائل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری ایفا می‌کند باید تکنیک‌های بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را در کنار تکنیک‌های برنامه‌ریزی تصادفی مطالعه نمود. همچنین سرمایه‌گذار در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری معمولاً به بیش از چندین هدف توجه می‌نماید و لازم است که ترجیهات تصمیم‌گیرنده در مسئله بهینه‌سازی وارد گردد (Khalili Araghi, 2006). مدل بهینه‌سازی سهام براساس این فرضیه است که موقعیت آینده شرکت قابل پیش‌بینی و تخمین زدن با استفاده از داده‌های گذشته شرکت است. با این حال هیچ تضمینی در صحت این داده وجود ندارد، چون در بازار های مالی نوسانات زیادی وجود دارد (Sun et al., 2011).

تفاوت این پژوهش با مطالعات صورت گرفته قبلی در این است که در این مطالعه بهینه‌سازی سبد سهام با در نظر گرفتن شرایط عدم قطعیت برای بازگشت سرمایه است. همچنین از روش زیمرمن برای حل مسئله چندهدفه استفاده شده است. در صورتیکه در مطالعات دیگر این بحث مطرح نشده است یا روش حل به طور دیگر مطرح شده است.

ابزری و همکاران (۲۰۰۵) در پژوهشی با عنوان کاربرد مدل فرآیند تحلیل سلسله مراتبی در تعیین معیارهای مؤثر بر انتخاب سهام در بورس اوراق بهادار تهران، معیار های مؤثر بر انتخاب سهام را با استفاده از روش تحلیل سلسله مراتبی اولویت‌بندی نمودند. به عقیده آنان نحوه انتخاب سهام در بورس اوراق بهادار، یکی از مسائل مهم سرمایه‌گذاران در این گونه بازارهاست. اگر سرمایه‌گذار در انتخاب سهام بطور منطقی تصمیم‌گیری نماید، می‌تواند به بازدهی بیش از بازدهی بازار دست یابد.

خلیلی عراقی (۲۰۰۶) در پژوهشی سعی کرده است جهت انتخاب بهینه سهام از برنامه‌ریزی آرمانی که یکی از مدل‌های تصمیم‌گیری چند معیاره است، مدد گرفته شود. به منظور انتخاب بهینه از میان شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران براساس معیارهایی که اهم آن نقدشوندگی سهام شرکت است، چند شرکت انتخاب و اطلاعات مورد نیاز مربوط به هر سهم محاسبه شد. سپس با توجه به داده‌ها و آرمان‌های سرمایه گذار، با استفاده از مدل برنامه‌ریزی آرمانی موجبات کمک به اتخاذ تصمیم فراهم گردید.

خالوزاده و امیری (۲۰۰۶) با استفاده از الگوریتم ژنتیک و با تکیه بر معیار ارزش در معرض خطر، به عنوان معیار ریسک سبد، شبیه‌سازی برای سبد سهامی متشکل از ۱۲ شرکت مختلف دربازار بورس اوراق بهادار تهران انجام شد. نتایج بیانگر کارایی مدل پیشنهادی در تعیین وزن بهینه سبد سرمایه‌گذاری سهام بود.

چهارسوقی و همکاران (۲۰۰۷) در پژوهشی مدلی برای انتخاب سبد سهام در بازار بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از روش رتبه‌بندی و تصمیم‌گیری چند معیاری ارائه شد که نتایج آن‌ها بیانگر متفاوت بودن رتبه‌بندی صنایع، سپس انتخاب سبد بهینه سهام با راهبردهای سرمایه گذاری مختلف می‌باشد لذا در تعیین صنایع برتر و انتخاب سبد سرمایه‌گذاری باید دقت بیشتری کرد.

راعی و علی بیکی (۲۰۱۰) با استفاده از روش حرکت تجمعی ذرات به بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری پرداختند. آن‌ها مرز کارایی سرمایه‌گذاری را برای ۲۰ سهم پذیرفته شده در بازار بورس اوراق بهادار تهران تخمین زدند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان داد روش پیشنهادی در بهینه‌سازی سبد سهام روشی کارا است.

تاپار و همکاران (۲۰۱۲) با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای حل مسائل بهینه‌سازی چند هدفه از روابط استفاده کردند.

ژو و همکاران (۲۰۱۵) تکنیک‌های سری زمانی فازی را به عنوان یک روش مناسب و کارا در زمینه داده‌های مالی معرفی کردند و نتایج حاصل از تحقیق آن‌ها نشان دهنده کارایی مدل پیشنهادی بود.

کوتینیس (۲۰۱۴) یک مدل چند هدفه از الگوریتم بهینه سازی تکامل فازی که شامل سازگاری فازی از پارامترها می‌باشد را توسعه داد.

صباحی و همکاران (۲۰۲۰) در پژوهشی بهینه‌سازی سبد سهام را با دارایی‌های متنوع انجام دادنـد. در واقـع یکـی از مهـم‌تـرین دغدغه‌های همیشگی سرمایه‌گذاران انتخاب بهترین فرصت‌های سرمایه‌گذاری با بیشترین ارزش سرمایه‌گذاری است و با توجه به گزینه‌های مختلف برای سرمایه‌گذاری، تنوع بخشی در سبد سرمایه‌گذاری یک استراتژی مفید و مطرح در مباحث سرمایه‌گـذاری می‌باشد. اما استراتژی سرمایه‌گذاری در بین دارایی‌های مختلف نظیر بورس اوراق بهادار، طـلا، ارز و رمـز ارز نامشـخص بـوده و معلوم نیست که علیرغم رکود و رونق موقت برخی از دارایی‌ها (همانند بـورس و طـلا) و همچنـین تـأثیرات آن‌هـا بـر یکـدیگر، اولویـت‌بنـدی سـرمایه‌گـذاری (بـه لحـاظ ریسـک و بـازده) بـین دارایـی‌هـای فـوق چگونـه تخصـیص یابـد. هدف از انجام این تحقیق، پیشنهاد اوزان بهینه سرمایه‌گذاری بین دارایی‌های بورس اوراق بهادار تهران، سـکه بهـار آزادی، دلار آمریکا و بیت‌کوین از طریق حداقل‌سازی ارزش در معرض ریسک شـرطی بـا روش میـانگین– ارزش در معـرض خطـر شـرطی می‌باشد. بدین منظور با توجه به دم‌پهن بودن توزیع بازدهی دارایی‌های مالی جهت پیش‌بینـی توزیـع دنبالـه‌هـا از نظریـه ارزش فرین، رویکرد فراتر از آستانه استفاده شده است. همچنین برای محاسبه ارتباط بین ایـن دارایـی‌هـا از ترکیـب روش همبسـتگی شرطی پویا و کاپولا استفاده شده است که همبستگی علاوه بر غیرخطی بودن، پویا و متغیـر بـا زمـان نیـز باشـد. بـا اسـتفاده از اطلاعات روزانه شاخص دارایی‌های فوق در فاصله زمانی مهر ۱۳۹۳ تا فروردین ۱۳۹۷، مرز کارای سرمایه‌گذاری رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد در سطح ریسک (ارزش در معرض ریسک شرطی) صفر بـه دلیـل تغییـرات کـم واریـانس، بـیش‌تـرین وزن سرمایه‌گذاری در بورس اوراق بهادار و در بالاترین سطح ریسک، بیش‌ترین وزن سرمایه‌گذاری در رمز ارز (بیت‌کـوین) بـه دلیـل بازده بالاتر، تخصیص یافته است. همچنبن مقایسه پرتفوهای بهینه با استفاده از نسبت شـارپ شـرطی حـاکی از عملکـرد بهتـر پرتفوهای متنوع نسبت به هر دارایی است و بهترین عملکـرد را پرتفـو شـامل سـکه بـا اختصـاص بـیش از ۷۰ درصـد و دلار و بیت‌کوین با وزن برابر داشته است. همچنین با توجه به نسبت شارپ شرطی در پرتفو بهینه حداقل وزن سکه ۶۰ درصد وحـداکثر سهم دلار و بیت‌کوین ۲۰ درصد می‌باشد.

