مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره بیستم / پاییز ۱۳۹۳

پیش‌بینی رفتار سهام با استفاده از مدل زنجیره مارکوف

مقصود امیری[۱]
مهدی بیگلری کامی[۲]

تاریخ دریافت: ۹۲/۵/۱۷ تاریخ پذیرش: ۹۲/۱۱/۲۵

چکیده

رفتار قیمت سهام یکی از پیچیده‌ترین مکانیزم‌هایی می‌باشد که محققان در طی سالیان بر روی آن مطالعه کرده‌اند. بازار سهام را می‌توان به دو طریق تحلیل کرد: تحلیل بنیادی و تحلیل تکنیکال. مورد اول علت محور و مورد دوم معلول محور می‌باشد. یکی از شاخه‌های رفتار قیمت سهام در روش‌های تکنیکال مدل‌های تصادفی می‌باشد که برخی از مهمترین روش‌های استفاده شده در تئوری بازار کارا می‌باشند. در این تحقیق از مدل مارکوف که یکی از مدل‌های تصادفی می‌باشد به منظور پیش‌بینی قیمت سهام استفاده شده‌است. بدین منظور ۹ وضعیت تعریف شده‌است که از تعامل متغیرهای درصد تغییر قیمت سهام و درصد حجم مبادلات سهام بدست آمده‌اند. برای هر یک از این متغیرها سه حالت یا سطح مثبت، خنثی و منفی تعریف شده‌است. به منظور بررسی کارایی مدل یک مطالعه موردی از شاخص صنایع داوجونز بررسی شده‌است که عملکرد مدل پیشنهادی را تأیید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: رفتار قیمت سهام، تحلیل تکنیکال، مدل گام تصادفی، تئوری بازار کارا، مدل مارکوف.

۱- دانشیار دانشگاه علامه طباطبایی mg_amiri@yahoo.com
۲- دانشجوی دکتری مدیریت مالی، دانشگاه تهران (مسئول مکاتبات) financial_eng66@yahoo.com

۱- مقدمه

پیش‌بینی رفتار بازارهای مالی امری بسیار پیچیده می‌باشد، زیرا توزیع سری‌های زمانی مالی در طول زمان دائماً در حال تغییر می‌باشد. همچنین اظهار نظر در رابطه با قابل پیش‌بینی بودن این بازارها همواره مورد بحث بوده است. در سال‌های اخیر، سرمایه‌گذاران به منظور کاهش ریسک‌های سرمایه‌گذاری خود نسبت به پیش‌بینی شاخص‌های بازارهای سهام علاقمند شده‌اند، زیرا پیش‌بینی درست این شاخص‌ها آن‌ها را در کاهش ریسک‌های بازار و افزایش فرصت‌های سرمایه‌گذاری یاری می‌کند.

آگاهی از قیمت‌های آینده دارایی‌ها و ابزارهای مالی مانند شاخص‌های اوراق بهادار رؤیای هر سرمایه-گذاری می‌باشد.اساساً سرمایه‌گذاران از رویکردهای متفاوتی برای پیش‌بینی بهره می‌گیرند که این روش‌ها عمدتاً بر پایه تحلیل‌های بنیادی، تحلیل‌های تکنیکال، تحلیل‌های روانی و غیره قرار دارند. تحلیل بنیادی به مفهوم بررسی اقتصاد کلان و خرد، برنامه‌های آتی کشور، سیاست‌های کلان و خرد داخلی، منطقه‌ای و جهانی، شناخت فرصت‌های جدید سرمایه‌گذاری در صنایع مختلف و بررسی عملکرد مالی شرکت‌ها جهت پیش‌بینی عایدی آن‌ها می‌باشد. گستردگی این بررسی‌ها حوزه‌های سیاسی، اقتصادی و فرهنگی در ابعاد داخلی، منطقه‌ای و جهانی را در بر می‌گیرد. بر اساس تحلیل تکنیکال تمام اطلاعات مرتبط با قیمت در خود آن موجود می‌باشد. بنابراین، پردازش آنی پیام‌های بازار نقش مهمی در تصمیمات معامله‌گران بازی می‌کند. در این تحلیل معامله‌گران از رویه‌های کم‌وبیش پیچیده در تعیین روندها و روندهای معکوس بهره می‌گیرند و با استفاده از تغییرات قیمت در گذشته نزدیک، قیمت آینده را پیش‌بینی می‌کنند.

در میان بازارهای مالی، بازار سهام جزو پیچیده‌ترین و سرکش‌ترین آن‌ها می‌باشد. نرخ نوسانات قیمت در چنین سری‌هایی به عوامل متعددی بستگی دارد. مبادله‌گران همواره نمی‌توانند در چنین بازارهایی برنده باشند، بنابراین توسعه سیستم‌های هوش مصنوعی برای چنین پیش‌بینی‌هایی خالی از لطف نمی‌باشد. در سالیان اخیر بازارهای سهام یک بخش جدانشدنی از اقتصاد جهانی شده‌اند. در سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای به منظور یافتن مدل‌های مناسب در پیش‌بینی رفتار این بازارها صورت گرفته‌است. بیشتر این تحقیقات از تکنیک‌های تحلیل سری‌های زمانی آماری و مدل‌های رگرسیون چندگانه بهره گرفته‌اند. اخیراً، سیستم‌های پیش‌بینی مبتنی بر هوش مصنوعی متعددی در پیش‌بینی رفتار بازار سهام توسعه داده شده‌اند. از جمله این روش‌ها می‌توان به شبکه‌های عصبی مصنوعی، منطق فازی، ترکیب شبکه‌های عصبی فازی و منطق فازی و غیره اشاره کرد. اکثر این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند، به عنوان مثال شبکه‌های عصبی شدیداً مسئله محور می‌باشند زیرا ساختار آن باید انتخاب شود، و یا سیستم‌های فازی به دانش قبلی از خبرگان نیاز دارد. با توجه به این محدودیت‌ها در این تحقیق قصد داریم از زنجیره‌های مارکوف برای پیش-بینی رفتار سهام استفاده کنیم. در همین راستا Hassan و Nath در سال ۲۰۰۵ از مدل‌های زنجیره مارکوف مخفی در پیش‌بینی قیمت سهام برای بازارهای وابسته به هم بهره بردند. Zhang و Zhang در سال ۲۰۰۹ یک مدل فرآیند مارکوف برای پیش‌بینی روند بازار سهام ارائه دادند و از آن به عنوان مکمل یک تحلیل تکنیکال موجود بهره بردند. Landauskas و valakevičius در سال ۲۰۱۱ به منظور کمرنگ کردن

