مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره بیست و ششم / بهار ۱۳۹۵

پیش بینی و ارزیابی ارزش در معرض ریسک یک گام به جلو بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از روش شبیه‌سازی زنجیره مارکف مونت‌کارلو (MCMC)

باقر ادبی فیروزجایی[۱]
محسن مهرآرا[۲]
شاپور محمدی[۳]

تاریخ دریافت: ۹۴/۸/۱۹ تاریخ پذیرش: ۹۴/۱۱/۶

چکیده

بحران مالی جهانی اخیر مشارکت‌کنندگان بازارهای مالی را بر آن داشت تا رویکرد قابل قبولی را برای پوشش ریسک فراهم نمایند. یکی از معیارهای مهم برای این منظور شاخص ارزش در معرض ریسک می‌باشد که در طی دو دهه اخیر وارد ادبیات مالی شده است. به طور معمول سه رویکرد پارامتریک، ناپارامتریک و شبه پارامتریک برای محاسبه و برآورد VaR مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مطالعه روش شبیه‌سازی زنجیره مارکف مونت‌کارلو (MCMC) برای پیش بینی VaR روزانه یک گام به جلو بکار گرفته می‌شود. به طوری که ارزش در معرض ریسک با در نظر گرفتن صدک داده‌های تولید شده از طریق الگوریتم متروپولیس-هاستینگز و فرایندهای تصادفی به‌دست می‌آید. برای بررسی دقت VaR پیش‌بینی شده بر مبنای روش مذکور، آماره‌های پوشش شرطی و غیرشرطی آزمون بازخورد به کار گرفته می‌شوند. نتایج به دست آمده از این تحقیق نشان می‌دهد روش MCMC در پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک شاخص‌های بورس اوراق بهادار تهران دارای عملکرد قابل‌اتکائی بوده و برآوردهای دقیقی از VaR ارائه می دهد.

واژه‌های کلیدی: ارزش در معرض ریسک، زنجیره مارکف مونت‌کارلو، الگوریتم متروپولیس-هاستینگز، آزمون بازخورد.

۱- دانشجوی دکتری اقتصاد دانشگاه تهران bagheradabi@gmail.com
۲- استاد دانشکده اقتصاد دانشگاه تهران mmehrara@ut.ac.ir
۳- دانشیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران shmohammadi@gmail.com

۱- مقدمه

به طور کلی تعریف، شناسایی و مدیریت ریسک از مباحث مهم و کلیدی بازارهای مالی به شمار می رود. به عبارت دیگر برای شرکت ها، نهادها و موسسات مالی که همواره در معرض انواع مختلفی از ریسک قرار دارند، کمی سازی و ارزیابی ریسک بسیار ضروری می باشد. از طرفی با توجه به زیان های قابل توجهی که در بحران مالی ۲۰۰۹-۲۰۰۷ به وقوع پیوست، ارزیابی مجدد از سیستم مدیریت ریسک و نیز ابزارهای مورد استفاده برای اندازه‌گیری آن مورد توجه جهانی قرار گرفته است. یک رویکرد قدرتمند برای مدیریت ریسک و اندازه‌گیری ریسک، معیار ارزش در معرض ریسک (VaR)[1] می‌باشد که در سال ۱۹۹۴ توسط جی.پی.مورگان[2] ارائه گردید. ارزش در معرض ریسک بیانگر حداکثر زیان احتمالی است که یک سرمایه‌گذار در طی یک دوره زمانی معین در آینده و با یک سطح اطمینان مشخصی با آن مواجه است. در واقع ارزش در معرض ریسک، ریسک محاسبه شده را به صورت یک عدد نشان می دهد و به همین دلیل به عنوان یک معیار رایج به طور گسترده‌ای توسط نهادهای مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

بر اساس پیمان بازل در سال ۱۹۹۶ مقرر شد که نهادهای مالی برای پوشش زیان‌های غیر منتظره، سرمایه کافی نگهداری نمایند به طوری که VaR را به عنوان معیار رسمی از ریسک بازاری برای تعیین میزان هزینه‌های سرمایه‌ای یا حد کفایت سرمایه پیشنهاد نمودند. در حال حاضر علیرغم محدودیت‌های مربوط به ویژگی‌های ریاضی VaR و نیز اثرات بی‌ثبات کننده آن بر فعالیت های مالی، ارزش در معرض ریسک همچنان به عنوان یک معیار مهمی از شاخص ریسک و نیز یک ابزار کلیدی برای مدیریت ریسک نهادهای مالی در نظر گرفته می‌شود و نهادهایی که وظیفه نظارت و سازماندهی بازارهای گوناگون را بر عهده دارند آن را به عنوان استانداردی برای مدیریت یکپارچه ریسک می‌شناسند. تعدادی از این سازمان‌ها شامل بازار بورس اوراق بهادار نیویورک، کمسیون نظارت بر بورس و اوراق بهادار آمریکا (SEC)[3]، بانک فدرال رزرو آمریکا، بانک تسویه حساب‌های بین‌المللی (BIS)[4]، کمیته بازل ناظر بر امور بانکی (BCBS)[5]، بانک‌های مرکزی، بیمه‌های مرکزی و بازارهای بورس اکثر کشورهای جهان می باشند.

اگرچه ارزش در معرض ریسک دارای مفهوم ساده و قابل درکی می باشد اما محاسبه و برآورد آن مساله دشواری است. در واقع یافتن توزیع احتمال بازدهی که در طول زمان ثابت نیست مشکلاتی را برای برآورد مقادیر بحرانی در سطح احتمال مورد نظر و بالطبع برای محاسبه ارزش در معرض ریسک ایجاد می‌کند. در حالت کلی سه روش عمده برای محاسبه و برآورد VaR وجود دارد که شامل رویکردهای پارامتریک، ناپارامتریک و شبه‌پارامتریک می‌باشد. در روش ناپارامتریک هیچ محدودیتی بر توزیع بازدهی‌ها وضع نمی‌شود و VaR بر اساس صدک توزیع تجربی بازدهی‌های تاریخی و یا صدک بازدهی‌های پیش‌بینی شده محاسبه می‌شود. روش شبیه‌سازی تاریخی و شبیه‌سازی مونت‌کارلو جز این رویکرد می‌باشند. در رویکرد کاملا پارامتریک VaR بر اساس فروض مشخص درباره نوع توزیع بازدهی و نیز در مورد پویایی‌های مدل نوسان، برآورد می‌شود. مدل‌های نوسان نوع GARCH و مدل ریسک‌سنجی جز این دسته می‌باشند. نهایتا در رویکرد شبه‌پارامتریک در مورد پویایی‌های مدل، پیش فرض می‌گذارند اما پیش فرضی بر توزیع خطا

وضع نمی‌شود. روش شبیه‌سازی تاریخی با نوسانات وزنی و روش شبیه‌سازی تاریخی فیلتر شده از این نوع می‌باشند. واضح است که یک روش پذیرفته شده واحدی برای برآورد ارزش در معرض ریسک وجود ندارد به طوری که مقادیر VaR محاسبه شده با استفاده از رویکردهای مختلف دارای تفاوت معنی‌داری با یکدیگر می باشند. بنابراین ارزیابی دقت VaR اندازه‌گیری شده توسط مدل‌های مختلف دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشد که این امر از طریق آزمون بازخورد انجام می‌گیرد.

هدف از این مطالعه پیش‌بینی یک گام به جلوی ارزش در معرض ریسک روزانه بر مبنای روش شبیه‌سازی زنجیره مارکف مونت کارلو (MCMC)[۶] می‌باشد. در واقع برآورد VaR در این روش همانند رویکرد ناپارامتریک بر مبنای انتخاب صدک توزیع بازدهی‌ها می‌باشد به صورت دقیق‌تر در این روش همانند روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو، ارزش در معرض ریسک با انتخاب صدک توزیع بازدهی‌های بازتولیدشده به‌دست می‌آید. توجه شود در شبیه سازی مونت کارلو، تولید بازدهی‌ها بر اساس فرایندهای تصادفی صورت می‌گیرد اما در روش MCMC تولید سری داده بازدهی‌ها از طریق الگوریتم نمونه‌گیری متروپولیس-هاستینگز[۷] صورت می‌گیرد که توضیح آن در ادامه بیان خواهد شد. به طور خلاصه در این مقاله سعی بر این است که با استفاده از روش مذکور، ارزش در معرض ریسک برای پنج شاخص بورس اوراق بهادار تهران برآورد گردد و هم چنین دقت ارزش در معرض ریسک پیش بینی شده به کمک آماره‌های آزمون بازخورد[۸] مورد ارزیابی قرار گیرد.