گودرزی و همکاران (۲۰۲۳) در پژوهـشی سبد بهـینه سـرمایه‌گذاری شـرکت‌های بیمه را با توجه به فعالیت‌های بیمه‌گری انجام دادند. در این پژوهش مسئله بهینه‌ازی سرمایه‌گذاری با استفاده از ارزش در معرض ریسک شرطی مبتنی بر توابع کاپیولا و بـا در نظر گرفتن نتایج فعالیت‌های بیمه گری مدلسازی شد. همچنین توزیع احتمال متغیرها در دنباله‌ها با استفاده از توزیع پارتو تعمـیم یافته و در سایر بخش‌های توزیع با استفاده از توزیع احتمال تجربی تخمین زده شد. داده‌ها که به صورت ماهانه جمع‌آوری شـدند دو دوره درون نمونه، از ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۴ و برون نمونه، از ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۸ را پوشش دادند. یافته‌ها نشان داد که بهترین سبد شامل هشتاد درصد دارایی‌های ریسکی (سهام و املاک و مستغلات) و تنها بیست درصد دارایی‌هـای بـدون ریسـک (سپـرده‌هـای بانکی) است. این نتیجه خارج از حدود قانونی تعیین شده توسط بیمه مرکزی اسـت. بنابـراین محـدودیت‌های قـانونی مـانع از انتخاب بهینه سبد سـرمایه‌گـذاری توسط شرکت‌های بیمه مـی‌شـوند. همچنـین مقایسـه عملکـرد بـرون نمونـه‌ای و درون نمونه‌ای سبدها نشان داد که سبدهای مبتنی بر توابع کاپیولا نسبت به سبدهای سنتی عملکرد بهتر و پایدارتری دارند.

## ۲- روش شناسی پژوهش

جامعه آماری این پژوهش سرمایه‌گذاران در بازار سرمایه شامل سرمایه‌گذاران انفرادی و نهـادی، کـه شـامل کلیـه شـرکت‌هـای پذیرفته شده در بورس و اوراق بهادار تهران می‌باشد که در دوره پنج ساله ۱۳۹۶–۱۳۹۰ در بورس اوراق بهادار فعالیت داشـته‌انـد. مطالعه موردی این پژوهش ۳۰ شرکت بزرگ بورس و اوراق بهادار تهران است. که از این ۳۰ شـرکت حـدوداً ۱۰ شـرکت بـرای سبد سهام انتخاب شدند. در این پژوهش داده‌ها از شرکت‌های پذیرفته شده در تالار بورس و اوراق بهادار طی‌سـال‌هـای ۱۳۹۶– ۱۳۹۰ که در بورس فعالیت مستمر داشته‌اند جمـع آوری شـده‌انـد. روش‌هـای گـردآوری اطلاعـات ایـن پـژوهش بـه دو دسـته کتابخانه‌ای و میدانی تقسیم شد. در خصوص گردآوری اطلاعـات مربـوط بـه ادبیـات موضـوع و پیشـینه پـژوهش از روش‌هـای کتابخانه‌ای و اسنادی و از طریق مطالعه مقالات و پایان‌نامه‌های موجود و همچنین پایگاه‌های الکترونیکی صورت گرفت و جهت جمع‌آوری اطلاعات برای تأیید یا رد پژوهش از روش میدانی استفاده شد. همچنین برای مطالعه موردی، آمـار و اطلاعـات مـورد نیاز در رابطه با قیمت سهام در طی دوره زمانی پژوهش از طریق سایت رسمی سازمان بورس و اوراق بهادار بدسـت آمـده اسـت. برای اجرای مدل و کدنویسی مسئله از نرم‌افزار گمز استفاده شد. در این پژوهش یک مدل منطقی برای انتخاب سبد سهام بهینه

ارائه می‌گردد. کاراترین ابزار برای انتخاب پرتفوی بهینه، مدل برنامه‌ریزی ارائه شده توسط مارکوویتز می‌باشد. از برجسته‌ترین نقاط مورد توجه در مدل مارکوویتز، توجه به ریسک سرمایه‌گذاری نه تنها براساس انحراف معیار یک سهم، بلکه براساس ریسک مجموعه سرمایه‌گذاری است. سرمایه‌گذار بازده مورد انتظار بالا را که مطلوب و عدم اطمینان را که نامطلوب است به مثابه دو عامل در تصمیم سرمایه‌گذاری خود در نظر دارد. سرمایه‌گذار n ورقه بهادار پیش رو دارد. لذا بازده ورقه I را با میانگین ($r_i$) و واریانس($\sigma_i^2$) را در نظر می‌گیرد. علاوه بر این فرض می‌شود که $\sigma_{ij}$ ضریب همبستگی بین بازده هر دو سهم است. حال اگر سرمایه‌گذار مقداری پول برای سرمایه‌گذاری بین n سهم داشته باشد مبلغ سرمایه‌گذاری چگونه بین این n ورقه تخصیص یابد تا سبد سهام حاصله حداکثر مطلوبیت مورد انتظار را داشته باشد. مارکوویتز پیشنهاد می‌کند که پاسخ سؤال فوق در دو مرحله انجام می‌گیرد. یکی تعیین مجموعه سبد سهام کارا؛ یعنی سبدسهامی با کمترین واریانس بازده در بین تمامی سبدهای سهام بازده مورد انتظار یکسان دارد و دیگری انتخاب از مجموعه کارا می‌باشد یعنی انتخاب سبد سهامی که مناسب‌ترین ترکیب ریسک و بازده را برای سرمایه‌گذار فراهم کند (Alahmadi et al., 2014). از این رو در هر ترکیبی از دارایی‌ها برای سرمایه گذاری یا به عبارت دیگر در هر سبد سهام، دو عامل مهم وجود دارد که یکی بازده و سود بالای سبد سهام و دیگری ریسک کم آن است. بنابراین ترکیب سهام در سبد باید به گونه‌ای انتخاب شود که این دو هدف را ارضا کند (Khanjarpanah et al., 2016) . بنابراین ما با یک مسئله چند هدفه روبرو هستیم. حل چند هدفه بودن مدل و تبدیل آن به مدل تک هدفه با استفاده از روش زیمرمن صورت خواهد گرفت. با استفاده از مدل mean-absolute devation که توسط کونو و یامازاکی (۱۹۹۱) ارائه شده است می‌توان مدل را به برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد و به واسطه آن می‌توان مسئله را در ابعاد بزرگتری به آسانی حل نمود. از سوی دیگر در این مسئله چون نرخ بازگشت سود کاملاً مشخص نمی‌شود و تغییراتی دارد و برای هر سبد با گذشت زمان تغییر می‌کند بنابراین رویکرد فازی برای برخورد با عدم قطعیت بازده سهام مدلسازی شده است. سرانجام مدل پیشنهادی روی نمونه‌ای از بازده ۶ ساله شرکت‌های پذیرفته شده در بورس و اوراق بهادار اجرا می‌شود.

نظریه مدرن سبدسهام توسط هری مارکویتز (۱۹۵۹) و ویلیام شارپ (۱۹۹۵) ابداع شده است. بنا به مدل مارکویتز افزایش تعداد و تنوع سرمایه‌گذاری موجب کاهش عدم اطمینان آن‌ها خواهد شد. در این روش ریسک یک سبد سهام تابعی از واریانس هر سهم و کواریانس آن سهم و همچنین درصد سهم در سبد است. درواقع مارکویتز به این سؤال اساسی پاسخ داد، که آیا ریسک یک سبد سهام با مجموع ریسک‌های سهام منفردی که آن را تشکیل می‌دهند برابر است؟ مدل مارکویتز یک معیار خاص برای محاسبه ریسک سبد سهام می‌باشد و بر این اساس سبد سرمایه‌گذاری کارا را که مبتنی بر بهترین حالات ریسک و بازده برای یک سرمایه‌گذار و انتخاب سبدی بهینه است استخراج می‌نماید. اساس بیشتر مدل‌های موجود برای انتخاب سبد سهام مدل مارکویتز می‌باشد. همچنین در این مدل، واریانس به عنوان عامل غیرمطلوب و بازده به عنوان عامل مطلوب شناخته می‌شود. مدل مارکویتز به صورت زیر می‌باشد:

اگر بخواهیم نحوه کار مدل را بصورت ریاضی بیان کنیم، با فرض اینکه r(j) ، j=1,…,n بازده سهام، σ(i,j)، i, j = 1,…n کوواریانس بین دو سهم و $M_0$ کل بودجه و x(j)، j=1,…,n وزن سهم در سبد باشد، مدل سبد سهام به گونه‌ای x(1), … ,x(n) را انتخاب می‌کند که:

$$\sum_{j=1}^{n} x(j) = 1 \qquad 0 \le x\,(j) \le 1$$ رابطه (۱)

رابطه (۱) محدودیت بودجه می باشد و نشان می‌دهد که جمع وزن سهام قرار گرفته در سبد سهام باید برابر با ۱ باشد و بازده مورد انتظار و واریانس سبد سرمایه‌گذاری به صورت زیر تعریف می شود:

$$r_v = \sum_{j=1}^{n} r\,(j)x\,(j)$$ رابطه (۲)

$$\sigma_v = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x\,(j)x\,(i)\sigma\,(i,j).$$ رابطه (۳)

بنابراین براساس مدل سبدسهام مارکویتز بهینه‌سازی سبد سهام با دو رویکرد مینیمم‌سازی ریسک در سطح معینی از بازده و بیشینه‌سازی بازده در سطح ثابتی از ریسک به صورت زیر بیان می‌شود:

الف) مدل مینیمم‌سازی ریسک سبد سهام:

$$\text{Min } \sigma_v = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x(j)x(i)\sigma(i,j).$$

رابطه (۴)

$$\text{s.t.}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq R_0,$$
$$0 \leq x_j \leq U_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

ب) مدل ماکزیمم‌سازی بازده سبد سهام:

$$\text{Max } r_v = \sum_{j=1}^{n} r(j)x(j),$$

رابطه (۵)

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$x_j \geq 0$$

الف) مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری

فرض کنید n دارایی برای سرمایه‌گذاری ممکن در اختیار داریم و علاقمند به تعیین سهم هر دارایی که مجموعاً میزان کل بودجه در طول سرمایه‌گذاری $M_0$ است، می باشیم. متغیرهای تصمیم را $X_j$، $j = 1, \dots n$ می‌نامیم که نشان دهنده میزان پول سرمایه‌گذاری شده در دارایی j است. پس بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0, \quad x_j \geq 0$$

رابطه (۶)

حال $R_j$ را متغیر تصادفی که میزان برگشتی (در هر پریود) دارایی jام می‌نامیم. میزان ارزش انتظاری (امید ریاضی) برگشتی در کل سرمایه‌گذاری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\mathrm{E}\left[\left\{\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right\}^2\right]}$$

رابطه (۷)

به طور کلی می‌توان سرمایه‌ها را در دارایی‌های مختلف سرمایه‌گذاری کرد تا از ریسک سرمایه‌گذاری جلوگیری شود. مدل مارکویتز انحراف معیار بازده را به عنوان معیار ریسک مورد استفاده قرار می‌دهد.

$$r(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[R_j\right] x_j$$

رابطه (۸)

یک سرمایه‌گذار ممکن است علاقمند به دست آوردن یک بازده مشخص با حداقل ریسک باشد. حال تابع هدف و مجموعه محدودیت‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V = \text{Min} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

رابطه (۹)

$$\text{s.t}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq R_0,$$
$$0 \leq x_j \leq U_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

که در آن $R_0$ میزان پول برگشتی، $r_j$ ارزش انتظاری برگشت دارایی jام، $U_j$ حداکثر میزان سرمایه گذاری در دارایی jام است. برای کاهش بار محاسباتی مدل مذکور، از روش ارائه شده توسط کونو و یامازاکی استفاده شده است. که در آن تابع قدر مطلق به جای تابع انحراف معیارمارکویتز استفاده می‌شود.

رابطه (۱۰)
$$W(x) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right]$$

بنابراین ثابت می شود که توابع انحراف استاندارد و مطلق اساسا مشابه هستند و هرگاه توزیع ما نرمال باشد حالت های مارکویتز و کونو و یامازاکی یکسان خواهند بود. در نتیجه مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

رابطه (۱۱)
$$V=\text{Min}\ E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right]$$
$$\text{s.t}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} E\left[R_j\right] x_j \geq R_0,$$
$$0 \leq x_j \leq U_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

فرض می‌شود اطلاعات گذشته شامل نوسانات قیمت و پرداخت سود سهام، برای هر دارایی در طی T سال گذشته در دسترس است که می‌توان براساس این اطلاعات میزان بازده سرمایه‌گذاری هر دارایی را تخمین زد لذا داریم:

رابطه (۱۲)
$$R_j = E\left[R_j\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{jt}$$

$r_{jt}$ میزان سرمایه برگشتی برای دارایی jام در طول t سال می‌باشد. یعنی مجموع سود در هر واحد پولی در دارایی jام در سال tمی‌باشد. واضح است میزان $r_{jt}$ ثابت نبوده و می‌تواند از سالی به سال دیگر متفاوت باشد و می‌تواند مقادیر مثبت، منفی و صفر به خود بگیرد. از این رو برای تعیین میزان سرمایه‌گذاری در دارایی jام، $r_{jt}$ بصورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود.

حال $w(x)$ در رابطه (۱۰) بصورت زیر تقریب زده می شود:

رابطه (۱۳)
$$E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - r_j)x_j\right|$$

نهایتاً مدل بازنویسی شده و به صورت زیر تغییر می‌یابد:

رابطه (۱۴)
$$V=\text{Min}\ \sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} r_{jt} - r_j)x_j\right| /T$$
$$\text{s.t}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} E\left[R_j\right] x_j \geq R_0,$$
$$0 \leq x_j \leq U_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

مدل به صورت زیر به برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌گردد:

رابطه (۱۵)
$$V = \text{Min}\sum_{t=1}^{T} u_t^+ + u_t^- /T$$
$$\text{s.t.}$$
$$\sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - r_j)x_j = u_t^+ - u_t^- \qquad t = 1, \dots, T,$$
$$\text{s.t.}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq R_0,$$
$$0 \leq x_j \leq U_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

از آن جا که بازگشت سرمایه برای سال‌های آینده نامشخص است لذا برای حل مدل باید از برنامه‌ریزی فازی استفاده می‌شود.

ب) برنامه‌ریزی فازی

در برنامه‌ریزی فازی با فازی در نظر گرفتن پارامترهای مدل، ساختار محدودیت‌ها و تابع هدف، مدل به صورت فازی فرموله می‌شود. سپس با استفاده از عملیات مجموعه‌های فازی و خواص آن مدل فازی به یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی قطعی تبدیل می‌شود که با حل آن می‌توان به جواب مدل فازی رسید. در برنامه‌ریزی خطی فازی، با درنظر گرفتن اعداد فازی برای پارامترهای مدل، ساختار فازی ایجاد و رویکرد حل ارایه می‌شود. مدل‌های برنامه ریزی خطی نوع خاصی از مدل‌های تصمیم‌گیری هستند. فضای تصمیم توسط محدودیت‌ها و تابع مطلوبیت توسط تابع هدف تعریف شده و تصمیم‌گیری در حالت قطعی است. مدل کلاسیک برنامه‌ریزی خطی به صورت ذیل است:

رابطه (۱۶)

$$\text{Max } z = C^T X$$
$$\text{s.t.}$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$
$$A \in R^{m*n},\ b \in R^m,\ C, X \in R^n$$

در حالت کلاسیک فرض بر این است که ضرایب ماتریس A و بردارهای B و C اعداد قطعی و دقیق بوده، نامعادله در حالت قطعی و حداکثر نمودن تابع هدف نیز در حالت قطعی تعریف می شود. اما بدلیل اینکه تمامی این موارد می تواند به صورت فازی تعریف شود لذا مدل برنامه ریزی خطی فازی یک مدل یگانه و مشخص نیست بلکه بسته به شرایط واقعی و فرضیاتی که برای مدل کردن در نظر گرفته می‌شود، یک مدل برنامه‌ریزی خطی فازی بدست می‌آید.