مفروضات توزیع احتمال قیمت سهام، رویکردی مبتنی بر شبیه‌سازی مونت‌کارلوی زنجیره مارکوف توسعه دادند. SvobodaوLukášدر سال ۲۰۱۲ سعی کردند تا روند شاخص سهام بازار مبادلات پراگ را با استفاده از تحلیل زنجیره مارکوف پیش‌بینی نمایند. آن‌ها نتایج کوتاه مدت روند را برای استراتژی‌های مختلف سرمایه‌گذاری با استفاده از تحلیل زنجیره مارکوف بررسی کردند.Lee وShin در سال ۲۰۰۹ به منظور افزایش قابلیت پیش‌بینی مدل سهام، بازگشت سهام را به صورت ترکیبی از زنجیره مارکوف گسسته و گوسی مدل کردند. Turner و همکاران در سال ۱۹۸۹ به بررسی مدل‌های مختلفی پرداختند که در آن‌ها واریانس بازده اضافی سبد (portfolio's excess return) به یک متغیر حالت که توسط یک فرآیند مارکوف مرتبه یک تولید می‌شود بستگی دارد. در این مدل میانگین بازده اضافی به صورت معکوس با سطح ریسک تغییر می‌یابد. Hassan و همکاران در سال ۲۰۰۷ کاربرد ترکیب مدل‌های مارکوف مخفی، شبکه‌های عصبی و الگوریتم ژنتیک را در پیش‌بینی رفتار سهام بررسی کردند. آن‌ها از این روش برای پیش‌بینی تعدادی از اوراق بهادار در بخش IT استفاده کردند و نتایج را با روش پیش‌بینی متداول مقایسه نمودند.Wang و همکاران در سال ۲۰۱۰ مفهوم زنجیره مارکوف را وارد فضای احتمالی پیش‌بینی شاخص‌های سهام کردند تا دقت و اطمینان بیشتری بدست بیاورند. آن‌ها نشان دادند که مدل پیشنهادی عملکرد به مراتب بهتری نشان می‌دهد.Silva و Silva در سال ۲۰۱۰ از یک مدل مارکوف مخفی در پیش‌بینی تغییرات آتی قیمت نفت خام بهره بردند. آن‌ها از یک روش‌شناسی سه مرحله‌ای استفاده کردند و نشان دادند که روش پیشنهادی می‌تواند به عنوان یک ابزار پشتیبانیِ تصمیم به کارشناسان بازار نفت خام کمک کند.

در همین راستا در این تحقیق نیز قصد داریم با استفاده از یک رویکرد جدید از مدل‌سازی زنجیره مارکوف به منظور پیش‌بینی قیمت سهام بهره بگیریم. بدین منظور در بخش ۲ با مدل‌های زنجیره مارکوف آشنا می‌شویم. در بخش ۳ جزئیات روش پیشنهادی ارائه می‌گردد. بخش ۴ به بررسی مطالعه موردی انتخاب شده می‌پردازد. در بخش ۵ نیز نتایج و پیشنهادات آتی ارائه می‌گردد.

۲- روش شناسی پژوهش

زنجیره مارکوف

یک زنجیره مارکوف نوع خاصی از فرآیندهای احتمالی می‌باشد که در آن حالت بعدی سیستم تنها به حالت جاری سیستم بستگی دارد و به حالت‌های قبلی آن وابسته نمی‌باشد. یک فرآیند احتمالی در قالب دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی گسسته، $\{X_n\}$، $n = 1, 2, \ldots$ ویژگی مارکوفی دارد اگر رابطه (۱) برای هر n محدودیت برقرار باشد، که در آن x_n متعلق به فضای حالت گسسته $S = \{s_i\}$، $i = 1, 2, \ldots, k$ می‌باشد. در حالت کلی، زنجیره مارکوف توسط بردارهای $p(n)$ که توزیع‌های احتمال غیرشرطی حالات می‌باشند، و ماتریس انتقال P که احتمالات شرطی $p_{ij} = P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i)$، $i, j = 1, 2, \ldots, k$ هستند توصیف می‌شوند. p_{ij} ممکن است وابسته به n باشد، که در این حالت زنجیره

مارکوف ناهمگن می‌باشد. اگر p_{ij} وابسته به n نباشد زنجیره مارکوف همگن خواهد بود. محاسبه $p(n)$ با استفاده از رابطه تکراری (۲) انجام می‌بشود که در آن $^{\mathbf{T}}$ نشان‌دهنده ترانهاده می‌باشد.

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) \quad (۱)$$

$$p(n+1)^{\mathbf{T}} = p(n)^{\mathbf{T}} P, n = 1, 2, \ldots \quad (۲)$$

۳- روش پیشنهادی

روش های تکنیکال مختلفی برای پیش بینی آینده وضعیت یک سهم وجود دارد. در واقع نگاه معلول گرایانه ای که در روش های تکنیکال وجود دارد و نیز وجود معلول های بیشماری که در بحث بازار سرمایه و بالاخص سهام وجود دارد باعث می گردد تا روش های ابتکاری زیادی در این مقوله مطرح گردد. اگرچه موفقیت روش های تکنیکال کاملاً نسبی می باشد. در روش های تکنیکال می توان معلول ها را همانند علایم راهنما برای طی یک مسیر قلمداد کرد . این معلول ها به طور مثال می توانند متغیرهای زیر باشند: ۱- قیمت بسته شدن روزانه یک سهم، ۲- قیمت باز شدن روزانه یک سهم، ۳- بالاترین قیمت روزانه یک سهم، ۴- پایین ترین قیمت روزانه یک سهم، ۵- میانگین قیمت روزانه هر سهم، ۶-حجم معاملات روزانه، ۷- تعداد معاملات، ۸- تعداد خریداران، ۹- ارزش معاملات روزانه، ۱۰- تعداد تقاضای روزانه یک سهم، ۱۱- تعداد عرضه روزانه یک سهم و غیره.