ساختار کلی این مقاله به این صورت می‌باشد که در ادامه و در قسمت دوم به مرور ادبیات نظری مرتبط با ارزش در معرض ریسک و نیز تشریح روش MCMC پرداخته می‌شود در قسمت سوم آماره‌های آزمون بازخورد ارائه می گردد یافته‌های تحقیق در قسمت چهارم مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند و در قسمت پنجم یک نتیجه‌گیری کلی از این مقاله ارائه می‌گردد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

همان طور که بیان شد، مفهوم ارزش در معرض ریسک را می‌توان به عنوان حداکثر زیان یک موقعیت مالی در طی یک دوره زمانی مشخص (یک روز، یک هفته یا یک ماه) و با یک سطح احتمال معین تعریف کرد. به عبارت دیگر، VaR بدترین زیان موردانتظار را تحت شرایط عادی بازار و طی یک دوره زمانی مشخص و در سطح اطمینان معین اندازه می‌گیرد. بر اساس تعریف، ارزش در معرض ریسک دارای دو پارامتر مهم است یکی افق زمانی که به صورت تعداد روز نشان داده می‌شود و دیگری فاصله اطمینان می باشد. به طور کلی با فرض اینکه افق زمانی N روز و سطح اطمینان $C=1-\alpha$ درصد باشد و نیز مبلغ تحت ریسک یا میزان ارزش در معرض ریسک (که بر حسب واحد پول بیان می‌شود) برابر VaR باشد تفسیر آن به این صورت می‌باشد که کاهش ارزش سبد دارایی در N روز بعد با احتمال C از مقدار VaR بیشتر نمی‌شود. به عبارت ساده‌تر ما ($۱۰۰-\alpha$) درصد اطمینان داریم که طی N روز آتی، قطعاً بیشتر از مبلغ VaR متحمل زیان نخواهیم شد. به بیان ریاضی می توان نوشت:

$$\Pr(V_{t+1} - V_t \leq |\ VaR_{t+1}^{C}\ |) \geq 1 - \alpha \quad \text{یا} \quad \Pr(V_{t+1} - V_t \geq |\ VaR_{t+1}^{C}\ |) \leq \alpha \qquad \text{رابطه ۱}$$

که V_t ارزش سبد دارایی در زمان حال و V_{t+1} ارزش سبد در زمان آتی می‌باشد α نیز سطح خطای آماری است. رابطه فوق بیان می‌کند احتمال این که کاهش ارزش سبد دارایی در دوره آتی، بیش از ارزش در معرض ریسک باشد، حداکثر برابر α است. یا احتمال این که زیان سبد دارایی در دورهٔ آتی کمتر از ارزش در معرض ریسک باشد حداقل برابر α-۱ است. البته رابطه فوق را بر حسب نرخ بازدهی‌ها (r_t) می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\Pr(r_{t+1} \leq |\ VaR_{t+1}^{C}\ |) \geq 1 - \alpha \quad \text{یا} \quad \Pr(r_{t+1} \geq |\ VaR_{t+1}^{C}\ |) \leq \alpha \qquad \text{رابطه ۲}$$

با توجه به موارد ذکر شده، ارزش در معرض ریسک را می‌توان به صورت صدک α-۱ ام احتمال توزیع بازدهی‌ها تعریف کرد

$$VaR_{t+1}^{C} = -Q_{1-\alpha}(r_{t+1}|\ \Omega_t) = -inf(r \in R{:}\,P(r_{t+1} \leq VaR|\ \Omega_t \geq 1 - \alpha) \qquad \text{رابطه ۳}$$

که در آن Q نماد صدک Ω_t اطلاعات موجود در دوره قبل می‌باشد.
به طور معمول فرض بر این است که سری زمانی بازدهی دارایی‌های مالی $\{r_t\}_{t=1}^{T}$ از یک فرآیند تصادفی به صورت زیر تبعیت می‌کند:

$$\begin{aligned} r_t &= E(r_t|\ \Omega_{t-1}) + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t z_t \\ z_t &\sim iid(0,1), \quad E(\varepsilon_t|\ \Omega_{t-1}) = 0, \qquad \sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2|\ \Omega_{t-1}) \end{aligned} \qquad \text{رابطه ۴}$$

که در آن μ_t و σ_t^2 به ترتیب بیانگر میانگین شرطی و واریانس شرطی بازدهی‌ها در دوره t با توجه به اطلاعات دوره t-1 می باشد. ε_t شوک بازدهی‌ها و Z_t متغیر iid با میانگین ۰ و واریانس ۱ می‌باشد. در این صورت ارزش در معرض ریسک در سطح اطمینان C و با اطلاعات دوره قبل برابر خواهد بود با:

$$VaR_t^{c} = -Q_{1-\alpha}(r_t|\ \Omega_{t-1}) = -\left(\mu_t + \sigma_t Q_{1-\alpha}(z)\right) \qquad \text{رابطه (۵)}$$

که در آن $Q_{1-\alpha}(z)$ ، صدک $(1-\alpha)$ ام توزیع شوک بازدهی ها (z) می‌باشد. همان طور که ملاحظه می‌شود در رابطه (۴) ارزش در معرض ریسک هم بر اساس صدک توزیع بازدهی‌ها (r) و هم بر اساس صدک توزیع z تعریف می‌شود. حال اگر فرض کنیم r به ترتیب دارای تابع چگالی f و تابع توزیع تجمعی F باشد و نیز تابع چگالی و تابع توزیع z به ترتیب g و G باشد در آن صورت می توان نشان داد:

$$Q_{1-\alpha}(r) = -F_r^{-1}(1-\alpha), \qquad Q_{1-\alpha}(z) = -G_z^{-1}(1-\alpha)$$ رابطه ۶

بنابراین در حالت کلی ارزش در معرض ریسک برای دوره بعد و با سطح اطمینان c به دو شکل زیر برآورد می‌شود:

$$VaR_{t+1}^{c} = F_r^{-1}(1-\alpha) = -Q_{1-\alpha}(r)$$ رابطه ۷-۱

$$VaR_{t+1}^{c} = \sigma_t G_z^{-1}(1-\alpha) - \mu_t$$ رابطه ۷-۲

طبق رابطه اخیر، محاسبه ارزش در معرض ریسک بستگی به معکوس تابع توزیع تجمعی بازدهی‌ها و یا برآورد واریانس شرطی و تعیین نوع توزیع z دارد. در واقع بسته به انتخاب رابطه ۷-۱ یا ۷-۲ و یا تلفیقی از این دو برای محاسبه ارزش در معرض ریسک، نوع رویکرد VaR تبیین می‌شود. به عبارت دیگر در رویکرد پارامتریک، ارزش در معرض ریسک بر اساس رابطه ۷-۲ برآورد می‌شود به این صورت که میانگین و واریانس شرطی بازدهی‌ها بر اساس معادلات نوسان GARCH و یا مدل ریسک‌سنجی پیش‌بینی می‌گردد و با معین بودن نوع توزیع شوک بازدهی‌ها (معمولا توزیع نرمال یا توزیع تی‌استیودنت) و نیز مقدار صدک آن، ارزش در معرض ریسک برآورد می‌شود. رویکرد ناپارامتریک مبتنی بر رابطه ۷-۱ می‌باشد به طوری که VaR بر مبنای صدک توزیع بازدهی‌ها پیش بینی می‌شود. دو روش اصلی این رویکرد، شبیه‌سازی تاریخی و شبیه‌سازی مونت‌کارلو می‌باشد. رویکرد شبه‌پارامتریک از ترکیب دو رویکرد پارامتریک و ناپارامتریک به‌دست می‌آید، ابتدا بر مبنای رویکرد پارامتریک، نوسانات بازدهی‌ها پیش‌بینی می‌شود و سپس سری زمانی بازدهی‌های تجربی بر اساس نوسانات پیش‌بینی شده تعدیل می‌گردد و در پایان، VaR از طریق صدک بازدهی‌های تعدیل یافته بر مبنای رویکرد ناپارامتریک به‌دست می‌آید. روش‌های شبیه‌سازی تاریخی با نوسانات وزنی و شبیه‌سازی تاریخی فیلتر شده در این رویکرد قرار می‌گیرند.

رویکرد جدیدی که در این مقاله مطرح می‌شود، روش زنجیره مارکف مونت کارلو (MCMC) می‌باشد. به طور کلی روش MCMC برای محاسبه و برآورد ارزش در معرض ریسک بسط یافته روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو است. به عبارت دیگر در شبیه‌سازی مونت‌کارلو، مسیرهای مختلف قیمتی سهام طی پنج مرحله اصلی و با استفاده از مدل‌های تصادفی و اجرای شبیه‌سازی‌های متعدد کامپیوتری به دست می‌آید و نهایتا VaR از طریق انتخاب صدک توزیع بازدهی‌های مستخرج از قیمت‌های تولید شده پیش‌بینی می‌شود[۹]. نکته قابل توجه این است که در پیش‌بینی قیمت‌ها در فرایند تولید داده در روش مونت‌کارلو، میانگین و واریانس توزیع بازدهی‌ها ثابت در نظر گرفته می‌شوند ولی در شبیه‌سازی MCMC میانگین و واریانس بکار گرفته شده در معادله قیمتی ثابت نمی‌باشند و بر اساس الگوریتم‌های نمونه‌گیری ایجاد می‌گردند که در ادامه به تشریح آن پرداخته می‌شود.

روش زنجیره مارکف مونت کارلو

به طور کلی هدف استنتاج آماری، یادگیری در خصوص پارامترهایی است که فرایند تولید داده را با توجه به داده‌های مشاهده شده مشخص می‌کند. در رویکردهای معمول و سنتی برای استنتاج آماری فرض می‌شود که پارامترها ثابت و دارای مقادیر نامشخصی می‌باشند. اما هنگام انجام استنتاج بیزینی فرض‌های بنیادی به مقدار زیادی تغییر خواهد کرد به طوری که بردار پارامترهای نامشخص به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند در حالی که داده‌های سری زمانی به عنوان مقادیر ثابت در نظر گرفته می‌شوند. پارامترهای غیرقابل مشاهده شده به صورت ماهیت احتمالی در نظر گرفته شده، در حالی‌که داده‌های مشاهده شده معین در نظر گرفته می‌شوند (مرزبان و همکاران ۱۳۹۲).

در واقع تحلیل بیزینی که متکی بر تئوری بیز می‌باشد بیانگر این مطلب مهم است که چگونه می‌توان با استفاده از ترکیب اطلاعات و دانش گذشته و داده‌های موجود، یک نمونه از اطلاعات پسین به دست آورد. به همین منظور فرض کنید θ بردار پارامترها و y مجموعه داده‌های موجود باشند در این صورت تئوری بیز برای حالت پارامتر های پیوسته را می توان به صورت زیر نشان داد.

رابطه ۸
$$P(\theta|\ y) = \frac{P(\theta|\ y)P(\theta)}{P(y)}$$

از آنجایی که تمرکز اصلی در اقتصادسنجی بر روی پارامترها است و در اقتصادسنجی بیزینی به‌دست آوردن توزیع پسین پارامترها دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشد به همین دلیل می توان P(y) را نادیده گرفت و رابطه فوق را به صورت زیر بازنویسی یا معادل‌سازی کرد.