ج) برنامه‌ریزی آرمانی

برنامه‌ریزی آرمانی توسط چارنز و همکاران (۱۹۶۱) برای اولین بار مطرح گردید. بعدها توسط محققان مختلفی توسعه داده شد. برنامه‌ریزی آرمانی نوع خاصی از برنامه‌ریزی ریاضی است که با اهداف چندگانه و متضاد، اهداف سطح پائین تنها زمانی در نظر گرفته می‌شوند که اهداف سطح بالا برآورده شوند. برخلاف برنامه‌ریزی خطی که هدف را بیشینه یا کمینه می‌کند، برنامه‌ریزی ریاضی آرمانی اختلاف بین مقدار مطلوب و مقدار واقعی نتایج را کم می‌کند. در این پژوهش از این روش برای حل مسئله چندهدفه و تبدیل به یک مسئله ساده استفاده شده است. لذا داریم:

رابطه (۱۷)

$$\text{Max } E_{car} - \rho \left( \sum_{i=1}^{n} d_i^+ + d_i^- \right)$$
$$\text{s.t.}$$
$$Var_{car} + \sum_{i=1}^{n} d_i^- - \sum_{i=1}^{n} d_i^+ = G,$$
$$d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

مقدار مطلوب واریانس همواره صفر است و واریانس همواره یک عدد مثبت است. بنابراین با استفاده از $d_i^- = ۰$ و $d_i^+ \geq ۰$ و $G=۰$ می‌توان معادله فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

رابطه (۱۸)

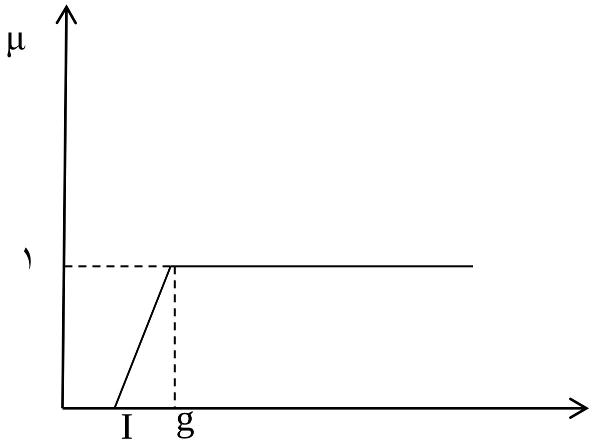
$$\text{Max } E_{car} - \rho d^+$$
$$\text{s.t}$$
$$Var_{car} - d^+ = 0,$$
$$d^+ \geq 0$$

برای استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی آرمانی در محیط فازی، تصمیم گیرنده به هرکدام از P هدف موجود در مسئله یک سطح آرمان نادقیق تخصیص می‌دهد که این اهداف فازی را آرمان‌های فازی می نامیم. $g_k$ را به عنوان سطح آرمان منتسب به هدف kام ($k=1,\dots,r$) در نظر گرفته می‌شود. در این صورت مسئله برنامه‌ریزی آرمانی خطی در محیط فازی، به صورت زیر صورت بندی می‌شود:

رابطه (۱۹)

$$c_k^T x \underset{\sim}{>} gk \qquad (k = 1,2,\dots,r)$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

$\underset{\sim}{>}$به معنای تابع هدف از نوع بیشینه‌سازی است. در همین راستا می‌توان برای توابع هدف از نوع حداقل‌سازی نیز بطور مشابه عمل کرد. عموماً توابع عضویت برای آرمان‌هایی از نوع بیشینه‌سازی را می‌توان به صورت شکل شماره (۱) نشان داد.




شکل شماره (۱): تابع عضویت برای آرمان حداکثرسازی

درشکل (۱) $g_k$ همان سطح آرمان تصمیم گیرنده و $I_k$ حداقل سطح قابل قبول برای آرمان $k$ام است. عموماً به بـازده $[I_k\ ,\ g_k]$ بازده مطلوب گفته می‌شود. تابع عضوی در این بازه به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند که به معنای افزایش مطلوبیـت تصـمیم گیرنده است. مطابق با چنین استدلالی می توان درجه عضویت ۱ را برای مقادیری از تابع هدف بیش از $g_k$ و درجه عضویت صفر را برای مقادیر کمتر از $I_k$ توجیه کرد.

د) برنامه‌ریزی زیمرمن

در روش زیمرمن (۱۹۹۶) تابع هدف اصلی مسئله، $cx$ ، به عنوان یک آرمان فازی به مجموعه قیـود اضـافی مـی‌شـود و مسـئله برنامه‌ریزی خطی متناظر، با تابع هدف جدید $\lambda$ حل می‌شود. در این رویکرد از تابع عضویت خطی بـرای هرکـدام از آرمـان‌هـای فازی استفاده شده و عملگر ماکس مین را به منظور استخراج معادل قطعی مسئله FGP[1] بکار گرفته می‌شود. بطـور ویـژه بـرای $k=1,\ldots,r$ از تابع عضویت زیر استفاده می‌شود. در این تابع عضویت $l_k$ معرف مینیمم سطح قابل قبول یا سطح تولرانس پایین برای آرمان فازی $k$ام است مطابق با این تعریف $p_k = g_k - l_k$ همان سطح تولرانس برای آرمان فازی $k$ام است.

رابطه (۲۰)

$$\mu_k\left(c_k^T x\right) = \begin{cases} 1, & c_k^T \geq g_k \\ f_k\left(c_k^T x\right) = \dfrac{c_k^T - l_k}{g_k - l_k}, & l_k \leq c_k^T < g_k \\ 0, & c_k^T < l_k \end{cases}$$

حال با استفاده از عملگر ماکس مین، مدل زیمرمن برای مسئله FGP به صورت زیر صورت بندی می‌شود:

رابطه (۲۱)

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \lambda \\ &\lambda \leq \frac{c_k^T - l_k}{g_k - l_k}, \quad k=1,2,\ldots,r \\ &Ax \leq b \\ &\lambda \leq 1 \\ &X\ ,\ \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

در رابطه (۱۹)، $f_k\left(c_k^T x\right) = \frac{c_k^T - l_k}{g_k - l_k}$ خطی است اما در کل می‌تواند تکه تکه باشد که مقعر یا شبه مقعر است.

یک تعمیم آنی از رویکرد زیمرمن، رویکرد دو مرحله‌ای لی است. در این رویکرد در فاز اول از رویکرد زیمرمن استفاده می‌شـود و مسئله قطعی حاصل (ZLP) حل می‌شود. اگر $(x^*\ ,\ \lambda^*)$ را به عنوان یک جواب بهینه برای مسئله ZLP در نظـر بگیـریم و $x^*$ منحصر بفرد باشد آنگاه می‌توان آن را جواب بهینه مسـئله FGP در نظـر گرفـت. در غیـر ایـن صـورت در مرحلـه دوم مسـئله برنامه‌ریزی خطی زیر صورت‌بندی می‌شود:

---

[1] Fuzzy Goal Programming

رابطه (۲۲)

$$\text{Max}\quad \sum_{k=1}^{r}\frac{\lambda_k}{r}$$
$$\lambda_k^* \le \lambda_k \le f_k\,(c_k^T x),\ (k=1,2,\dots,r)$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

اگر $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی بالا باشد آنگاه $\bar{x}$ یک جواب موثر برای مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه است که داریم:

رابطه (۲۳)

$$\text{Max}\ (\mu_{1(x)}, \mu_2(x), \dots, \mu_r(x))$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

در رابطه (۲۲) $\mu_k(x)$ در واقع همان $\mu_k\left(c_k^T x\right)$ برای $k=1,2,\dots,r$ است.