گاهی اوقات نیز معلول های ثانویه یعنی آنهایی که از عملیات بر روی داده های اولیه به دست می آید می تواند مورد نیاز یک تحلیل تکنیکال باشد. به طور مثال می توان از شاخص های زیر استفاده کرد:

۱) توزیع خریداران = تعداد معاملات تقسم بر تعداد خریداران
۲) حجم معاملات نرمال شده= تعداد معاملات هر سهم تقسیم بر حجم مبنای آن سهم
۳) متوسط حجم خرید هر فرد = حجم معاملات روزانه تقسیم بر تعداد خریداران
۴) متوسط حجم خرید در هر معامله =حجم معاملات روزانه تقسیم بر تعداد معاملات

به هر صورت برای استفاده از هر روش تکنیکال باید از داده های قبلی به عنوان داده های مرجع که می تواند رفتار آینده را از روی آنها پیش بینی کرد، استفاده نمود. اعتقاد همه تحلیل گران تکنیکال بر این است که رفتار یک سهم از قواعدی پیروی می کند که اگرچه در طول مدت های زیاد پارامترهای آن تغییر می کند اما قواعد حاکم بر آن ثابت است. اما اینکه این قواعد چیست هر تحلیل گر روش ابتکاری را برای خود برمی گزیند و آن را توسعه می دهد.از آنجایی که از نظر قطعیت می توان متغیرهای هشدار دهنده نام برده را به نوعی تصادفی دانست لذا می توان روش های ابتکاری را در زمینه احتمالی برای آنها مطرح کرده و توسعه داد.

۳-۱- مدل زنجیره مارکوف

مدل ارائه شده در این تحقیق در واقع از یک بسته اطلاعات حاوی دو متغیر قیمت بسته شدن یک سهم-میانگین ۵ روزه– و متوسط درصد رشد حجم معاملات ۵ روزه برای پیش بینی آینده، استفاده می

نماید. متوسط درصدها بر اساس میانگین هندسی محاسبه شده‌اند. این مدل از یک فرآیند مارکوف استفاده می نماید. در بازار بورس می توان نشان داد قیمت یک سهم نسبت به روند قبل خود بی حافظه است. اکنون برای روشن شدن موضوع مثالی را ذکر می نماییم.

فرض کنیم شایعه تعدیل مثبت درباره یک سهم به گوش فعالان بورس می رسد، ایشان در عمل شایعه را می پراکنند و اقدام به خرید آن سهم می نمایند. این فرآیند همواره مدتی ادامه می یابد. فرض ما بر این است که این مدت حدود یک ماه باشد. اقدام به خرید به معنای بالا رفتن تقاضا و به تبع آن بالا رفتن قیمت سهم می باشد و نیز در عمل حجم معاملات و به تبع آن حجم معاملات نرمال شده نیز بالا خواهد رفت. اگرچه چون صحت شایعه بر مبنای اخبار همواره نمی تواند صد درصد صحیح باشد و نیز بنا به هزاران دلیل غیر قابل پیش بینی و خارج از مدل، ممکن است در این میان روزهایی هم اقبال بازار به این سهم کم شده و یا درصد رشد آن به مقدار زیاد نبوده و یا حتی بنا به دلایل تکنیکالی دیگری کاهش قیمت نیز در آن مشاهده گردد، اما در عمل میانگین رشد ۵ روزه و یا میانگین حجم معاملات نرمال شده ۵ روزه نمی تواند کم باشد، مگر آنکه در عمل هیچ اتفاقی برای یک سهم در پیش نباشد و سهم ایام آرامی را از لحاظ اخبار و شایعات سپری کرده باشد.

با توجه به توضیحات فوق کار با مدلی با درصد رشد یک روزه و حجم معاملات نرمال شده یک روزه کاری است که ما را به مسیر نادرستی در تصمیم گیری رهنمون کرده، ولی با میانگین ۵ روزه می توان انحرافات رفتاری تند و تیز، ناشی از تغییرات روزانه را کنترل کرده و از اثرات آنی روزانه آن که پیش بینی را کم اثر و بی رمق می کند، کاست و در عوض قابلیت اطمینان پیش بینی را بالاتر برد. نکته ای که در این میان قابل ذکر است اینکه می‌توان فرض کرد اساساً در بازار بورس رفتار تکنیکالی یک سال قبل یک سهم نمی تواند تاثیر قابل ملاحظه در رفتار کوتاه مدت فعلی یک سهم داشته باشد. در واقع آن رفتار با تاثیر بر رفتار یک هفته آینده خود و رفتار هر هفته بر رفتار هفته بعدی تاثیر خود را گذاشته است و همینطور این سلسله ادامه یافته تا به حال رسیده است. در واقع رفتار کوتاه مدت یک سهم در یک هفته آینده متاثر از یک هفته قبل خود است، اما همین یک هفته فعلی خود به طور سلسله وار از هفته های (پریودهای) قبل خود به نوعی تاثر پذیرفته است.

بزرگان بورس می گویند همیشه بازار جلوتر از رفتار(قیمت) سهم تصمیم می گیرد و یا زودتر متوجه رشد سهم می گردد. این جمله معروف یعنی اینکه قطعا اگر برای یک سهم شایعه ای در آینده می خواهد موجب ارزشمند تر شدن یک سهم بشود از همین الان بازار با سیگنالهایی آن را تشخیص خواهد داد و کم کم موجب رشدش خواهد شد.

در روش ابتکاری که توضیح داده خواهد شد سیگنالهای مهم یکی: متوسط درصد رشد روزانه یک سهم و دوم: متوسط درصد رشد حجم معاملات یک سهم می باشد.اعتقاد دیگر تحلیل گر این است که اگر یک شایعه در مورد اتفاق خوبی در مجمع سال آینده یک سهم در بازار پراکنده گردد باز هم فعالان بازار در

همان یک ماه آخر به سهم هجوم خواهند برد زیرا به طور روانی سرمایه گذاران تمایل دارند سرمایه خود را در یک سهم زود بازده تر سرمایه گذاری نمایند.

با این توضیحات می توانیم بگوییم تصمیم گیری برای خرید ، تابع حجم معاملات و درصد رشدسهم می باشد. در این روش با توجه به معنی دار بودن تغییرات در قیمت و نیز در معاملات، دسته بندی منطقی به صورت زیر انجام داده ایم:

متوسط درصد رشد قیمت بسته شدن یک سهم در یک بازه ۵ روزه بیش از ۰/۰۶۶٪=رشد معنی دار (۱)

متوسط درصد رشد قیمت بسته شدن یک سهم در یک بازه ۵ روزه بین ۰/۰۶۶٪ و ۰/۶۶۰٪- = روند خنثی (۲)

متوسط درصد رشد قیمت بسته شدن یک سهم در یک بازه ۵ روزه کمتر از ۰/۰۶۶-٪ = افت معنی دار(۳)

متوسط درصد رشد حجم معاملات در یک بازه ۵ روزه بیش از ۰/۲= رشد معنی دار معاملات(۱)

متوسط درصد رشد حجم معاملات در یک بازه ۵ روزه بین از ۰/۲ و -۲٪= تحریک خنثی معاملات (۲)

متوسط درصد رشد حجم معاملات در یک بازه ۵ روزه بیش از -۲٪=افت معنی دار معاملات (۳)

حال از ضرب دسته های مربوط به درصد رشدقیمت سهم و نیز حجم معاملات نرمال شده ۹ حالت زیر به وجود می آید . برای سهولت این حالات را کدگذاری می نماییم.