رابطه ۹
$$P(\theta|\ y) \simeq P(\theta|\ y)P(\theta)$$

که در آن $P(\theta)$ ، $P(y|\ \theta)$ و $P(\theta|\ y)$ به ترتیب بیانگر توزیع پیشین پارامترها، تابع راستنمایی و توزیع پسین پارامترها می باشد. توزیع پیشین مستقل از داده‌هاست و شامل تمام اطلاعات موجود درباره مقادیر پارامترها قبل از مشاهده داده‌ها است. تابع راستنمایی در بر گیرنده داده‌های شرطی است و آز آن به عنوان فرایند تولید داده نام برده می‌شود. توزیع پسین یک توزیع شرطی از پارامترهاست که پس از وقوع و مشاهده داده‌ها به‌دست می‌آید که هدف اصلی استنتاج بیزینی است.

به طور کلی توزیع‌های پیشین می‌توانند اشکال مختلفی به خود بگیرند اما معمولا برای ساده‌سازی محاسباتی توزیع‌های پیشین مشترک[۱۰] در نظر گرفته می‌شود برای درک بیشتر تعریف زیر ارائه می گردد:

تعریف: فرض کنید چگالی پیشین $P(\theta)$ متعلق به یک دسته از توابع چگالی F پارامتریک باشد در این صورت اگر چگالی پسین $P(\theta|\ y)$ نیز در دسته F قرار داشته باشد در آن صورت گفته می شود چگالی پیشین با توجه به تابع راستنمایی در هم آمیخته شده است.

در واقع طبق این تعریف، یک توزیع پیشین مشترک دارای فرم تابعی یکسان با تابع راستنمایی می‌باشد و همچنین تابع توزیع پسینی که به دست می‌آید دارای تابع توزیع یکسانی با آن خواهد بود.

یکی از مهمترین تکنیک برای استنتاج بیزین و یا به طور ویژه شبیه‌ساز توزیع پسین، روش شبیه‌سازی تصادفی زنجیره مارکف مونت کارلو (MCMC) می‌باشد. در تکنیک MCMC نمونه‌گیری بر مبنای ساختار زنجیره مارکف است که نهایتا به توزیع هدف (یا توزیع پسین) همگرا می‌شود. یکی از الگوریتم‌های مهم نمونه‌گیری به شیوه MCMC، الگوریتم متروپولیس-هاستینگز (MH) می‌باشد. این الگوریتم یک مجموعه از قوانین پرش[11] را تعریف می‌کند و بر اساس آن در یک زنجیره مارکفی با توجه به مراحل تکراری زیر، نمونه‌ای به حجم T تولید می‌کند.

مرحله ۱. تعیین مقادیر اولیه پارامترها (θ^0)

مرحله ۲. انجام مراحل زیر برای تکرارهای $t=1,2,\ldots,T$

الف. انتخاب مقدار جدید (θ^*) از توزیع هدف یا توزیع پرش ، $J_t(\theta^*,\theta^{t-1})$

ب. محاسبه نسبت پذیرش (r) $r=\frac{P(\theta^*|\ y)J_t(\theta^*,\theta^{t-1})}{P(\theta^{t-1}|\ y)J_t(\theta^{t-1},\theta^*)}$

ج. محاسبه $\alpha=\min(1,r)$

د. به روز رسانی پارامترها به صورت زیر

$$\theta^t=\begin{cases}\theta^* & \text{with } \alpha \text{ probability}\\ \theta^{t-1} & \text{with} (1-\alpha) \text{ probability}\end{cases}$$

در این مطالعه برای انجام شبیه سازی MCMC فرض بر این است که داده‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین (μ) و واریانس (σ^2) نامعلوم می‌باشند. و نیز برای ساده‌سازی از دسته توزیع های مشترک نرمال معکوس کای‌دو برای دو پارامتر مورد نظر استفاده می‌شود. در این صورت توزیع پیشین ساده شده[12] به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

رابطه ۱۰
$$P(\mu,\sigma^2)\sim\frac{1}{\sigma^2}$$

این توزیع ایجاب می کند که توزیع پسین به صورت زیر باشد

رابطه ۱۱
$$P(\mu,\sigma^2|\ y)=(\frac{1}{\sigma^2})^{0.5n+1}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)s^2+n(\bar{y}-\mu)^2]\}$$

که در آن $\bar{y}$ و s^2 به ترتیب بیانگر میانگین و واریانس نمونه n تایی از داده‌های موجود y می‌باشند.

حال با فرض اینکه $\theta_1=\mu$ و $\theta_2=\sigma^2$ باشد الگوریتمی را برای شبیه‌سازی توزیع پسین به کار می‌گیریم. در واقع هدف در اینجا پیاده سازی الگوریتم MH برای به روز کردن دو پارامتر مذکور می‌باشد که برای این امر بحث را با توزیع پرش شروع می‌کنیم. ابتدا از توزیع یکنواخت برای پارامتر θ_1 استفاده می‌کنیم به این دلیل که فرایند شبیه سازی را ساده‌تر می‌سازد و نیز اینکه یک توزیع متقارن می‌باشد. در مرحله t ام حلقه مارکف بایستی مقدار جدیدی برای θ_1 بر اساس توزیع زیر شبیه‌سازی گردد

رابطه ۱۲
$$\theta^{*} \sim U[\theta_1^{t-1} - d_1, \theta_2^{t-1} + d_1]$$

که در آن $U[x_1,x_2]$ توزیع یکنواخت در محدوده $x_1 \leq x \leq x_2$ و d_1 بیانگر حداکثر طول پرش می باشد به طور جایگزین این رابطه را می توان به صورت زیر نشان داد

رابطه ۱۳
$$\theta^{*} = \theta_1^{t-1} + X \quad , \quad X \sim U[-d_1,d_1]$$

برای پارامتر غیر منفی θ_2 در نظر گرفتن توزیع یکنواخت امکان پذیر نمی‌باشد به خاطر اینکه امکان ایجاد مقادیر منفی برای آن وجود دارد به همین دلیل با تغییر متغیر $\varphi = Log(\theta_2)$ می‌توان توزیع یکنواخت را به صورت زیر در نظر گرفت

رابطه ۱۴
$$\varphi^{*} = \varphi_1^{t-1} + Z \quad , \quad Z \sim U[-d_2,d_2]$$

در این صورت توزیع پرش بر حسب توزیع پرش را به صورت زیر تبیین می شود

رابطه ۱۵
$$J_t(\theta_2^{*}|\ \theta_2^{t-1}) = J_t(\varphi^{*}|\ \varphi^{t-1})|\ \frac{d\varphi}{d\theta_2}\ | = J_t(\varphi^{*}|\ \varphi_2^{t-1})\frac{1}{\theta_2^{*}}$$

نسبت چگالی‌های توزیع پرش بکار گرفته شده در الگوریتم MH را می‌توان به صورت زیر نوشت

رابطه ۱۶
$$\frac{J_t(\theta_2^{*}|\ \theta_2^{t-1})}{J_t(\theta_2^{t-1}|\ \theta_2^{*})} = \frac{J_t(\varphi^{*}|\ \varphi^{t-1})/\theta_2^{*}}{J_t(\varphi^{t-1}|\ \varphi^{*})/\theta_2^{t-1}}$$

با توجه به اینکه توزیع یکنواخت یک توزیع متقارن است به طوری که $J_t(\varphi^{t-1}|\ \varphi^{*}) = J_t(\varphi^{*}|\ \varphi^{t-1})$ می‌شود در این صورت نسبت فوق به صورت زیر تبیین می‌گردد

رابطه ۱۷
$$\frac{J_t(\theta_2^{*}|\ \theta_2^{t-1})}{J_t(\theta_2^{t-1}|\ \theta_2^{*})} = \frac{\theta_2^{t-1}}{\theta_2^{*}}$$

واضح است که بعد از هر تکرار برای تولید φ^{*} مقدار پارامتر مورد نظر به آسانی به صورت $\theta_2^{*} = \exp(\varphi^{*})$ به دست می‌آید.

نکته مهمی که هنگام به‌کارگیری روش MCMC بایستی به آن توجه شود زمان توقف شبیه‌سازی است. در واقع زنجیره باید تا زمانی ادامه یابد که همگرایی حاصل شود. برای این منظور تعدادی از تکرارهای ابتدایی به اصطلاح در دوره سوخت[۱۳]، دور ریخته می‌شود. برای تعیین طول زنجیره و نیز تعداد دوره سوخت روش‌های نظری و تقریب‌های مختلفی ارائه شده است که از مهمترین آنها می توان به دیدگاه گه‌یر (۱۹۹۲) اشاره کرد. به عقیده وی برای یک زنجیره با طول مناسب برای رسیدن به دقت مطلوب، محاسبه طول دوره سوخت ضرورتی ندارد و می‌توان آن را کمتر از یک درصد طول کل زنجیره در نظر گرفت و در صورتی که از مقادیر اولیه پرت خودداری شود، طول دوره سوخت را بین ۱ و ۲ درصد طول کل زنجیره پیشنهاد می‌کند.