هنگامی که پارامترها فازی باشند جواب مدل نیز فازی خواهد بود. لذا تحت چنین شرایطی بهینه‌سازی سود سهام به برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی برای مدل اول سبد سهام به منظور کاهش ریسک بصورت زیر فرموله می‌گردد:

رابطه (۲۴)

$$\text{Min}\ V = \sum_{t=1}^{T}(u_t^+ + u_t^-)\ /T$$
s.t.
$$\sum_{j=1}^{n}\left(r_{jt}-r_j\right)x_j = u_t^+ - u_t^- \qquad t=1,\dots,T,$$
$$\sum_{j=1}^{n} R_j x_j \ge_{\sim} R_0^{\mp}$$

از طرفی داریم:

رابطه (۲۵)

$$\sum_{j=1}^{n} R_j x_j \ge_{\sim} R_0^{\mp}$$
$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \ge R_0^- + d_j\lambda^{\mp} = R_0^- + (R_0^+ - R_0^-)\lambda^{\mp}$$

فرض کنید $\lambda^{\pm}$ نشان دهنده درجه رضایت از محدودیت فازی است و یک مقدار از پیش تعیین شده بین ۰ و ۱ می‌باشد، مدل چندهدفه برای مسئله سبد سهام به صورت زیر است:

رابطه (۲۶)

$$\text{Min}\ \ V = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{n}(u_t^+ + u_t^-)\quad ,\qquad \text{Max}\ Z \cong \sum r_j x_j$$
s.t.
$$\sum_{j=1}^{n}\left(r_{jt}-r_j\right)x_j = u_t^+ - u_t^- \qquad t=1,\dots,T,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} r_j\, x_j \ge R_0,$$
$$0 \le x_j \le U_j, \qquad j=1,\dots,n$$

رابطه (۲۶) به مدل زیر تبدیل می‌شود:

رابطه (۲۷)

$$\text{Min}\ \ V = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{n}(u_t^+ + u_t^-)\quad ,\qquad \text{Max}\ \lambda$$
s.t.
$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \ \ge\ Z^- + \lambda(Z^+ - Z^-)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-r_j)x_j = u_t^+ - u_t^- \qquad t=1,\dots,T,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$0 \le x_j \le U_j, \qquad j=1,\dots,n$$

سپس مدل به صورت زیر نوشته می‌شود:

رابطه (۲۸)

$$\text{Max} \quad \lambda$$
$$\text{s.t.}$$
$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \ge Z^- + \lambda(Z^+ - Z^-)$$
$$V = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{n}(u_t^+ + u_t^-) \le V^- + (1\text{-}\lambda)\,(V^+ V^-)$$
$$\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-r_j)x_j = u_t^+ - u_t^- \qquad t=1,\dots,T,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$0 \le x_j \le U_j, \qquad j=1,\dots,n$$

## ۳- نتایج و بحث

داده‌های تحقیق با استفاده از آمار منتشر شده در سایت رسمی سازمان بورس و اوراق بهادار گردآوری شده است. در این پژوهش از داده‌های ۳۰ شرکت بزرگ در بورس استفاده شده است. بازه زمانی بصورت سالانه از شهریور ماه سال ۱۳۹۰ تا شهریور سال ۱۳۹۶ بکار گرفته شده است. بدلیل عدم وجود کامل داده‌های این شرکت‌ها در این بازه زمانی و همچنین به علت پایین بودن بازده برخی از این شرکت‌ها در بازه زمانی مربوطه، نهایتاً ۱۰ شرکت انتخاب شده است.اجرای مدل و کدنویسی مسئله با استفاده از نرم افزار GAMS صورت گرفته است. بنا براین ما با یک مسئله چند هدفه روبرو هستیم. به منظور تبدیل مدل به مدل تک هدفه از روش زیمرمن استفاده شده است. با استفاده از مدل mean-absolute devation که توسط کونو و یامازاکی ارائه شده است می‌توان مدل را به برنامه ریزی خطی تبدیل کرد و به واسطه آن می‌توان مسئله را در ابعاد بزرگتری به آسانی حل نمود. در این مطالعه همچنین از روش فازی برای تخمین بازده دارایی‌ها استفاده شد. اطلاعات و قیمت سهام شرکت‌ها از سایت رسمی بورس و اوراق بهادار جمع آوری شده است و بازده هریک از شرکت‌ها براساس اختلاف ارزش سرمایه در ابتدا و انتهای دوره با استفاده از داده‌های تاریخی قیمت سهام برای ۶ سال متوالی بدست آمده است. سپس بازگشت سرمایه گذاری با استفاده از مدل میانگین مسئله بیان شده است. ریسک حاصل از سرمایه گذاری نیز با استفاده از دو مدل واریانس مطرح شده محاسبه می‌گردد. مدل در نرم افزار GAMS اجرا و نتایج حاصل از آن در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از نتایج بدست آمده و براساس دو معیار ریسک و بازده سبد سهام بهینه بطور کامل مشخص می‌گردد. در جداول (۱) و (۲) به ترتیب فهرست سهام منتخب از ۳۰ شرکت بزرگ بورس، بازده سرمایه و ارزش سرمایه گذاری هرکدام ارائه شده است. لازم به ذکر است که ستون آخر ارزش انتظاری برای هر شرکت را نشان می‌دهد.

جدول شماره (۱): نمونه آماری پژوهش

| ردیف | نماد | نام شرکت | ارزش سرمایه گذاری | بازده انتظاری |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | بانک | سرمایه گذاری گروه توسعه ملی | ۳۳,۸۸۱,۲۵۰,۰۰۰,۰۰۰ | ۱/۵۶ |
| ۲ | فخوز | فولاد خوزستان | ۶۹,۱۶۱,۶۸۸,۰۰۰,۰۰۰ | ۲۵/۵۳ |
| ۳ | فولاد | فولاد مبارکه اصفهان | ۲۳۲,۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ | ۳/۴۸ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۴ | خودرو | ایران خودرو | ۴۵,۸۳۸,۸۰۰,۰۰۰,۰۰۰ | ۶/۲۸ |
| ۵ | رانفور | خدمات انفورماتیک | ۶۲,۶۶۴,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ | ۱۸/۱۹ |
| ۶ | حکشتی | کشتیرانی جمهوری اسلامی ایران | ۶۲,۳۴۲,۵۷۹,۰۰۰,۰۰۰ | ۵۰/۱۸ |
| ۷ | شپنا | پالایش نفت اصفهان | ۹۸,۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ | ۵۴/۵۲ |
| ۸ | صندوق | سرمایه‌گذاری صندوق بازنشستگی | ۴۳,۴۴۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ | ۲۶/۲۶۴۴ |
| ۹ | خساپا | سایپا | ۳۶,۹۴۹,۹۴۱,۱۷۵,۰۰۰ | −۲/۱۲ |
| ۱۰ | رمپنا | گروه مپنا (سهامی عام) | ۷۶,۲۶۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ | ۵۱/۶۰ |

جدول شماره (۲): بازده شرکت های منتخب مسئله برای سال‌های ۹۰-۹۶

| J | Rj1 | Rj2 | Rj3 | Rj4 | Rj5 | Rj6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱۳/۹۱ | ۷۱/۷۹ | −۳/۴۳ | −۱۶/۶۵ | −۴۸/۷۹ | −۱۳/۴۸ |
| ۲ | ۱۰۰/۹۲ | ۱۴۰/۵۱ | −۸۰/۸۹ | −۶۲/۳۲ | ۰/۰۰ | ۴۸/۹۶ |
| ۳ | −۳۰/۹۷ | ۷۸/۳۰ | −۲۸/۲۹ | −۵۴/۶۳ | ۷/۵۸ | ۴۲/۹۱ |
| ۴ | −۶۱/۴۷ | ۷۳/۶۴ | ۱۶/۷۷ | −۳/۰۰ | ۳۰/۷۸ | −۲۵/۰۷ |
| ۵ | −۰/۶۹ | ۳۱/۱۷ | −۳۰/۱۴ | ۴۲/۱۹ | ۱۷/۳۵ | ۴۳/۲۷ |
| ۶ | ۲۰/۲۴ | ۱۸/۴۱ | ۲۶۴/۲۲ | ۱۴/۷۶ | −۷/۲۹ | −۱۵/۲۶ |
| ۷ | ۳۵/۷۳ | ۳۷۹/۳۶ | −۸۷/۷۳ | −۲۴/۸۵ | ۱۲/۵۲ | ۶/۰۸ |
| ۸ | ۰/۰۰ | ۲۷۹/۴۸ | −۳۱/۳۱ | −۲۸/۶۷ | −۳۸/۶۵ | −۲۸/۲۰ |
| ۹ | −۵۳/۶۷ | ۷۳/۲۷ | −۲۵/۷۱ | −۱۱/۲۷ | −۰/۳۳ | −۱/۰۰ |
| ۱۰ | −۴۲/۸۵ | ۳۴۳/۱۳ | ۲/۶۵ | ۲/۹۰ | ۲۱/۵۴ | ۲۳/۷۷ |