جدول ۱- کدهای مربوط به حالات مختلف در فرایند مارکوف

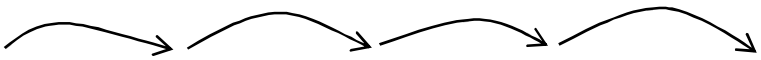
	رشد معنی دار حجم معاملات	روند خنثی حجم معاملات	افت معنی دار حجم معاملات
رشد معنی دار درصد قیمت سهم	۱۱	۲۱	۳۱
روند خنثی درصد قیمت سهم	۱۲	۲۲	۳۲
افت معنی دار درصد قیمت سهم	۱۳	۲۳	۳۳

توجه گردد که در واقع از یک ماتریس دو بعدی با ابعاد برابر ۳، ۹ حالت به دست می آمد. حال به یک زنجیره مارکوف بر می گردیم .در اینجا دو تعریف حالت(وضعیت) و مرحله ارائه می گردد:

حالت(وضعیت): یکی از ۹ حالت مذکور که در کدینگ فوق توضیح داده شد می باشد. این حالات عبارتند از:

۱-رشد معنی دار درصد قیمت سهم و رشد معنی دار حجم معاملات، ۲-روند خنثی درصد قیمتسهم و رشد معنی دار حجم معاملات، ۳- افت معنی دار درصد قیمتسهم و رشد معنی دار حجم معاملات، ۴-رشد معنی دار درصد قیمتسهم و روند خنثی حجم معاملات، ۵-افت معنی دار درصد قیمتسهم و روند خنثی حجم معاملات، ۶- افت معنی دار درصد قیمت سهم و روند خنثی حجم معاملات، ۷-رشد معنی دار درصد قیمتسهم و افت معنی دار حجم معاملات، ۸- روند خنثیدرصد قیمت سهم و افت معنی دار حجم معاملات، ۹-افت معنی دار درصد قیمت سهم و افت معنی دار حجم معاملات.

مرحله: پریودهای هفتگی (۵ روزه) می باشد که پشت سر هم تکرار می گردند. در شکل1 به خوبی این فرایند نشان داده شده است.



Stage 1(first 5 day)	Stage 2(second 5 day)	…	…	Stage n(nth 5 day)
State one 11	State one 11	…	…	State one 11
State two 12	State two 12	…	…	State two 12
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
State nine 33	State nine 33	…	…	State nine 33

شکل۱. حالت و وضعیت در این روش

این تبدیل به علت رفتار ساده تر در فرآیندهای گسسته صورت پذیرفته است. در عمل با دسته بندی بیشتر رشد سهام و نیز حجم معاملات می توان به پیوستگی نزدیکتر شد. البته دلیل اصلی برای تحلیل رفتار سهم به صورت گسسته مساله فازی بودن نتیجه این تحقیق می باشد.جمله اخیر باید مفصلاً توضیح داده شود. فرض کنیم می خواهیم پیش بینی کنیم که رشد یک سهم در طی هفته آینده چقدر است؟ شاید گفتن یک عدد دقیق برای پیش بینی درصد رشد قیمت یک سهم مثلاً ۱۶/۳٪ در یک هفته آینده کمی عجیب و غیر منطقی به نظر برسد. دلیل این امر آن است که متغیرهایی که در پیش بینی رفتار قیمت یک سهم دخیلند بسیار فراوانند، اگرچه شاید تاثیر آنها بسزا نباشد، لذا بدون در نظر گرفتن آنها پیش بینی دقیق میزان رشد سهم در آینده امری محال به نظر می رسد اما اگر در جواب سوال بگوییم قیمت این سهم به احتمال ۷۵٪ در یک ماه آینده یک رشد معنی دار خواهد داشت و البته قبلاً هم تعریف کرده باشیم که رشد معنی دار به معنای متوسط رشددرصد قیمت سهم بیش از ۰/۰۶۶٪ در روز می باشد، در این صورت ما توانسته ایم این ادعا را مطرح نماییم که به احتمال ۷۵٪ ما سودی بیش از ۰/۰۳۳٪ در هفته خواهیم داشت.این نوع پیش بینی در واقع همانطور که گفته شد به نوعی فازی تلقی می گردد زیرا ما به طور کیفی به رشد عالی این سهم در یک هفته آینده اعتقاد داریم اما برای کیفی بودن خود نیز حدودی را تعریف می نماییم.

این موضوع برای کاربر نیز جلوه بهتری پیدا می کند زیرا در بازار آنچه که بیش از پیش بینی میزان دقیق رشددرصد قیمت یک سهم برای فعالان اهمیت دارد اصل موضوع تصمیم خرید یا فروش است، یعنی یک رشد عالی می تواند باعث تصمیم گیری به خرید گرددو بالعکس اگر پیش بینی یک افت شدید با احتمال بالا صورت گیرد می تواند باعث تصمیم فروش سهم گردد.

موضوع مهم در اینجا تعیین این فازها و یا حالات مختلف است که باید توسط متخصصین و فعالان بازار این موضوع به طور دقیق صورت گیرد ، که در این مقاله حالات مختلف برای متغیر درصد رشد قیمت سهم و نیز حجم معاملات صورت گرفته است .

۳-۲- تشکیل ماتریس انتقال

با توجه به استدلالات عنوان شده درباره مارکوفی بودن رفتار قیمت یک سهم با مفروضات مذکور و استدلال رفتاری سهم، با یک ماتریس ۹ در ۹ با شکل زیر روبه رو هستیم.