۳- مدل‌های پژوهش

هر چند ارزش در معرض ریسک به عنوان یکی از رایج ترین معیار اندازه گیری ریسک در اقتصاد مالی به کار گرفته می شود، اما توجه شود مدل های VaR تنها در صورتی سودمند و قابل استفاده می باشند که مقدار ریسک را در آینده به طور دقیقی پیش بینی نمایند. به همین خاطر دقت برآوردهای VaR توسط مدل های مختلف بایستی مورد آزمون قرار گیرند. از طرفی به دلیل اینکه ارزش در معرض ریسک واقعی را نمی توان مشاهده کرد، ارزیابی پیش بینی آن از بسیاری جهت با پیش بینی متغیر های دیگر متفاوت است. به عبارت دیگر در حالی که نگرانی اصلی در مدل های پیش بینی معمول این است که، تا چه اندازه پیش بینی ها به داده های واقعی نزدیک هستند، در مدل های VaR نگرانی عمده این است که چند مرتبه مقدار زیان واقعی از مقدار زیان پیش بینی شده توسط VaR بزرگتر است. لذا بسیاری از معیارهای رایج در سنجش دقت مدل های پیش بینی مانند میانگین مجذور خطا (MSE) و میانگین قدر مطلق درصد خطا در پیش بینی های VaR کاربردی ندارد. به همین خاطر برای ارزیابی مدل های VaR از آزمون بازخورد استفاده می شود. در این قسمت چهار نوع از آماره های این آزمون ارائه می گردد.

۳-۱-آزمون نسبت شکست (POF) کوپیک[۱۴]

این آزمون در سال ۱۹۹۵توسط کوپیک ارائه شد که در آن تعداد خطا ها و یا تعداد شکست های مرتبط با مدل VaR، پارامتر مهمی به شمار می رود. در واقع تعداد خطاها (x) بیانگر تعداد روزهایی می باشند که زیان های رخ داده شده از مقدار VaR برآورد شده بزرگتر می باشد. کوپیک نشان داد با فرض این که احتمال وقوع هر خطا ثابت در نظر گرفته شود در این صورت تعداد کل خطاها از یک توزیع دو جمله ای $B(T,\alpha)$ پیروی می کند. که T تعداد کل مشاهدات برون نمونه ای می باشد در این صورت $(\widehat{\alpha}=\frac{X}{T})$ بیانگر نرخ شکست می باشد و فرضیه صفر بر اساس این آزمون پوشش غیر شرطی است به صورت زیر می باشد

$$H_0: \alpha = \widehat{\alpha} = \frac{X}{T}$$
رابطه ۱۸

که در آن α سطح احتمال مورد نظر و یا نسبت شکست مورد انتظار می باشد و $\widehat{\alpha}$ نسبت شکست واقعی می باشد در واقع تحت فرضیه صفر مدل در صورتی صحیح است که تعداد خطاهای واقعی (x) برابر تعداد خطاهای انتظاری $(\alpha.T)$ باشد. در این صورت آماره نسبت راستنمایی این آزمون به صورت زیر تبیین می شود

$$LR_{POF} = 2Ln\left[\frac{\widehat{\alpha}^x(1-\widehat{\alpha})^{T-x}}{\alpha^x(1-\alpha)^{T-x}}\right]$$
رابطه ۱۹

این آماره دارای توزیع χ^2 با درجه آزادی ۱ می باشد و اگر مقدار از مقدار بحرانی توزیع χ^2 بیشتر باشد فرضیه صفر رد می شود و مدل برآورد VaR نامعتبر می باشد در غیر صورت دقت ارزش در معرض ریسک محاسبه شده تایید می گردد.

۳-۲- آزمون زمان وقوع اولین شکست (TUFF) کوپیک[۱۵]

کوپیک همچنین یک نوع آزمون پوشش غیر شرطی دیگری را در سال ۱۹۹۵ مطرح نمود که در آن زمانی (روزی) که اولین خطا به وقوع می پیوندد (v)، دارای اهمیت ویژه ای است. این آزمون همانند آزمون POF کوپیک فرض می کند که تعداد شکست ها از توزیع دو جمله ای پیروی می کند. فرضیه صفر آن به صورت زیر می باشد

رابطه ۲۰
$$H_0: \alpha = \widehat{\alpha} = \frac{1}{v}$$

در این حالت آماره نسبت راستنمایی این که نیز دارای توزیع $\chi^2(1)$ می باشد، به صورت زیر بیان می شود

رابطه ۲۱
$$LR_{TUFF} = 2Ln\left[\frac{\frac{1}{v}\left(1-\frac{1}{v}\right)^{v-1}}{\alpha(1-\alpha)^{v-1}}\right]$$

اگر مقدار این آماره از مقدار بحرانی آن کمتر باشد، صحت مدل مورد نظر پذیرفته می شود در غیر این صورت فرضیه صفر رد می گردد.

۳-۳- آزمون وقفه پیش بینی کریستفرسن[۱۶]

بر اساس تئوری، یک مدل VaR خوب نه تنها بایستی دارای تعداد خطاهایی نزدیک تعداد خطاهای باشد بلکه خطاها بایستی به طور یکنواخت در طول زمان توزیع شوند به عبارت دیگر خطاها باید مستقل از یکدیگر باشند.کریستفرسن (۱۹۹۸) یک آزمون پوشش شرطی را مطرح نمود که بر مبنای آن برابری نسبت شکست های واقعی با نسبت شکست پیش بینی، مورد هدف نیست بلکه استقلال سریالی خطا ها را مورد آزمون قرار می دهد. در واقع آماره آزمون استقلال کریستفرسن همانند آزمون های پوشش غیر شرطی از نوع نسبت احتمال می‌باشد و فرض صفر استقلال را در برابر فرض وابستگی مرتبه اول مارکوف آزمون می کند. اگر مدل دقیق باشد در آن صورت نباید خطای امروز به خطایی که در روز قبل رخ داده، وابسته باشد به عبارت دیگر خطا ها برای روزهای متوالی رخ ندهند. در واقع تحت فرضیه صفر احتمال های π_0 و π_1 بایستی معادل هم باشند.آماره نسبت لایکلیهود این آزمون همانند دو آماره فوق دارای توزیع کای دو با درجه آزادی ۱ است و به صورت زیر بیان می شود.

$$LR_{ind} = -2Ln\left(\frac{(1-\pi)^{n_{00}+n_{10}}\pi^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\pi_0)^{n_{00}}\pi^{n_{01}}(1-\pi)^{n_{10}}\pi^{n_{11}}}\right)$$

رابطه ۲۲

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}, \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}, \pi = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}$$

که در آن $n_{i,j}$ بیانگر تعداد مشاهداتی است که در آن‌ها حالت j بعد از i روی داده است به عنوان مثال n_{01} بیانگر تعداد مشاهداتی است که برای روزهای متوالی، عدم خطا در روز اول با وقوع خطا در روز دوم همراهی می شود و π_i بیانگر احتمال مشاهده یک خطا شرطی در وضعیت i برای روز قبل می باشد.

۳-۴- آزمون مشترک یا ترکیبی[۱۷]

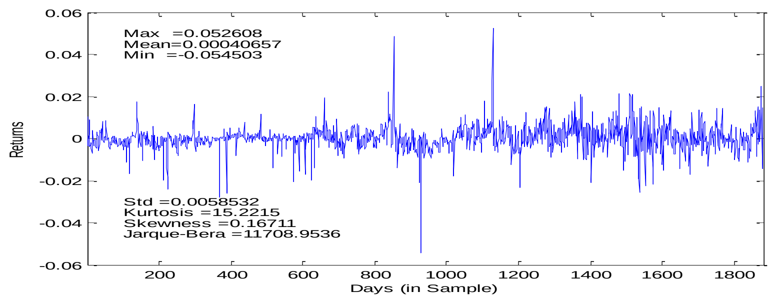
این آزمون از ترکیب آزمون استقلال کریستفرسن و آزمون پوشش غیر شرطی POF کوپیک بدست می آید در واقع بر اساس این آزمون نه تنها برابری خطا های انتظاری با خطا های واقعی در نظر گرفته می شود بلکه استقلال سریالی خطا ها نیز مورد بررسی قرار می گیرد. آماره نسبت درستنمایی پوشش شرطی دارای توزیع کای دو با در جه آزادی ۲ می باشد و به صورت زیر بیان می شود.

رابطه ۲۳ $$LR_{cc} = LR_{POF} + LR_{IND}$$

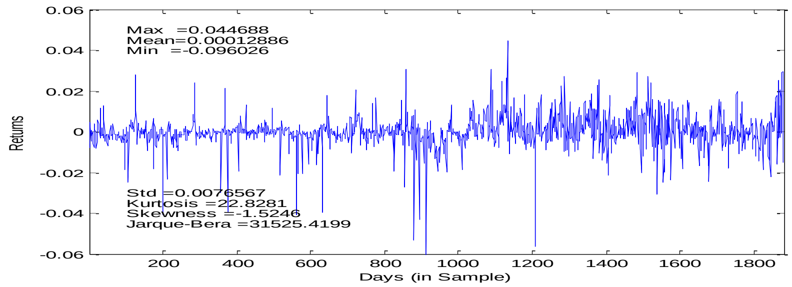
۴- نتایج پژوهش

۴-۱- آمار توصیفی دادهها

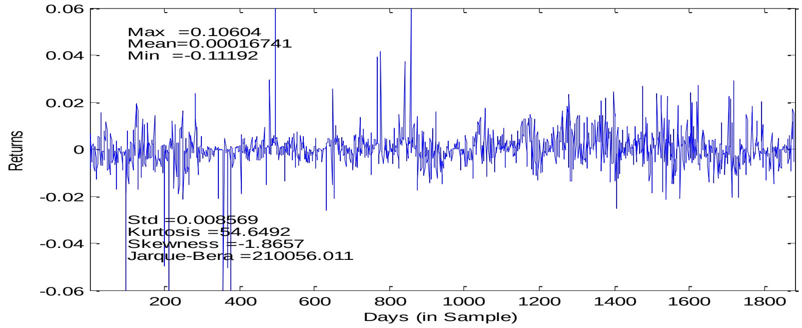
در این مطالعه از دادههای روزانه پنج شاخص بورس اوراق بهادار تهران شامل شاخص کل، شاخص قیمت و بازده نقدی، شاخص صنعت، شاخص ۵۰ شرکت برتر و شاخص واسطه گری های پولی و مالی در بازه زمانی ۲۴ شهریورماه سال ۱۳۸۳ تا ۲۴ شهریورماه سال ۱۳۹۳ استفاده شده است. بازهی مذکور شامل ۲۳۵۰ مشاهده است که به دو قسمت درون نمونهای شامل ۲۱۵۰ مشاهده ابتدایی به منظور برآورد ارزش در معرض ریسک و قسمت برون نمونهای شامل ۲۰۰ مشاهده پایانی برای انجام آزمون بازخورد، تقسیم شده است. سری زمانی داده های بازدهی روزانه از رابطه $r_t = \ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$ محاسبه می شود که در آن p_t بیانگر شاخص روزانه می باشد. نمودار سری زمانی بازدهی روزانه برای شاخص های منتخب در بازه زمانی ذکر شده در نمودار ۱ نشان داده می شود.