الف) محاسبه بازده سرمایه گذاری(مدل میانگین)

بازگشت سرمایه گذاری با استفاده از مدل میانگین بدست می‌آید. همانطور که اشاره شد تابع هدف و محدودیت‌های بکارگرفته در مدل میانگین بصورت خطی هستند. از این رو با برنامه‌ریزی خطی مسئله قابل حل می‌باشد. اطلاعات مسئله به صورت زیر است: $j$ که نشان دهنده تعداد دارایی‌ها می‌باشد برابر با ۱۰ در نظر گرفته شده است. مقدار $M_0$ که میزان کل بودجه در طول سرمایه گذاری را نشان می‌دهد برابر با ۱۰۰ میلیون واحد پولی فرض شده و حداکثر میزان سرمایه گذاری در هر دارایی برابربا ۲۵ میلیون واحد پولی است. $x_j$ نیز مقدار پول سرمایه گذاری شده در دارایی $j$ام می‌باشد و $r_j$ میزان بازده انتظاری هر یک از دارایی‌ها در طول دوره ۶ سال مطابق جدول شماره (۱) می‌باشد. بازده انتظاری از میانگین بازده‌های شرکت ها در طول ۶ سال بدست آمده است و میزان پول برگشتی برابراست با سرمایه کل در ۲۰ درصد آن. بنابراین داریم:

$J = 1, 2,\dots,10;$
$T= 1,2,3,4,5,6;$
$M_0 = 100000000;$
$U_j = 25000000;$
$R_0 = 100000000 + (100000000*0.2) =12000000;$

با توجه به مثال عددی مدل میانگین بصورت زیر نوشته می‌شود:

$Z= \max \sum_{j=1}^{10} r_j * x_j$
s.t.
$\sum_{j=1}^{10} x_j = 100000000$
$0 \le X_j \le 25000000$

جدول شماره (۳) بازگشت سرمایه مدل میانگین و ریسک سرمایه گذاری را نشان می‌دهد.

جدول (۳): بازگشت سرمایه مدل میانگین و ریسک سرمایه گذاری

| | | |
|---|---|---|
| مقدار بازده سبد سهام | $4.407 \times 10^9$ | Z |
| میزان ریسک سرمایه گذاری | $6.8 \times 10^9$ | V |

پس از فراخوانی مدل میانگین مقادیر تخصیص داده شده به ازای هرکدام از دارایی‌ها به شرح جدول شماره (۴) می‌باشد:

جدول شماره (۴): نتایج حاصل از مدل میانگین

| ردیف | نام دارایی | میزان سرمایه گذاری |
|---|---|---|
| ۱ | فخوز | ۸۰۰۰۰۰۰ |
| ۲ | حکشتی | ۲۳۰۰۰۰۰۰ |
| ۳ | شپنا | ۲۳۰۰۰۰۰۰ |
| ۴ | وصندوق | ۲۳۰۰۰۰۰۰ |
| ۵ | رمپنا | ۲۳۰۰۰۰۰۰ |
| مجموع سرمایه گذاری | | ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ |

در جدول مذکور، با توجه به محدودیت‌های مدل، مشاهده می‌شود که به هرکدام از دارایی‌ها کمتر از ۲۵۰۰۰۰۰۰ تخصیص داده شده و مجموع کل دارایی‌ها ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ واحد پولی می‌باشد که این امر بیانگر آن است که مدل ارائه شده درست عمل کرده است.

ب) مدل واریانس

با استفاده از اطلاعات مسئله و جداول (۱) و (۲) مدل اول واریانس (ریسک) به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\text{Min } V = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sigma_{ij}\, x_i\, x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 100000000$$

$$1.56\,X_1 + 25.53\,X_2 + 3.48\,X_3 + 6.28\,X_4 + 18.19\,X_5 + 50.18\,X_6 + 54.52\,X_7 + 26.44\,X_8 - 2.12\,X_9 + 51.60\,X_{10} \geq 120000000,$$

$$0 \leq X_j \leq 25000000$$

همانطور که ملاحظه می‌شود مدل واریانس به حالت غیرخطی می‌باشد. همانطور که اشاره شد، با استفاده از روش کونو و یامازاکی که در آن تابع قدر مطلق به جای تابع انحراف معیارمارکویتز استفاده می‌شود. مدل به حالت خطی تبدیل می‌شود. به منظور استفاده از روش‌های توضیح داده شده مثال عددی در نظر گرفته می‌شود. بدین منظور با استفاده از اطلاعات ۱۰ شرکت برای سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۶، مسئله به صورت زیر فرموله می‌شود:

تابع هدف

$$V = \text{Min } (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6) / 6$$

s.t.

محدودیت اول

$$13.91\,X_1 + 100.92\,X_2 - 30.97\,X_3 - 61.47\,X_4 - 0.69\,X_5 + 20.24\,X_6 + 35.73\,X_7\, u_1 + (0.00\,X_8 - 53.67\,X_9 - 42.85\,X_{10}) - 1.56\,X_1 - 25.53\,X_2 - 3.48\,X_3 - 6.28\,X_4 - 18.19\,X_5 - 50.18\,X_6 - 54.52\,X_7 - 26.44\,X_8 + 2.12\,X_9 - 51.60\,X_{10} \geq 0,$$

محدودیت دوم

$$u_2 + (71.79\,X_1 + 140.51\,X_2 + 78.30\,X_3 + 73.64\,X_4 + 31.17\,X_5 + 18.41\,X_6 + 379.36\,X_7 + 279.48\,X_8 + 73.27\,X_9 + 343.13\,X_{10}) - 1.56\,X_1 - 25.53\,X_2 - 3.48\,X_3 - 6.28\,X_4 - 18.19\,X_5 - 50.18\,X_6 - 54.52\,X_7 - 26.44\,X_8 + 2.12\,X_9 - 51.60\,X_{10} \geq 0,$$

محدودیت سوم

$$u_3 + (-3.43\,X_1 - 80.89\,X_2 - 28.29\,X_3 + 16.77\,X_4 - 30.14\,X_5 + 264.22\,X_6 - 87.73\,X_7 - 31.31\,X_8 - 25.71\,X_9 + 2.65\,X_{10}) - 1.56\,X_1 - 25.53\,X_2 - 3.48\,X_3 - 6.28\,X_4 - 18.19\,X_5 - 50.18\,X_6 - 54.52\,X_7 - 26.44\,X_8 + 2.12\,X_9 - 51.60\,X_{10} \geq 0,$$

محدودیت چهارم

$$u_4 + (-16.65X_1 - 62.32X_2 - 54.63X_3 - 3.00X_4 + 42.19X_5 + 14.76X_6 - 24.85X_7 - 28.67\,X_8 - 11.27\,X_9 + 2.90X_{10}) - 1.56X_1 - 25.53X_2 - 3.48X_3 - 6.28X_4 - 18.19X_5 - 50.18X_6 - 54.52X_7 - 26.44X_8 + 2.12\,X_9 - 51.60X_{10} \geq 0,$$

محدودیت پنجم

$$u_5 + (-48.79X_1 + 0.00X_2 + 7.58X_3 + 30.78X_4 + 17.35X_5 - 7.29X_6 + 12.52X_7 - 38.65X_8 - 0.33X_9 + 21.54\,X_{10}) - 1.56\,X_1 - 25.53\,X_2 - 3.48\,X_3 - 6.28\,X_4 - 18.19\,X_5 - 50.18\,X_6 - 54.52\,X_7 26.44\,X_8 + 2.12\,X_9 - 51.60\,X_{10} \geq 0,$$