جدول ۲. ماتریس انتقال برای حالت مذکور

	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	1111	1112	1113	1121	1122	1123	1131	1132	1133
12	1211	1212	1213	1221	1222	1223	1231	1232	1233
13	1311	1312	1313	1321	1322	1323	1331	1332	1333
21	2111	2112	2113	2121	2122	2123	2131	2132	2133
22	2211	2212	2213	2221	2222	2223	2231	2232	2233
23	2311	2321	2313	2321	2322	2323	2331	2332	2333
31	3111	3112	3113	3121	3122	3132	3131	3132	3133
32	3211	3212	3213	3221	3222	3223	3231	3232	3233
33	3311	3312	3313	3321	3322	3323	3331	3332	3333

به طور مثال منظور از $a_{11\text{-}32}$ یعنی مقدار احتمال گذار از حالت ۱۱ (متوسط درصد رشد قیمت بیش از ۰/۰۶۶٪ و متوسط درصد رشد حجم معاملات بیش از ۲٪) به حالت ۳۲ (متوسط درصد رشد قیمت بین ۰/۰۶۶٪ و ۰/۰۶۶-٪ در روز و متوسط درصد رشد حجم معاملات کمتر از ۲٪) در انتقال از یک وضعیت به وضعیت بعد می باشد.

برای این کار باید داده های مربوط به قیمت بسته شدن یک سهم را در انتهای هر روز و بطور پیوسته داشته باشیم . در اینجا با داده های قبلی یک شرکت باید آرایه های این ماتریس را بدست آوریم. در واقع می خواهیم مدل خود را تربیت[۱] نماییم. برای این کار برنامه ای در نرم افزار اکسل نگاشته شده است تا با اضافه نمودن داده های قبلی سهام یک شرکت این ماتریس تشکیل گردد. پس از تکمیل ماتریس اولیه که میزان انتقال از هر وضعیت به وضعیت دیگر را شمارش کرده، باید در سطرها نرمالیزاسیون صورت گیرد. زیرا در ماتریس اولیه کار شمارش تعداد مشاهده انتقالها صورت می گیرد. حال آنکه در یک ماتریس مارکوف باید مجموع احتمالات خروجی از یک حالت در هر وضعیت برابر یک گردد. لذا باید تک تک اعداد بر مجموع هر سطر تقسیم گردد. البته باید اشاره گردد که مقداری از داده ها نیز باید برای تست مدل[۲]نگه داشته شود.

در پایان باید داده های حاصل از تست با داده های اصلی با یک تست آماری معتبر آزمایش گردند و صحت مدل مورد آزمایش قرار گیرد. اگر مدل از آزمایش موفق بیرون آمد مدل قابل اعتمادی تلقی می

گردد.معمولاً ما می خواهیم بدانیم که اگر در هفته گذشته یک سهم رفتار حالت i ام را از خود بروز دهد با چه احتمالی می توان انتظار داشت که سهم رفتار j ام را از خود بروز دهد و یا اینکه اگر درصد قیمت سهم یکرشد معنادار و درصد رشد حجم معاملات خنثی را در یک هفته گذشته داشته در یک هفته آینده می توان امید به چه میزان سودآوری از سهم داشت؟ آیا این سهم را باید خرید و یا اینکه باید فروخت؟که با به دست آمدن ماتریس انتقال وضعیت می توان پیش بینی رفتار سهم را در پریودهای های آینده حدس زده و یا اینکه احتمال های شرطی گذار از چند وضعیت متوالی را به دست آورد.

۴- نتایج محاسباتی-مطالعه موردی

ما مدل خود را در نرم افزار اکسل توسعه داده ایم. در این راه از داده های موجود از شاخص شرکت های داو-جونز[1] (DJIA) استفاده کرده ایم. شاخص داوجونز ، یکی از شاخص های بازار سهام می باشد که توسط مؤلف روزنامه وال استریت ژورنال[2] و مؤسس شرکت Dow Jones & Company ، یعنی چارلز دو ایجاد شده است. این شاخص قدیمی ترین شاخص بازار ایالات متحده محسوب می شود. امروزه این شاخص شامل قیمت وزن دار ۳۰ عدد از بزرگترین شرکتهای بزرگ عمومی صنعتی در ایالات متحده می باشد.

۴-۱- نتیجه ماتریس برای مطالعه موردی

در این بخش می خواهیم دقیقاً آنچه که در بخش تشریح روش ذکر گردید، پیاده کنیم. داده های مورد استفاده حدوداً از سال ۱۹۹۹ میلادی تا ۲۰۱۱ می باشند و از آن سال ها برای تست روش استفاده کرده ایم. از آنجا که مدل ما با میانگین های ۵ روزه و یا هفتگی کار می نماید بنابراین در شروع باید درصد های تغییر قیمت و نیز تغییرات حجم معاملات بصورت هفتگی تبدیل گردد. سپس بسته های حاوی دو متغیر مذکور را با توجه به حالات تشریح شده طبقه بندی نموده ایم. پس از طبقه بندی نوبت به تبدیل هر کدام از حالات به حالت دیگر یا همان حالت در مرحله بعد(هفته آینده) می باشد. سپس با شمارش همه تبدیلات به یکدیگر تعداد گذارها را شمارش کرده ایم و در پایان نیز هر کدام از تعداد شمارش شده را بر تعداد کل هر ردیف تقسیم نموده ایم تا نهایتاً آرایه های ماتریس انتقال وضعیت بدست آید. در ادامه روش را تست می کنیم.

۴-۲- آزمون کارایی روش

پس از اینکه ماتریس مربوطه به دست آمدباید مدل تست گردد. در واقع اگر فرض گردد که این ماتریس و احتمالات مربوطه درست محاسبه شده اند باید با داده های تستی نیز ماتریسی شبیه به این داشته باشیم. یک نکته مهم این است که در تست این روش نیز باید داده به اندازه کافی وجود داشته باشد. زیرا این روش یک روش احتمالی است و اینکه به چه میزان این روش درست جواب خواهد داد به تعدد داده های تست بستگی دارد. برای این موضوع حدود ۱۰۰۰ داده خارج از داده های تربیت مدل برای تست آن در نظر گرفته شده اند که داده های مربوط به سال های ۱۹۹۹ به بعد داو جونز می باشند. یعنی فرض بر این است که خاصیت مارکوفی بودن در صورت وجود باید برای داده های دیگر نیز خود را نشان دهند. در واقع از نظر

احتمالی اگر به کارایی قابل قبول برسیم می توانیم ادعا کنیم که رفتار سهم را می توان با یک زنجیر مارکوف به نحوی که توضیح داده شد مدل کرد. در اینجا ما بر حسب نیاز از دو نوع تست استفاده کرده ایم تا صحت مدل را نشان دهیم: ۱) آزمون مربع کای[۳]، و ۲) تست رگرسیون[۴]

۴-۲-۱-آزمون مربع کای

داده های شمارشی یا کیفی از تعداد مشاهدات درون یک نمونه تشکیل می گردد که در رده های مشخصی قرار می گیرند. معمولاً داده ها به منظور آزمودن فراوانی نسبی این رده ها تهیه می گردند. بطور مشخص فرض کنید O_1، O_2 ، ...، O_kرا فراوانی های مشهود هر رده بگیریم، تجربه گر به آزمودن فرض مربوط به فراوانی های نسبی واقعی علاقه مند است.