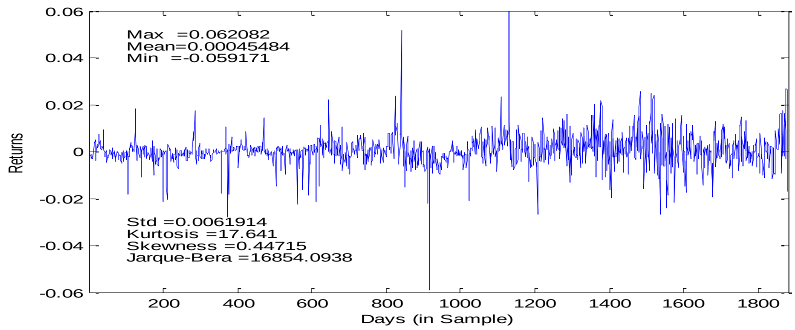
a



b



c



d

شکل ۱. نمودار سری زمانی بازدهی روزانه a)شاخص کل b)شاخص ۵۰ شرکت برتر c) شاخص واسطه گری d) شاخص صنعت e) شاخص قیمت و بازده نقدی

جدول (۱) برخی از آماره‌های توصیفی بازدهی های شاخص های مذکور را نشان می‌دهد. مشاهده می شود بیشترین و کمترین بازدهی به ترتیب مربوط به شاخص قیمت و بازده نقدی با میانگین ۰/۰۰۰۶۱ و شاخص ۵۰ شرکت برتر با میانگین ۰/۰۰۰۱ می باشد. بر اساس اطلاعات انحراف معیار بازدهی شاخص ها، ملاحظه می شود که شاخص کل کمترین ریسک و شاخص واسطه گری بیشترین ریسک را دارا می باشند. ضریب چولگی برای شاخص کل و شاخص صنعت هر چند مثبت ولی مقدار آن کوچک و نزدیک به صفر می‌باشد که بیانگر این است که توزیع بازدهی این دو شاخص نزدیک به توزیع متقارن می‌باشد. از طرفی منفی بودن این ضریب برای بازدهی های دو شاخص ۵۰ شرکت برتر و شاخص واسطه گری دلالت بر چولگی منفی این دو توزیع دارد و این در حالی است که شکل توزیع بازدهی های شاخص قیمت و بازده نقدی به خاطر مثبت بودن ضریب چولگی به صورت چوله به راست است. مقادیر بالای معیار کشیدگی برای کلیه شاخص ها نشان دهنده دم پهن بودن توزیع شرطی بازدهی ها می‌باشد. همچنین مقادیر آماره جارک-برا[۱۸] بسیار بزرگ و از نظر آماری معنی دار می باشد که بیانگر این است که فرض صفر نرمال بودن توزیع

بازدهی بازار سهام تهران در سطح معنای ۱ درصد رد می‌شود.

جدول ۱- آماره‌های توصیفی بازدهی شاخص ها

	میانگین	انحراف معیار	شاخص چولگی	شاخص کشیدگی	آماره جارک-برا
شاخص کل	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۵۸	۰/۱۷	۱۵/۲۲	۱۱۷۰۸/۹۵
شاخص ۵۰ شرکت برتر	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۷۶	-۱/۵۲	۲۲/۸۲	۳۱۵۲۵/۴۲
شاخص واسطه گری	۰/۰۰۰۱۶	۰/۰۰۸۵	-۱/۸۶	۵۴/۶۴	۲۱۰۰۵۶/۰۱
شاخص صنعت	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۰۶۲	۰/۴۵	۱۷/۶۴	۱۶۸۵۴/۰۲
شاخص قیمت و بازده نقدی	۰/۰۰۰۶۱	۰/۰۰۶۱	۱/۶۹	۲۹/۶۶	۵۶۵۸۴/۰۱

۵-۲- نتایج برآورد ارزش در معرض ریسک و آزمون بازخورد

همان‌طور که بیان شد هدف از این مقاله پیش بینی یک گام به جلوی ارزش در معرض ریسک روزانه شاخص‌های بورس اوراق بهادار تهران از طریق روش زنجیره مارکف مونت‌کارلو می‌باشد. برای انجام فرایند شبیه‌سازی MCMC از نرم افزار MATLAB 2009 استفاده شده است. روند شبیه‌سازی به این صورت است که برای بازتولید داده‌ها در ابتدا از میانگین $(\bar{y})$ و واریانس (s^2) بازدهی‌های هر یک از پنج شاخص مورد نظر، به عنوان نقطه شروع پارامترهای $\mu = \theta_1$ و $\theta_2 = \sigma^2$ استفاده می‌شود. $(\theta_2^0 = s^2, \theta_1^0 = \bar{y})$. در واقع با توجه به توزیع یکنواخت ارائه شده در قسمت‌های قبلی، فرض بر این است که توزیع مذکور حول و حوش این نقطه اولیه متمرکز می‌باشد و به احتمال زیاد روند همگرایی افزایش می‌یابد. در ادامه هدایت داده‌ها در تکرارهای شبیه‌سازی (i) برای بردار پرامترها به صورت زیر خواهد بود:

$$[(\theta_2^0 = s^2, \theta_1^0 = \bar{y}), (\theta_2^1, \theta_1^1), \ldots, (\theta_2^i, \theta_1^i)]$$

با در نظر گرفتن $\theta_1^0 = \bar{y}$ ، مقدار جدید آن با فرض d_1=0.1 به صورت زیر ایجاد می شود.

$$\theta_1^* = \theta_1^0 + (\text{rand} - 0.5).2.d_1$$ رابطه ۲۴

در گام بعدی نسبت پذیرش r به صورت $r = \frac{P(\theta_1^*, \theta_2^0 | y)}{P(\theta_1^0, \theta_2^0 | y)}$ محاسبه می‌شود و سپس با ایجاد یک عدد تصادفی یکنواخت بین ۰ و ۱ بررسی می شود اگر r بزرگتر از مقدار تصادفی باشد مقدار θ_1^1 برابر θ_1^* خواهد بود در غیر این صورت مقدار آن برابر مقدار اولیه یعنی θ_1^0 خواهد شد.

سپس با در نظر گرفتن d_2=0.1 شبیه سازی θ_2^* به صورت زیر انجام می شود.

$$\varphi_1^* = Log(\theta_2^0 + (\text{rand} - 0.5).2.d_2$$ رابطه ۲۵

$$\theta_2^* = \exp(\varphi_1^*)$$

حال با محاسبه نسبت پذیرش به صورت $r = \frac{P(\theta_1^1,\theta_2^*|\ y).\theta_2^*}{P(\theta_1^1,\theta_2^1|\ y).\theta_2^1}$ و ایجاد عدد تصادفی مقدار θ_2^1 به روز می شود. توجه شود انتخاب مقادیر $d_1=0.1$ و $d_2=0.1$ به صورت تقریبی بوده و بر اساس هدف اجرا قابل تغییر است. در ادامه همین روند تا تکرارهای زیادی انجام می‌گیرد. که در این کار تجربی فرایند شبیه‌سازی برای زنجیره‌ای به طول ۲۵۰۰ با دوره سوخت ۵۰۰ برای دو متغیر میانگین و واریانس به طور مکرر انجام می‌گیرد. و با کنار گذاشتن تعداد داده‌های دوره سوخت و میانگین‌گیری حسابی ۲۰۰۰ داده باقیمانده انتهایی، متوسط متغیرهای میانگین $(\bar{\mu})$ و واریانس $(\bar{\sigma})$ حاصل می‌شود که بر اساس آن می‌توان مسیرهای متعدد قیمتی را برای روز بعد به صورت فرایند وینری زیر به‌دست آورد

رابطه ۲۶
$$P_{t+1} - P_t = P_t(\bar{\mu}\Delta t + \bar{\sigma}\varepsilon\sqrt{\Delta t})$$

در این رابطه P_t آخرین شاخص قیمت موجود، P_{t+1} شاخص قیمت روز بعد، Δt گام زمانی و ε متغیر تصادفی نرمال استاندارد با میانگین ۰ و واریانس ۱ می‌باشد.

در اینجا با ایجاد ۱۵۰۰ شاخص قیمت روز بعد بر اساس رابطه فوق (همان روش مونت‌کارلو) و در نظر گرفتن صدک بازدهی‌های آنها ارزش در معرض ریسک روز بعد محاسبه می‌شود.