محدودیت ششم

$$u_6 + (-13.48X_1 - 48.96X_2 + 42.91X_3 - 25.07X_4 + 43.27X_5 - 153.26X_6 + 6.08X_7 - 28.20X_8 - 1.00\,X_9 - 23.77X_{10}) - 1.56\,X_1 - 25.53\,X_2 - 3.48\,X_3 - 6.28\,X_4 - 18.19X_5 - 50.18X_6 - 54.52X_7 - 26.44X_8 + 2.12\,X_9 - 51.60X_{10} \geq 0,$$

محدودیت هفتم

$$13.91\,X_1 + 100.92\,X_2 - 30.97\,X_3 - 61.47\,X_4 - 0.69\,X_5 + 20.24\,X_6 + 35.73\,X_7\, u_1 - (+0.00$$

$X_8 -53.67 X_9 -42.85X_{10}) +1.56 X_1 +25.53 X_2 +3.48 X_3 +6.28 X_4+18.19 X_5+50.18 X_6+54.52 X_7+26.44 X_8 -2.12 X_9 +51.60 X_{10}\geq 0,$

محدودیت هشتم: $u_2-(71.79 X_1 +140.51 X_2 +78.30 X_3+73.64 X_4 +31.17 X_5 +18.41 X_6 +379.36 X_7+279.48 X_8 +73.27 X_9 +343.13 X_{10}) +1.56 X_1+25.53 X_2 +3.48 X_3 +6.28 X_4 +18.19 X_5 +50.18 X_6+54.52 X_7+26.44 X_8-2.12 X_9+51.60 X_{10}\geq 0,$

محدودیت نهم: $u_3- (-3.43 X_1 -80.89 X_2 -28.29 X_3 +16.77 X_4 -30.14 X_5 +264.22 X_6 -87.73 X_7-31.31 X_8 -25.71 X_9 +2.65 X_{10})+1.56 X_1+25.53 X_2+3.48 X_3 +6.28 X_4 +18.19 X_5+50.18 X_6+54.52 X_7+26.44 X_8 -2.12 X_9 +51.60 X_{10} \geq 0,$

محدودیت دهم: $u_4- (-16.65 X_1-62.32X_2 -54.63 X_3 -3.00 X_4 +42.19 X_5 + 14.76X_6 -24.85X_7-28.67 X_8-11.27 X_9 +2.90X_{10})+1.56 X_1 +25.53 X_2+3.48 X_3 +6.28 X_4 +18.19 X_5 +50.18 X_6 +54.52 X_7 +26.44 X_8 -2.12 X_9 +51.60 X_{10}\geq 0$

محدودیت یازدهم: $u_5-(-48.79X_1+0.00X_2+7.58X_3+30.78X_4+17.35X_5-7.29X_6+12.52X_7-38.65X_8 0.33X_9+21.54X_{10})+1.56X_1+25.53X_2+3.48X_3+6.2X_4+18.19X_5+50.18X_6+54.52X_7 +26.44 X_8 -2.12 X_9+51.60 X_{10}\geq 0,$

محدودیت دوازدهم: $u_6 -(-13.48X_1 -48.96 X_2 +42.91 X_3 -25.07 X_4+43.27X_5-153.26 X_6 +6.08 X_7-28.20 X_8-1.00X_9-23.77X_{10})+1.56X_1+25.53X_2+3.48X_3+6.28X_4+18.19X_5+50.18X_6+54.52X_7 +26.44X_8-2.12 X_9+51.60 X_{10} \geq 0,$

محدودیت سیزدهم: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9+ X_{10} =100000000,$

محدودیت چهاردهم: $1.56X_1+25.53X_2+3.48X_3+6.28X_4+18.19X_5+50.18X_6+54.52X_7+26.44X_8-2.12X_9+51.60X_{10} \geq 120000000;$

وضعیت متغیرها: $0 \leq X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10} \leq 25000000.$

جدول شماره (۵) ریسک سرمایه گذاری (مدل واریانس) و بازگشت سرمایه (مدل ریسک) را نشان می‌دهد.

جدول شماره (۵): ریسک سرمایه گذاری و بازگشت سرمایه

| | | |
|---|---|---|
| میزان ریسک سرمایه گذاری | $1.707 \times 10^9$ | V |
| مقدار بازده سبد سهام | $1.266 \times 10^9$ | Z |

از آنجا که در مدل واریانس، ریسک به عنوان تابع هدف اصلی در نظر گرفته شده، در مقایسه با مدل میانگین مقدار بدست آمده برای واریانس کمتر از حالت قبلی است و مقدار بازده سرمایه گذاری نسبت به مدل میانگین نیز کمتر شده است. درحالیکه در مدل میانگین چون بازده به عنوان محدودیت اصلی مدل سرمایه گذاری فرض شده است لذا مقدار بازده بیشتر از مدل واریانس است و مقدار ریسک بیشتر است. پس از فراخوانی مدل واریانس (ریسک) مقادیر تخصیص داده شده به ازای هرکدام از دارایی‌ها به شرح جدول شماره (۶) می‌باشد:

جدول شماره (۶): نتایج حاصل از مدل ریسک

| ردیف | نام دارایی | میزان سرمایه گذاری (تومان) |
|---|---|---|
| ۱ | بانک | ۲۳۰۰۰۰۰۰ |
| ۲ | فخوز | ۶۳۵۶۰۰۰ |
| ۳ | فولاد | ۱۱۵۰۰۰۰۰ |
| ۴ | رانفور | ۲۳۰۰۰۰۰۰ |
| ۵ | حکشتی | ۱۳۱۳۳۰۰۰ |
| ۶ | خساپا | ۲۳۰۰۰۰۰۰ |
| مجموع سرمایه گذاری | | ۱۰۰۰۰۰۰۰ |

همانطور که در مدل میانگین بیان شده است، در مدل ریسک نیز مقادیر دارایی‌ها کمتر از مقدار قید شده در محدودیت‌ها یعنی ۲۵۰۰۰۰۰۰ می‌باشد و جمع کل مبلغ سرمایه گذاری شده برابر با ۱۰۰۰۰۰۰۰ واحد پولی می‌باشد. که گویای کارایی مدل واریانس است.

ج) مدل زیمرمن

با در نظر گرفتن دو عامل بازده و ریسک بطور همزمان در مدل سبدسهام به صورت مدل چندهدفه فرموله می‌شود. لذا برای تک هدفه کردن مدل از روش زیمرمن (۱۹۷۸) که یکی از روش‌های حل مسائل برنامه ریزی چندهدفه می‌باشد، استفاده می‌شود.

$$\text{Min } V = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sigma_{ij}\ x_i\ x_j$$
$$\text{Max } \sum_{j=1}^{10} r_j * x_j$$
s.t.
$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 100000000$$
$$0 \le X_j \le 25000000$$

با استفاده از روش زیمرمن مدل به صورت زیر حل می‌شود. در مدل ارائه شده براساس روابط زیر بیشترین و کمترین مقادیر تابع را بدست می‌آید. به طوریکه ابتدا برای مدل میانگین بیشترین و کمترین مقدار بدست می‌آید و سپس برای مدل واریانس (V) نیز مقدار مینیمم و ماکزیمم محاسبه می‌شود. مقادیر بدست آمده در رابطه زیر جایگذاری شده و مدل حل می‌شود.

$$\text{Max } \lambda \qquad 0 \le \lambda \le 1$$
s.t.
$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \ \ge\ Z^- + \lambda(Z^+ - Z^-)$$
$$V \le V^- + (1\text{-}\lambda)(V^+ V^-) = V^+ - \lambda(V^+ - V^-)$$
$$\sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - r_j)x_j = u_t^+ - u_t^- \qquad t = 1,\dots,T,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0,$$
$$0 \le x_j \le U_j, \qquad j = 1,\dots,n$$

با اجرای مدل پیشنهادی حاصل از روش زیمرمن در GAMS مقادیر بدست آمده برای کران بالا و کران پایین ریسک و بازده به شرح جدول شماره (۷) می‌باشد:

جدول شماره (۷): کران بالا و پایین ریسک و بازده

| | |
|---|---|
| $Z^+$ | $4.407 \times 10^9$ |
| $Z^-$ | $3.571 \times 10^9$ |
| $V^+$ | $1.724 \times 10^9$ |
| $V^-$ | $1.707 \times 10^9$ |

جدول شماره (۸) ریسک سرمایه گذاری و بازگشت سرمایه و مقدار به دست آمده برای $\lambda$ را نشان می‌دهد.