۱	$O_۱$	$E_۱$
۲	$O_۲$	$E_۲$
⋮	⋮	⋮
k	O_k	E_k

آماره آزمون $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} (O_i - E_i)^2 / E_i$ است که در مورد نمونه های به اندازه کافی بزرگ توزیع تقریبی مربع کای دارد. تعداد درجات آزادی به چگونگی استفاده از داده ها در محاسبه E_i بستگی دارد. مقدار کوچک مربع کای به منزله توافق مناسبی بین مقادیر مشاهده شده و نظری است و مقدار بزرگ آن دال بر عدم توافق است:

فرض بر این است که هریک از n مشاهده می تواند درون یکی از K رده قرار گیرد و p_1، p_2 ، .....، P_k را احتمالات واقعی در نظر بگیرید، یعنی P_i را احتمال قرار گرفتن یک مشاهده تصادفی در رده i ام فرض نمایید. در این نوع مساله فراوانی های نظری از رابطهE_i =n* p_iبدست می آید و آماره مربع کای k-1درجه آزادی دارد.

در مساله ما با توجه به مارکوفی بودن فرآیند در هر ردیف یک توزیع مستقل خواهیم داشت. بعبارتی دیگر هر کدام از وضعیت ها با احتمالی به وضعیت های دیگر و یا همان وضعیت در مرحله بعد تبدیل می گردند. بنابراین باید ۹ تست مستقل مربع کای با ۸ درجه آزادی را امتحان نمود. البته برای اثبات مارکوفی بودن فرآیند نه فقط برای ماتریس انتقال وضعیت مرتبه اول، بلکه برای دیگر مرتبه ها نیز باید تست انجام گیرد تا صحت مدل معین گردد. بعبارتی باید همه مراتب از ماتریس ها این صحت را نشان دهد. البته بدلیل همگرایی ماتریس و این نکته که این روش یک روش پیش بینی کوتاه مدت است لذا عملاً ماتریس پس از ۸ مرحله همگرا شده و ماتریس نهایی بدست می آید و لذا تست ها نیز تا این مرتبه از ماتریس انتقال وضعیت انجام گرفته است.

برای انجام این تست ها با داده هایی که برای بدست آوردن تست مدل بکار رفت، این بار دقیقاً مانند همان الگوریتم و فقط با این تفاوت که در هر مرتبه از ماتریس شمارش بر روی جهش های متناسب با مرتبه

ماتریس صورت گرفته است، عمل می کنیم . به این معنی که مثلاً برای بدست آوردن ماتریس مرتبه۲ شمارش تبدیل حالت بجای اینکه از یک بسته ۵ روزه به بسته ۵ روزه بعد گذر کند به بسته ۵ روزه ۲مرحله بعد گذر می نماید. شکل زیر بخوبی مؤید این مطلب می باشد.

Stage 1(first 5 day)	Stage 2(second 5 day)	Stage 3(third 5 day)	…	…	Stage n(nth 5 day)
State one 11	State one 11	State one 11	…	…	State one 11
State two 12	State two 12	State two 12	…	…	State two 12
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
State nine 33	State nine 33	State nine 33	…	…	State nine 33

شکل۲. بدست آوردن ماتریس انتقال مرتبه۲

حال ماتریس بدست آمده از این روش با انجام عملیات ضرب ماتریس مرتبه اول در خودش که از داده های مربوط به تربیت داده(ماتریس اصلی) بدست آمده است در تست مربع کای قرار گرفته و نتیجه گیری نهایی انجام می گردد.

۴-۲-۲-آزمون رگرسیون

روش رگرسیون برای تست داده ها از یک منطق ساده ولی کارا پیروی می نماید. در این روش همه ۸۱ داده از ماتریس اصلی و ماتریس تست را به مثابه متغیرهای مستقل و وابسته ای در نظر گرفته و بین آنها یک رابطه رگرسیون خطی برقرار می نماییم. این مدل خطی در حالت کلی به شکل زیر می باشد.

$$y = \beta X + \alpha$$

بدست آوردن ضرایب خود مبحثی جداگانه است، فقط در اینجا ذکر می کنیم که این ضرایب به روش برآورد درستنمایی ماکسیمم(MLE) و یا حداقل مربعات خطا (MSE) بدست می آیند. پس از بدست آوردن این روابط، در صورتی که ضریب β برابر با یک و ضریب αبرابر با صفر باشد می توان ادعا کرد که نتایج حاصل از تست با نتایج حاصل از مدل مطابقت قابل قبولی داشته است. اما در اینجا شاید دقیقا مقدار های یک و صفر برای این ضرایب بدست نیاید. لذا باید از تخمین های با فاصله اطمینان ، بهره برد و فاصله اطمینانی با درصد اطمینان مورد نظر مثلاً ۹۵ درصد برای دو پارامتر بدست آورد. اگر یک در بازه پیش بینی β و صفر در بازه پیش بینی α قرار گیرد، در آن صورت می توان به یکسان بودن نتایج حاصل از تست و نتایج اصلی با سطح اطمینان خاص اعتماد نموده زیرا رابطه $y = x$ برقرار گشته است

و در غیر این صورت نتایج قابل اطمینان نمی باشند. البته در تست رگرسیون نیز باید بین همه مرتبه های ماتریس انتقال وضعیت تستی و اصلی تست انجام پذیرد.