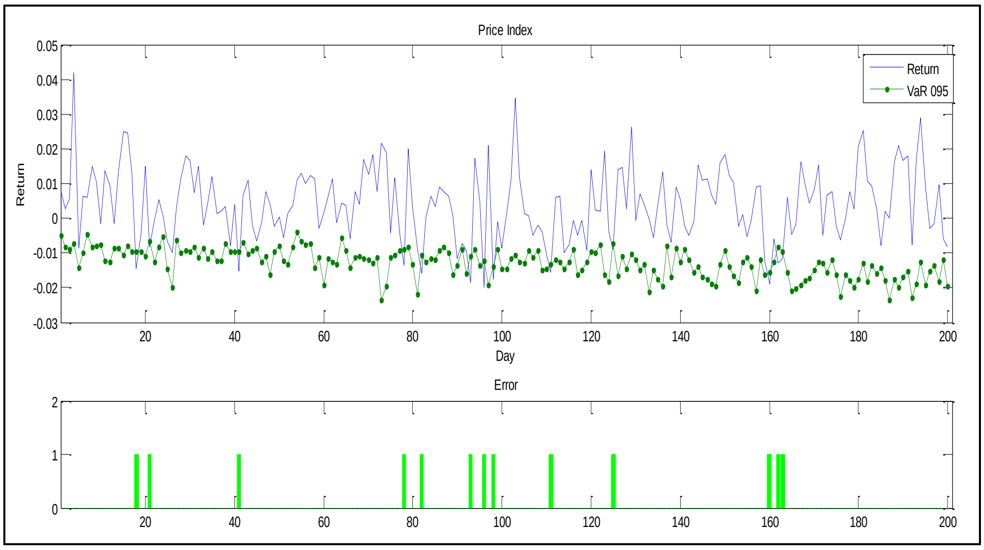
برای پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک یک گام به جلو برای n روز بعد با توجه به اطلاعات شرطی روز ماقبل آن، رابطه (۲۶) به طور متوالی به جلو برده می‌شود. به عنوان نمونه فرایند مسیر قیمتی برای دو دوره (روز) بعد به صورت زیر می‌باشد

رابطه ۲۷
$$P_{t+2} - E(P_{t+1}) = E(P_{t+1})(\bar{\mu}\Delta t + \bar{\sigma}\varepsilon\sqrt{\Delta t})$$

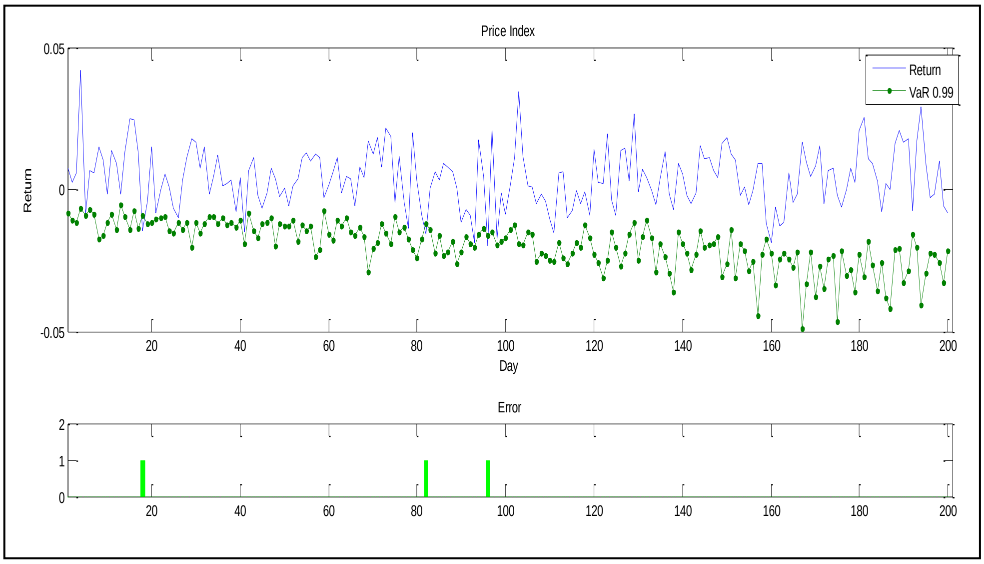
در این رابطه، $E(P_{t+1})$ میانگین انتظاری قیمت‌های ایجاد شده برای دوره قبل به عنوان آخرین شاخص قیمت موجود در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال در این شبیه‌سازی تجربی، میانگین ۱۵۰۰ شاخص قیمت پیش‌بینی شده برای یک روز بعد به عنوان آ می‌باشد.

در واقع مجددا با ایجاد داده‌های میانگین (μ) و واریانس (σ^2) بر اساس الگوریتم متروپولیس-هاستینگز همانند حالت فوق و بالطبع تولید ۱۵۰۰ شاخص قیمت متعدد دیگر برای دو روز بعد طبق رابطه (۲۷)، VaR دو روز بعد با توجه به اطلاعات شرطی روز قبل آن، از طریق صدک توزیع بازدهی شاخص‌های تولید شده جدید برآورد می‌گردد.

با اجرای مکرر فرایندهای فوق، ارزش در معرض ریسک یک گام به جلو برای دوره‌های آتی بر اساس شبیه سازی زنجیره مارکف مونت‌کارلو (MCMC) به دست می‌آید. برای این منظور ارزش در معرض ریسک روزانه یک گام به جلو شاخص‌های منتخب بورس اوراق بهادار تهران برای ۲۰۰ روز آتی پیش‌بینی گردیده است. در نمودار شکل۲، VaR برآورد شده برای شاخص قیمت و بازده نقدی در دو سطح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد به همراه تعداد خطاهای رخ داده شده به عنوان نمونه نشان داده می‌شود. لازم به ذکر است برای چهار شاخص دیگر نیز می توان چنین نموداری را متصور شد که به دلیل تعدد آنها از ارائه آن صرف نظر می‌شود.



۲-۱



۲-۲

شکل ۲- نمودار ارزش در معرض ریسک روزانه یک گام به جلوی ۲۰۰ روزه (شاخص قیمت و بازده نقدی) در سطوح اطمینان ۱-۲) ۹۵ دصد ۲-۲) ۹۹ درصد

همان طور که اشاره شد مدل‌های VaR در صورتی قابل اتکا هستند که دقت ریسک برآورد شده بر اساس آزمون بازخورد تایید شود به همین منظور ارزش در معرض ریسک پیش بینی شده پنج شاخص مذکور بر اساس چهار آماره آزمون بازخوردی که در قسمت قبل ارائه شد، مورد ارزیابی قرار می گیرند. همانطور که ملاحضه نمودیم برای محاسبه نسبت راستنمایی آماره های آزمون های بازخورد، پارامتر های مهمی در نظر گرفته می شوند که ابتدا آنها را مد نظر قرار می دهیم.

برای محاسبه آماره آزمون نسبت شکست کوپیک (POF) نیاز به تعداد خطاهای مورد انتظار (خطاهای مطلوب) و تعداد خطاهای واقعی (رخ داده شده) داریم. به عبارت دیگر بر اساس آزمون POF کوپیک، خطاهای واقعی یا تعداد شکست های که عملا اتفاق می افتد نباید فاصله زیادی با تعداد شکست های مورد انتظار (α.T) در سطح اطمینان (1-α) درصد داشته باشند که در آن T تعداد مشاهدات برون نمونه ای می باشد و در این مطالعه برابر ۲۰۰ می باشد. به عنوان مثال در سطح اطمینان ۹۵ درصد تعداد خطاها نباید فاصله زیادی با ۱۰ (۲۰۰×۰/۰۵) داشته باشند و یا اینکه در سطح اطمینان ۹۹ درصد تعداد خطاها باید نزدیک ۲ باشند. داده های مربوط به مشاهدات برون نمونه ای، تعداد خطاهای مطلوب (انتظاری)، خطاهای واقعی و نرخ شکست واقعی به ترتیب در سطر سوم تا ششم جدول (۲) در دو سطح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصدی ارائه شده است.

برای محاسبه آماره آزمون TUFF کوپیک، اولین روزی که خطا رخ می دهد (v) پارامتر مهمی محسوب می شود به عبارت دیگر اگر مقدار ارزش در معرض ریسک دقیق برآورد شود، بایستی نسبت ($\frac{1}{v}$) حول و حوش سطح معنی داری (α) باشد. نتایج مربوط به v در سطر هفتم جدول ۲ آمده است.

هم چنین برای به دست آوردن آماره استقلال کریستفرسن نیاز به معیار های تصمیم گیری می باشد بدین صورت که اگر خطایی صورت گیرد عدد ۱ و در غیر این صورت عدد ۰ در نظرگرفته می شود که بر این اساس ماتریس مشروط دو در دو که دارای ۴ عضو می باشد، قابل تعریف است. اولین عضو (n_{00}) این ماتریس برابر تعداد روزهایی است که هیچ خطایی برای دو روز متوالی رخ نداده است، دومین مقدار (n_{10}) تعداد روزهایی را نشان می دهد که خطای روز اول با عدم وقوع خطا در روز بعد همراهی شود، مقدار سوم (n_{01}) بیانگر تعداد روزهایی است که عدم وقوع خطا در روز اول با خطا در روز بعد همراهی شود و نهایتا (n_{11}) مقدار چهارم تعداد روزهایی که در دو روز متوالی خطا رخ می دهد. نتایج مربوط n_{ij} ها به همراه احتمال شرطی مرتبط به آنها (π_i ها) در سطر های هشتم تا چهاردهم جدول ۲ گزارش شده است.