جدول شماره (۸): ریسک سرمایه گذاری و بازگشت سرمایه و مقدار به دست آمده برای $\lambda$

| | | |
|---|---|---|
| میزان ریسک سرمایه گذاری | $1.721 \times 10^9$ | V |
| مقدار بازده سبد سهام | $1.009 \times 10^9$ | Z |
| مقدار $\lambda$ | 0.161 | Λ |

مقادیر تخصیص داده شده به ازای هرکدام از دارایی‌ها در مدل پیشنهادی به شرح جدول شماره (۹) می‌باشد:

جدول شماره (۹): نتایج حاصل از مدل زیمرمن

| ردیف | نام دارایی | میزان سرمایه گذاری (تومان) |
|---|---|---|
| ۱ | بانک | ۲۳۰۰۰۰۰۰ |
| ۳ | فولاد | ۱۵۵۸۰۰۰۰ |
| ۴ | خودرو | ۵۰۹۱۹۰۰۰ |
| ۵ | رانفور | ۲۳۰۰۰۰۰۰ |
| ۶ | حکشتی | ۱۰۳۲۷۰۰۰ |

| | | |
|---|---|---|
| ۹ | خساپا | ۲۳۰۰۰۰۰ |
| مجموع سرمایه گذاری | | ۱۰۰۰۰۰۰۰ |

د) پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی

– از روش‌های مختلفی مانند بهینه سازی استوار برای برخورد با عدم قطعیت می‌توان به کار گرفت.

– از روش برنامه‌ریزی آرمانی نیز می‌توان برای تک هدفه کردن مدل استفاده نمود.

– می‌توان از روش‌های فرا ابتکاری نیز برای حل این گونه مسائل بهره گرفت.

– می‌توان سبدهای مختلفی مانند سبدهای ۳۰ سهمی و ۵۰ سهمی و ... را در نظر گرفت و میزان بازده و ریسک آن را محاسبه نمود و نتایج را با هم مقایسه کرد.

– طراحی مدلی که امکان انتخاب صنعت و سهم را به طور همزمان داشته باشد.

– از آنجا که عدم کارایی موجود در بازار اوراق بهادار کشور، روش‌های متکی به داده‌های تاریخی و استفاده از آنها را با ابهام روبروست، از روش‌های دیگری برای انتخاب اوراق بهادار سبد سهام استفاده شود.

## ٤- منابع


Abzari, D. M., Kitabi, D. S., & Abbas Abbasi. (2005). Optimizing the investment portfolio using linear programming methods and providing a functional model. *Journal of Social and Human Sciences of Shiraz University*, *22*(2), 1. (in persian).

Afshar Kazemi, M., Shams Lialestani, M. F., & Kargar, M. (2014). Development of a new model for stock market portfolio optimization using the Markowitz method and its modification by cosine model and its solution by genetic algorithm. *Financial Engineering and Securities Management*, *5*(18), 81-104. (in persian).

Chaharsoghi, S., Al-Badawi, A., & Esfahanipour, A. (2007). Choosing a stock portfolio in the stock exchange with the ranking of industries and companies. *Amirkabir Scientific Research Journal*, *37*(2), 11. (in persian).

Feldt, R. (2015). *Pedagogical Portfolio—Robert Feldt*.

Guderzi, A., Tehrani, R., & Suri, A. (2024). Optimizing the investment portfolio of insurance companies with capiola functions and marginal value approach. *Investment Knowledge*, *13*(49), 325–352. (in persian).

Hossein Khanjarpanah, Mir Sasan Peshwai, & Armin Jabarzadeh. (2015). Fuzzy approach in stock portfolio optimization with flexible constraints. *Research in operations in its applications (applied mathematics)*, *13*,(8). (in persian).

Karimian, N., & Abedzadeh, M. (2012). Minimax optimal planning in multi-objective portfolio selection problem. *Financial Engineering and Securities Management*, *3*(12), 1-15. (in persian).

Khalili Iraqi, M. (2006). Choosing the optimal share price using optimal planning. E*conomic Journal*, *6*(20), 193-214. (in persian).

Khaluzadeh, H., & Amiri, N. (2006). Determining the optimal stock portfolio in the Iranian stock market based on theory. *Journal of Economic Research*, *41*(2). (in persian).

Kotinis, M. (2014). Improving a multi-objective differential evolution optimizer using fuzzy adaptation and K-medoids clustering. *Soft Computing*, *18*(4), 757–771.

Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2014). A new probe guided mutation operator and its application for solving the cardinality constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, *41*(14), 6274–6290.

Marzban, S. (2011). Robust optimization: application in selecting the optimal asset portfolio. Tehran, Tarbiat Moalem University. (in persian).

Rai, R., & Ali Beiki, H. (2010). Optimizing the stock portfolio using the method of cumulative movement of particles. *Financial Research*, *12*(29). (in persian).

Sabahi, S., Rafiei, F., & Rostgar, M. A. (2020). Optimizing the investment portfolio with diverse assets. *Financial Monetary Economics*, *27*(19), 249–278. (in persian).

Seyyed Ahmad Shibat al-Hamdi, Mohammad Hemmati, & Mehdi Esfandiar. (2013). The application of multi-objective genetic algorithm (NSGA II) in choosing the optimal portfolio in the stock exchange. *Journal of Industrial Strategic Management*, *11*(34), 21-33. (in persian).

Sun, J., Fang, W., Wu, X., Lai, C.-H., & Xu, W. (2011). Solving the multi-stage portfolio optimization problem with a novel particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, *38*(6), 6727–6735.

Thapar, A., Pandey, D., & Gaur, S. K. (2012). Satisficing solutions of multi-objective fuzzy optimization problems using genetic algorithm. *Applied Soft Computing*, *12*(8), 2178–2187.

Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, *1*(1), 3–28.

Zhou, R., Yang, Z., Yu, M., & Ralescu, D. A. (2015). A portfolio optimization model based on information entropy and fuzzy time series. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, *14*, 381–397.

# Optimizing the Investment Portfolio Using the Markowitz Model and Fuzzy Multi-Objective Programming (Case Study: Tehran Stock Exchange)

**Shadi Kanaani**
Department of Industrial Engineering, Seraj University, Tabriz, Iran
**Mahdi Yousefi Nejad Attari** (Corresponding Author)
Department of Industrial Engineering, Bonab Branch, Islamic Azad University, Bonab, Iran
E-mail: mahdi_108108@yahoo.com
**Zohreh Khalilpourshiraz**
Department of Industrial Engineering, Bonab Branch, Islamic Azad University, Bonab, Iran

**Abstract**
The stock portfolio optimization model is based on the fact that the future of the company can be predicted and estimated using the company's past data. However, there is no guarantee of the accuracy of this data, as there are many fluctuations in the financial markets. The Markowitz model is based on the selection of the optimal stock to maximize the expected income of the portfolio in determining the share of each stock in the asset portfolio. On the one hand, this model introduces the mathematical expectation of the value of each share in the model. On the other hand, this covariance model considers stock value fluctuations as fixed and exogenous. Therefore, in this research, through Markowitz's theory, a more comprehensive model has been introduced by proposing a new model, which is more efficient than the traditional Markowitz boundary. In this research, multi-objective programming was first used on the issue of stock optimization, and then fuzzy programming was added to it. Risk standard deviation model and Zadeh development theory are among the methods of solving the stock optimization problem in fuzzy state. Also, to solve the problem, the mathematical programming method was used to calculate the upper and lower bounds of the return share. Finally, by explaining the problem and modeling it in Games software, an example of Tehran Stock Exchange has been investigated, which explains the entire investment portfolio optimization model in fuzzy mode. The results of the research show that the risk or standard deviation of returns have the greatest effect on the returns of the stock portfolio. Therefore, investors are suggested to consider risk changes to achieve higher returns.

**Keywords*:*** Fuzzy Planning, Optimization, Stock Portfolio, Markovitz Model, Zimmermann Model.