۴-۳- بحث و بررسی نتایج

می توانیم نتیجه گیری نماییم که خاصیت بی حافظگی در بازار سهام وجود دارد. در بررسی هایی که انجام گرفت نتیجه این شد که این خاصیت بر ای همه سهم ها مصداق پیدا نمی کند. این خاصیت در همه بازارها نیز مصداق پیدا نمی کند. پس از تحقیق این مدل بر روی بیش از ۵۰ شرکت به نتایج ذکر شده رسیدیم :

۴-۳-۱-کارایی بازار

بر اساس نتایج می‌توان اذعان داشت که این مدل در بازارهای شبه کارا بهتر از بازارهای کارا و ناکارا جواب خواهد داد. طبق تعریف بازاری کاراست که اطلاعات در آن باعث حرکت دلیل دار یک سهم می گردد و مادامیکه اطلاعاتی در بین نباشد نمی توان از سهم انتظار رشد یا افت داشت. این اطلاعات به موقع و در اختیار همگان به یکسان قرار می گیرد. در مقابل بازار ناکارا تعریفی مقابل تعریف فوق را دارد. البته می دانیم که این تعاریف حالات حدی خواهند بود و بازارهای مختلف به صورت یک طیف بین این دو وضعیت قرار خواهند گرفت. هرچه این بازارها نزدیک به شبه کارا باشد این مدل کارایی بهتری خواهد داشت

۴-۳-۲- رفتار نرمال در طول زمان

اصولاً سهم ها و بطور کلی بازارهایی که از پایداری بیشتری در معاملات برخوردارندبعلت کمتر بودن انحرافات معاملات آنها از یک حالت نرمال می توانند مصداق خوبی برای این مهم باشند. این موضوع نشان می دهد حتی در بازارهای بورس خوب دنیا نیز باید به دنبال شرکت هایی با روند محکم و بدور از نوسانات بیش از حد نرمال این مدل پیاده سازی شود. از مهمترین عوامل مؤثر در روند منطقی یک سهم این است که در بازار و یا بطور خاص سهام مربوطه قیمت بطور دستوری نوسان نداشته باشد و در یک کلام در بازارهایی که حجم بیشتر آن را بورس دولتی تشکیل می دهد مدل جواب مناسبی نخواهد داد.

در واقع آنچه که باید بطور کامل بر قیمت تأثیر بگذارد عرضه و تقاضای واقعی یک سهم می باشد. در مقابل توجه گردد که داده های مثال عملی این تحقیق از داوجونز می باشد. داده های مورد مطالعه از سال ۱۹۹۹ تا ۲۰۱۱ و داده های تست از سال ۲۰۱۱ به بعد می باشد. اما با توجه به عامل محکم بودن رفتار سهام و منطقی بودن حرکت آنها و البته عامل کفایت داده ها که به آن اشاره خواهیم کرد، می بینیم که مدل در این حالت جواب می دهد. بنابراین رفتار این شاخص در ۱۴ سال قبل برای یک ماه آتی خود قابل تطبیق با رفتار امروز آن در قبال یک ماه آینده می باشد، البته با توجه به عوامل درصد رشد قیمت سهم و حجم معاملات که ما برای مدل در نظر گرفتیم.

یکی از دلایلی که داده های داو جونز از ۱۴ سال پیش رفتاری یکسان در قبال تغییرات متغیرهای بکار رفته در این مدل و یا هر متغیر دیگری از خود نشان می دهند، این است که مشتری در بازارهای باسابقه حرفه ای تر عمل می کند و به یک ثبات رفتاری رسیده است.

۴-۳-۳- داده های قابل اعتماد

یکی از مهمترین مطالبی که بطور عام برای هر مدلی باید مورد صحت باشد داده های قابل اعتماد است که یک فرضیه را با آنها مورد تست و آزمایش قرار می دهیم. داده های لازم را برای بورس نیویورک و دیگر بازارهای بورس دنیا از سایت www.finance.yahoo.comبدست آورده ایم.

۴-۳-۴-کفایت داده ها

یکی از مهمترین مسائلی که در این مدل بعنوان ارکان لازم باید وجود داشته باشد، میزان داده های آن می باشد. تعداد داده ها یکی از عوامل محدود کننده بر روی زمینه های قابل بررسی می باشد به این معنی که حداقل باید ۲۰۰۰ داده مورد اعتماد برای یک مطالعه دقیق و نیز تست مدل موجود باشد.

۴-۳-۵-بدست آوردن ماتریس انتقال برای پیش بینی رفتار یک سهم (البته بیشتر در کوتاه مدت)

وقتی بپذیریم که رفتار یک سهم از خاصیت مارکوفی بودن پیروی می نماید با داشتن ماتریس انتقال آن می توانیم به پرسش هایی برای آینده سهم جواب دهیم. البته همانطور که شرح داده شد، شاید بیشتر فعالان در بازار سرمایه علاقه مندند که بدانند بطور تقریبی این سهم رشد خواهد کرد یا خیر و دانستن اینکه آیا مثلاً ۱۶/۳٪ رشد در انتظار این سهم در یک ماه آینده می باشد. این مدل نمی تواند بطور دقیق میزان رشد و یا افت را در بازه های زمانی آینده پیش بینی نماید اما به این سؤال جواب خواهد داد.

۴-۳-۶- جمع‌بندی نتایج پژوهش

توجه گردد که هدف اصلی این مقاله دو موضوع اساسی می باشد.اول اینکه نشان دهد بورس خاصیت بی حافظگی را در شرایط و با در نظر گرفتن مفروضات خاصی از خود نشان می دهد و دوم آنکه بتواند راهکاری برای پیش بینی قیمت سهام در آینده ارائه نماید.باتوجه به توضیحات بالا و یک نمونه عملی انجام شده هدف اصلی را با نشان دادن مراحل روش کار و تست نشان داده ایم. اما درباره مورد دوم، این موضوع را بر روی ماتریس انتقال وضعیت داو جونز بدست آمده که صحت آن نیز از طریق تست تایید گردید. در ادامه به چند سؤال فرضی مطروحه پاسخ می دهیم.