جدول ۲- نتایج روش MCMC

	C=۰/۹۵					C=۰/۹۹				
	شاخص کل	شاخص ۵۰ شرکت	شاخص واسطه گری	شاخص صنعت	شاخص قیمت	شاخص کل	شاخص ۵۰ شرکت	شاخص واسطه گری	شاخص صنعت	شاخص قیمت
مشاهدات برون نمونه ای	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰
تعداد خطای انتظاری	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۲	۲	۲	۲	۲
تعداد خطای واقعی	۱۲	۱۰	۴	۱۲	۱۳	۴	۵	۱	۳	۳
نرخ شکست واقعی	۰/۰۶	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۰۶۵	۰/۰۲	۰/۰۲۵	۰/۰۱	۰/۰۱۵	۰/۰۱۵
v	۵	۲	۲	۵	۱۸	۵	۲	۶۲	۵	۱۸
N_{00}	۱۷۷	۱۸۰	۱۹۱	۱۷۶	۱۷۴	۱۹۱	۱۸۹	۱۹۷	۱۹۳	۱۹۳
N_{01}	۱۰	۹	۴	۱۱	۱۲	۴	۵	۱	۳	۳
N_{10}	۱۰	۹	۴	۱۱	۱۲	۴	۵	۱	۳	۳
N_{11}	۲	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰
π_0	۰/۰۵۴	۰/۰۴۸	۰/۰۲	۰/۰۵۸	۰/۰۶۴	۰/۰۲	۰/۰۲۶	۰/۰۵	۰/۰۱۵	۰/۰۱۵
π_1	۰/۱۶	۰/۱	۰	۰/۰۸۳	۰/۰۷۶	۰	۰	۰	۰	۰
π	۰/۰۶	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۰۶۵	۰/۰۲	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۱۵	۰/۰۱۵

همان‌طور که در جدول فوق نشان داده می‌شود با توجه به این که تعداد دوره پیش بینی ۲۰۰ روزه است انتظار بر این است که تعداد خطاهایی که اتفاق می‌افتند بایستی حول و حوش ۱۰ و ۲ در سطوح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد باشند. بر اساس نتایج خطاهای واقعی رخ داده شده در سطح اطمینان ۹۵ درصد مشاهده می‌شود، به غیر از حالت شاخص واسطه‌گری که دارای ۴ خطا می‌باشد و فاصله نستا زیادی با خطاهای مطلوب دارد برای چهار شاخص دیگر این نتایج قابل قبول به نظر می‌رسند. به عبارت دیگر نرخ شکست واقعی برای چهار شاخص مورد نظر نزدیک ۰/۰۵ می‌باشد و چنین بر می‌آید که روش پیش بینی MCMC بر اساس آزمون POF کوپیک برای این موارد معتبر باشد. اما این نرخ برای شاخص واسطه گری برابر ۰/۰۲ می‌باشد که دقیق بودن ارزش در معرض ریسک به دست آمده را مورد تردید قرار می‌دهد. از طرفی در سطح اطمینان ۹۹ درصد، برای پنج شاخص مذکور تعداد خطاهای واقعی نزدیک به خطاهای مورد انتظار (۲) می‌باشد و یا اینکه نرخ شکست واقعی حول و حوش سطح معنی‌داری (۰/۰۱) می باشد که می‌تواند بیانگر این نکته باشد که دقت VaR محاسبه شده از طریق روش بیزین بر اساس آزمون POF کوپیک مورد تایید قرار می‌گیرد.

بر اساس آزمون TUFF کوپیک، روزی که اولین خطا رخ می‌دهد (v)، بایستی حول و حوش معکوس سطح معنی‌داری باشد. به عبارت دیگر در سطوح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد مقادیر v بایستی حول و حوش

۲۰ و ۱۰۰ باشد. نتایج به دست آمده در جدول فوق نشان می‌دهد در سطح اطمینان ۹۵ درصد تنها برای شاخص بازده و قیمت نقدی این شرط برآورده می‌شود که این مقدار برابر ۱۸ می‌باشد. و برای چهار شاخص دیگر مقادیر به‌دست آمده فاصله زیادی با مقدار مطلوب موردنظر دارد. در سطح اطمینان ۹۹ درصد این نتایج تنها برای شاخص واسطه گری (۶۲) قابل قبول می‌باشد و برای شاخص‌های دیگر این مقادیر منطقی به نظر نمی‌رسند.

همان طور که بیان شد بر اساس آزمون استقلال کریستفرسن مدل VaR درصورتی معتبر است که خطاها رخ داده شده مستقل از هم باشند یا به عبارت دیگر بایستی احتمال های شرطی π_0 وπ_1 نزدیک به هم باشند. نتایج به دست در جدول فوق در هر دو سطح اطمینان مورد نظر این نکته را برای کلیه شاخص‌ها تایید می‌کند.

هرچند بر اساس نتایج جدول ۲ یک چشم انداز کلی از VaR روزانه یک گام به جلو از طریق روش MCMC حاصل شده است اما برای بررسی دقیق تر آن بایستی آماره های چهار آزمون مذکور در نظر گرفته شود. جدول ۳ نتایج مربوط به آماره های نسبت راستنمایی این آزمون ها را به همراه نتیجه پذیرش و یا رد فرضیه های صفر مرتبط به آنها برای سطوح ۹۵ و ۹۹ درصد نشان می دهد. البته همانگونه که می دانیم برای تایید دقت VaR برآورد شده ، مقدار آماره های محاسبه شده آزمون بازخورد، بایستی از مقادیر بحرانی جدول توزیع کای دو که در سطر آخر جدول نشان داده می شوند، کمتر باشد.

جدول ۳- نتایج آزمون بازخورد

	C=۰/۹۵					C=۰/۹۹				
	شاخص کل	شاخص ۵۰ شرکت	شاخص واسطه گری	شاخص صنعت	شاخص قیمت	شاخص کل	شاخص ۵۰ شرکت	شاخص واسطه گری	شاخص صنعت	شاخص قیمت
LR_{POF}	۰/۳۹	۰	۴/۸۶	۰/۴۰	۰/۸۷	۱/۵۶	۳/۲۰	۰/۶۲	۰/۴۳	۰/۴۳
نتیجه آزمون	تایید	تایید	رد	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید
LR_{TUFF}	۱/۴۰	۳/۳۲	۳/۳۲	۱/۴۰	۰/۰۱	۴/۵۸	۶/۴۵	۰/۲۰	۴/۲۸	۱/۸۳
نتیجه آزمون	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید
LR_{IND}	۱/۸۲	۰/۴۴	۰/۱۶	۰/۱۱	۰/۰۳	۰/۱۶	۰/۲۶	۰/۰۱	۰/۱۰	۰/۱۰
نتیجه آزمون	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید
LR_{cc}	۲/۲۲	۰/۴۴	۵/۰۲	۰/۵۰	۰/۹۰	۲/۷۳	۳/۴۶	۰/۶۳	۰/۵۳	۰/۵۳
نتیجه آزمون	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید	تایید

$\chi^2(0.05,1) = 3.84,\quad \chi^2(0.05,2) = 5.99,\quad \chi^2(0.01,1) = 6.63,\quad \chi^2(0.01,2) = 9.2$

در سطر سوم جدول فوق آماره آزمون POF کوپیک گزارش شده است، مشاهده می شود نسبت راستنمایی حاصله برای هر پنج شاخص مزبور در سطح اطمینان ۹۹ درصد کمتر از مقدار استاندارد آن

(۶/۶۳) می باشد که بیانگر این است، دقت VaR پیش بینی شده از طریق روش مذکور مورد تایید قرار می گیرد. در سطح ۹۵ درصد به غیر از شاخص واسطه گری که آماره مورد نظر بیشتر از ۳/۸۴ است، نتایج مربوطه برای چهار شاخص دیگر کمتر از ۳/۸۴ می باشد و این حاکی از قابل اتکا بودن روش MCMC برای محاسبه VaR کلیه شاخص ها به جز شاخص واسطه گری می باشد.

با توجه به سطر پنجم جدول فوق، مشاهده می شود که برای کلیه شاخص ها آماره های آزمون TUFF کوپیک از مقدار استاندارد آن ۳/۸۴ (۶/۶۳) در سطح اطمینان ۹۵ (۹۹) درصد کمتر است و دقت VaR پیش بینی شده تایید می گردد. با این حال ملاحظه می شود که در سطح اطمینان ۹۵ درصد برای شاخص های ۵۰ شرکت برتر و واسطه گری مقدار این آماره برابر ۳/۳۲ می باشد که بیانگر این است فرضیه صفر مرتبط با این آزمون تایید می شود اما همین نکته را می توان برای شاخص ۵۰ شرکت برتر در سطح اطمینان ۹۹ درصد که دارای مقدار آماره ۶/۴۵ است،

مقادیر آماره های نسبت راستنمایی آزمون استقلال کریستفرسن که در سطر هفتم جدول فوق نشان داده می شود حاکی از این است برای کلیه شاخص ها تعداد خطاهای رخ داده شده در سطوح اطمینان مورد نظر مستقل از یکدیگر می باشند. در واقع با توجه به اینکه کلیه آماره ها در سطح اطمینان ۹۵ (۹۹) درصد کمتر از ۳/۸۴ (۶/۶۳) می باشد می توان بیان کرد که عملکرد روش MCMC در پیش بینی ارزش در معرض ریسک بر مبنای این آزمون تایید می شود.

نهایتا در سطر نهم جدول فوق ملاحظه می گردد که برای کلیه شاخص ها در دو سطح اطمینان ۹۵و ۹۹ درصد مقادیر گزارش شده نسبت راستنمایی آزمون مشترک کمتر از ۵/۹۹ و ۹/۲ می باشد که تفسیر آن به این صورت است که دقت ارزش در معرض ریسک برآورد شده توسط روش MCMC بر مبنای این آزمون تایید می شود به عبارت به طور همزمان شرایط خطاهای بهینه و نیز مستقل بودن خطا ها از یکدیگر برآورده می شود.

همان‌طور که می‌دانیم در چند سال اخیر با مطرح شدن شاخص VaR تحول اساسی در مدیریت ریسک و مهندسی مالی ایجاد شده است به طوری که در تمامی شعبات موسسات مالی مانند بانک‌ها، شرکت‌های بیمه و شرکت‌های سرمایه‌گذاری نفوذ کرده و روش سنجش ریسک مالی را کاملا تغییر داده است. به همین منظور در این مطالعه تلاش شده است تا این معیار ریسک را برای شاخص‌های بورس تهران با استفاده از روش MCMC مورد برآورد و ارزیابی قرار گیرد. در واقع در این پژوهش به دنبال آنیم که آیا روش مذکور، پیش‌بینی دقیقی از این شاخص ریسک مالی یا همان VaR ارائه می‌دهد تا بتوان از آن برای تعیین حدکفایت سرمایه برای دارندگان سهام به منظور پوشش ریسک استفاده نمود. با توجه به نتایج آزمون بازخورد، دقت مقدار VaR پیش‌بینی شده توسط روش زنجیره مارکف مونت‌کارلو تایید می‌شود و این به معنی معتبر بودن این روش است. به همین منظور استفاده از این روش به سرمایه‌گذارن و تحلیل‌گران بازار سرمایه برای تحلیل‌ها و سرمایه‌گذاری‌هایشان و اندازه‌گیری دقیق ریسک به منظور پوشش سرمایه پیشنهاد می‌شود.

۵- نتیجه گیری و بحث

در حال حاضر ارزش در معرض ریسک به عنوان یکی از کلیدی‌ترین معیارها برای اندازه‌گیری میزان ریسک و نیز تعیین مقدار سرمایه مورد نیاز توسط تحلیل‌گران مالی و موسسات مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش‌های متعددی برای برآورد این معیار وجود دارند که رایج‌ترین آنها شامل رویکردهای پارامتریک، ناپارامتریک و شبه پارامتریک می باشد. در این مطالعه با به کارگیری روش شبیه‌سازی زنجیره مارکف مونت کارلو (MCMC) به پیش بینی VaR روزانه یک گام به جلو برای پنج شاخص بورس اوراق بهادار تهران پرداخته شده است. هر چند ارزش در معرض ریسک در این روش مذکور همانند شبیه سازی مونت کارلو از طریق انتخاب صدک توزیع بازدهی‌های بازتولید شده به‌دست می‌آید اما توجه شود در روش مونت‌کارلو تولید داده‌ها بر اساس فرایندهای تصادفی براونی صورت می‌گیرد ولی در روش MCMC تولید داده‌ها مبتنی بر نمونه‌گیری الگوریتم متروپولیس-هاستینگز ایجاد می‌باشد. همچنین دقت VaR محاسبه شده توسط روش MCMC از طریق چهار نوع آزمون بازخورد POF کوپیک، TUFF کوپیک، استقلال کریستفرسن و آزمون مشترک مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج تجربی حاصل از این تحقیق برای شاخص‌های بورس اوراق بهادار تهران در دو سطح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد نشان می‌دهد که برای کلیه حالت ها به غیر از شاخص واسطه‌گری در سطح اطمینان ۹۵ درصد، روش MCMC پیش‌بینی دقیقی از VaR ارائه می‌دهد.

در واقع همان‌طور می‌دانیم مدل‌های پیش‌بینی VaR در صورتی معتبر هستند که آماره‌های آزمون بازخورد کمتر از مقادیر بحرانی جدول استاندارد باشد و هرچه این آماره کمتر و نزدیک به صفر باشد، دقت پیش‌بینی مدل بیشتر خواهد بود. با توجه نتایج آزمون بازخورد در جدول ۳ ملاحظه می‌گردد که مقادیر نسبت راستنمایی برای اکثر شاخص‌ها نزدیک به صفر است. به عنوان مثال برای شاخص صنعت و شاخص قیمت و بازده نقدی آماره POF کوپیک برابر ۰/۴ (۰/۴۳) و ۰/۸۷ (۰/۴۳) در سطح اطمینان ۹۵ (۹۹) درصد می‌باشد که حاکی از دقت بالای روش مذکور در پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک لست. و یا حتی این مقدار برای شاخص کل در سطح اطمینان ۹۵ درصد برابر صفر است که دال بر پیش‌بینی صحیح روش MCMC در برآورد VaR این شاخص دارد. در یک نتیجه‌گیری کلی می‌توان گفت روش زنجیره مارکف مونت‌کارلو (MCMC) دارای عملکرد قابل اتکائی در برآورد ارزش در معرض ریسک روزانه یک گام به جلو شاخص‌های مورد مطالعه می باشد.

همچنین با مقایسه نتایج این مطالعه و یافته‌های تحقیق راعی و فلاح طلب (۱۳۹۱) برای بورس تهران و چن و همکاران (۲۰۱۳) برای بورس شانگهای مشاهده می‌شود که هرچند دقت VaR محاسبه شده توسط آنها از طریق روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو تایید می‌شود اما با مقایسه آماره‌های آزمون بازخورد ملاحظه می‌گردد که روش جدید MCMC که بسط یافته روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو است، پیش‌بینی‌های دقیق‌تری نسبت به آن ارائه می‌دهد.

فهرست منابع

* مرزبان، حسین و همکاران (۱۳۹۲)، رهیافتی از اقتصاد فیزیک در ایران. فصلنامه پژوهش‌ها و سیاست‌های اقتصادی، شماره ۶۵، صفحات ۲۰۰-۱۸۳.
* راعی، رضا و حسین فلاح طلب (۱۳۹۲)، کاربرد شبیه سازی مونت کارلو و فرایند قدم زدن تصادفی در پیش بینی ارزش در معرض ریسک، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۱۶، ۹۲-۷۵.
* Abad, P., Benito, S. (2013). A detailed comparison of value at risk in international stock exchanges. Mathematics and Computers in Simulation, http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2012.05.011.
* Abad, P., & Benito, S. (2010). A Detailed Comparison of Value at Risk in International Stock Exchanges. Fundación De Las Cajas De Ahorros, Documento De Trabajo, pp 1-45.
* Alexander, c., John, W., & Sons, C. (2012). Market risk analysis, Value at Risk Models. Journal of economic Dynamics & control, vol 4, pp 23-41.
* Bao, Y., Lee, T., Saltoglu, B., 2006. Evaluating predictive performance of value-atrisk models in emerging markets: a reality check. Journal of Forecasting 25,101–128.
* Barreto, H., & Howland, H. (2011). Introductory econometrics using Monte Carlo simulation with Microsoft Excel. Cambridge university press, pp 19-33.
* Brownlees, C., Gallo, G., 2011. Shrinkage estimation of semi-parametric multiplicative error models. International Journal of Forecasting 27, 365–378.
* Basel Committee on Banking Supervision (1996). Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks.
* Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., (2001).Non-parametric VaR techniques. Myths and realities. Economic Notes by Banca Monte deiPaschi di Siena, SpA. 30, 167–181.
* Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L., (1999). VaR without correlations for nonlinear portfolios. Journal of Futures Markets 19, 583–602.
* Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L., (2002). Backtesting derivative portfolios with filtered historical simulation (FHS). European Financial Management 8, 31–58.
* Christoffersen, P., (1998). Evaluating interval forecasting. International Economic Review 39, 841–862. Christofferssen, P. & Pelletier, P. (2004), Backtesting Value-at-Risk: A Duration Based Approach. Journal of Empirical Finance, 2, 2004, 84-108.
* Chen, C. W. S., Gerlach, R., Lin, E. M. H., & Lee, W. C. W. (in press) Bayesian forecasting for financial risk management, pre and post the global financial crisis. Journal of Forecasting. http://dx.doi.org/10.1002/for.1237.
* Christoffersen, P., Diebold, F., 2006. Financial asset returns, direction-of-change forecasting and volatility dynamics. Management Science 52, 1273–1287.
* Chena Qi and Rongda Chen (2013). “Method of Value-at-Risk and empirical research for Shanghai stock market” Procedia Computer Science 17 (2013) 671 – 677.
* F.Jiangqing, G.Juan (2003): Semiparametric Estimation of Value at Risk, Journal of Econometrics 6, 261-290.
* Gerlach, R., Chen, C., Chan, N., 2011. Bayesian time-varying quantile forecasting for value-at-risk in financial markets. Journal of Business & Economic Statistics 29, 481–492.
* Giannopoulos, K., Tunaru, R., 2005. Coherent risk measures under filtered historical simulation. Journal of Banking and Finance 29, 979–996.
* Gupta, R. (2008). Assessing the V alue -at -Risk (VAR) for BSE Index consisting of 30 stocks by using various parametric, nonparametric and semi -parametric models for

estimating Value -at -Risk (VAR(). UNIVERSITY OF NOTTINGHAM.
* Hastings, W. K. (1970). Monte-Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. Biometrika, 57, 97–109
* Hull, J., White, A., (1998). Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk. Journal of Risk 1, 5–19.
* Jun-zhou Hua, (2012) 'VaR Estimation Accuracy and It's Empirical Research of Small plates securities market', contemporary economics, (1), PP.113-114.
* Kupiec, P., (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. Journal of Derivatives 2, 73–84.
* Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., & Teller, E. (1953). Equations of state calculations by fast computing machines. Journal of Chemical Physics, 21, 1087–1091.
* J.P. Morgan, Riskmetrics, Technical Document, 4th ed., J.P. Morgan, New York, 1996.
* Piroozfar, G. (2009). Forecasting Value at Risk with Historical and Filtered Historical Simulation Methods.
* Tsionas, E. G. (2003). Bayesian quantile inference. Journal of Statistical Computation and Simulation, 9, 659–674
* Wong, W.K., 2008. Backtesting trading risk of commercial banks using expected shortfall. Journal of Banking & Finance 32, 1404–1415. Wong, W.K., 2010. Backtesting value-at-risk based on tail losses. Journal of Empirical Finance 17, 526–538

یادداشت‌ها

[1]. Value at Risk
[2]. J.P.Morgan
[3]. The US Securities and Exchange Commission
[4]. Bank of International Settlement (BIS)
[5]. Basel Committee on Banking Supervision (Basel)
[6]. Markov Chain Monte Carlo
[7]. Metropolis- Hastings
[8]. Backtesting

[۹]. برای توضیح بیشتر به مطالعه راعی و فلاح‌طلب ۱۳۹۲ رجوع شود

[10]. conjugate
[11]. jumping rules
[12]. non-informative
[13].Burn in
[14]. Kupiec proportion of failure
[15]. Kupiec time until first failure
[16]. Christoffersen interval forecast
[17]. joint test
[18]. Jarque–Bera