سؤال اول- چقدر احتمال دارد که در هفته آینده سهم ما رشد خوبی بکند(بالاتر از ۰/۰۶۶٪ در روز) به شرط آنکه رشد روزانه قیمت آن در هفته گذشته ۰/۵٪ در روز بوده و رشد حجم معاملاتی برابر ۰/۵٪ نسبت به هفته قبل خود داشته است؟ و آیا توصیه ای به خرید این سهم میشود؟

جدول ۳. ماتریس انتقال مرتبه اول داو جونز

states	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	14%	3%	10%	6%	2%	5%	32%	9%	20%
12	14%	5%	12%	8%	2%	9%	28%	10%	14%
13	14%	4%	14%	9%	2%	4%	29%	5%	17%
21	21%	8%	17%	7%	2%	7%	17%	8%	13%
22	33%	6%	11%	8%	0%	6%	14%	1%	21%
23	20%	7%	19%	6%	3%	8%	23%	3%	11%
31	24%	11%	26%	1%	3%	5%	14%	5%	10%
32	25%	10%	23%	7%	4%	6%	10%	6%	8%
33	30%	8%	17%	10%	3%	4%	17%	4%	7%

پاسخ-در واقع طبق توضیحاتی که در بخش های قبل و مفروضات این مسأله داده شد، در این سوال ما در وضعیت ۱۱ هستیم و در واقع جواب ما جمع وضعیت های ۱۱ و ۲۱ و ۳۱ می باشد.
بنابراین می توان گفت ۵۲٪*۱۴٪+۳۲٪ احتمال آن است که سهم ما در هفته آینده سهم ما رشد خوبی بکند. با توجه به اینکه حداقل احتمال رشد این سهم مجموع حالات ۱۳ و ۲۳ و ۳۳ یعنی معادل ۳۵٪ است، لذا نسبت شانس برابر با ۳۵/۵۲ یعنی معادل تقریبی ۱/۵ است لذا می توان خرید را توصیه نمود.
سؤال دوم- چقدر احتمال دارد که روند حرکتی سهم هم در این هفته و هم در هفته آینده مثبت باشد؟
پاسخ- در واقع پاسخ به این سؤال پاسخ کامل تری به سؤال اول است.

جدول۴. ماتریس انتقال مرتبه دوم از داو جونز

states	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	22%	8%	19%	6%	3%	8%	19%	6%	12%
12	21%	8%	18%	6%	3%	6%	20%	6%	12%
13	22%	7%	18%	6%	3%	8%	21%	6%	13%
21	20%	7%	17%	7%	2%	6%	22%	6%	14%
22	20%	6%	15%	7%	2%	8%	24%	6%	14%
23	20%	7%	17%	6%	2%	6%	23%	6%	14%
31	19%	6%	16%	7%	2%	8%	24%	6%	15%
32	19%	6%	15%	7%	2%	6%	24%	6%	15%
33	19%	6%	16%	6%	2%	6%	24%	7%	15%

در اینجا هم باید در هفته اول سهم مثبت باشد و هم در هفته دوم، احتمال اینکه سهم در هفته دوم مثبت باشد برابر است با ۲۲٪+۶٪=۳۴٪ بنابراین اینکه سهم هم در هفته اول مثبت باشد و هم در هفته دوم برابر است با ۳۴٪*۵۲٪=۱۷/۷٪ و با توجه به اینکه احتمال اینکه در هر دو هفته سهم منفی باشد عبارتست از ۳۵٪*۳۶٪=۱۲/۶٪ لذا نسبت شانس برابر با ۱۲/۶ / ۱۷/۷ یعنی معادل تقریبی ۱/۴ است لذا باز هم می توان خرید را توصیه نمود.

در اینجا بجز دو سؤال طرح شده سؤالات زیاد دیگری را نیز می توان از آینده سهم پرسیده و جواب آن را براساس این مدل یافت که ما فوقاً نمونه هایی از آن را بیان کردیم. اما آنچه را که به طور کلی می توان گفت این است که همه مدل هایی که تاکنون برای بازار سرمایه بکار گرفته شده اند همگی دارای نقاط قوت و ضعف هستند که در این بخش ما سعی کردیم نقاط قوت و آنچه که این مدل نشان می دهد را توضیح دهیم و نیز محدودیت های عملیاتی و در واقع ضعف های آن را برشمرده ایم که از مهمترین قوت ها فارغ بودن آن از اوضاع سیاسی و عوامل بیرونی در صورت کفایت داده ها به مقدار زیاد و از ضعف های عمده آن نیز همین بحث کمبود داده در بسیاری موارد می توان ذکر کرد.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

در این تحقیق از مدل زنجیره مارکوف به منظور ارائه راهکاری در پیش‌بینی رفتار قیمت سهام در آینده و بررسی خاصیت بی‌حافظگی بورس بهره گرفته شد. بدین منظور برای هر یک از متغیرهای درصد تغییر قیمت سهام و درصد تغییر حجم مبادلات سه سطح مثبت، خنثی و منفی در نظر گرفته شد و از تعامل آن‌ها ۹ حالت یا وضعیت برای مدل زنجیره مارکوف تعریف گردید. کارایی مدل مورد نظر بر روی یک مطالعه موردی از شاخص صنایع داوجونز مورد بررسی قرار گرفت و بر روی نتایج آن بحث شد. نتایج نشان دادند که استفاده از زنجیره مارکوف در پیش‌بینی قیمت سهام می‌تواند مطلوب باشد و همچنین تحت شرایطی می-توان خاصیت بی‌حافظگی به بورس نسبت داد.

فهرست منابع

* de Souza e Silva, E. G., L. F. Legey, et al. (2010). "Forecasting oil price trends using wavelets and hidden Markov models." Energy economics32(6): 1507-1519.
* Hassan, M. R. and B. Nath (2005). Stock market forecasting using hidden Markov model: a new approach. Intelligent Systems Design and Applications, 2005. ISDA'05. Proceedings. 5th International Conference on, IEEE.
* Hassan, M. R., B. Nath, et al. (2007). "A fusion model of HMM, ANN and GA for stock market forecasting." Expert Systems with Applications33(1): 171-180.
* Landauskas, M. and E. Valakevičius (2011). "Modelling of Stock Prices by Markov Chain Monte Carlo Method." Intelektinė ekonomika(5 (2): 244-256.
* Lee, J. and M. Shin (2009). "Stock Forecasting using Hidden Markov Processes." available at: http://cs229.stanford.edu/proj2009/ShinLee.pdf.
* Svoboda, M. and L. Lukáš (2012). "Application of Markov chain analysis to trend prediction of stock indices." Proceedings of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics.
* Turner, C. M., R. Startz, et al. (1989). "A Markov model of heteroskedasticity, risk, and learning in the stock market." Journal of Financial Economics25(1): 3-22.

* Wang, Y.-F., S. Cheng, et al. (2010). "Incorporating the Markov chain concept into fuzzy stochastic prediction of stock indexes." Applied Soft Computing10(2): 613-617.
* Zhang, D. and X. Zhang (2009). "Study on forecasting the stock market trend based on stochastic analysis method." International Journal of Business and Management4(6): P163

یادداشت‌ها

[1]Model Training
[2]Model Testing
[3]Chi Square Test
[4]Regression Test