فصلنامه علمی
مدلسازی اقتصادی
Economic Modelling
دوره ۱۶. شماره ۵۹. پاییز ۱۴۰۱ صفحه‌های ۶۷ تا ۸۶

علمی

مقایسه کالیبراسیون مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی‌بر نوسانات تصادفی و تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته[۱]

فروغ لطفی[*]، رضاآقاجان نشتائی[**]، مهدی مشکی میاوقی[+]

DOI: 10.30495/ECO.2023.1976840.2722

تاریخ دریافت:
۱۴۰۱/۱۰/۲۲
تاریخ پذیرش:
۱۴۰۱/۱۱/۲۵

طبقه‌بندی JEL:
G11, G13, G17.

واژگان کلیدی:
تبدیل انتگرالی، روش ذوزنقه‌ای، کالیبراسیون، اوراق اختیار خرید، نوسان تصادفی.

چکیده

هدف این مقاله، مقایسه کالیبراسیون مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی‌بر نوسانات تصادفی و تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته است. بدین‌منظور، از تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته مبتنی‌بر نوسانات ثابت و نیز مدل هستون مبتنی‌بر نوسانات متغیر برای قیمت‌گذاری استفاده شد. برای اجرای مدل مطرح‌شده، از داده‌های اختیار خرید عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده کرده است. نتایج نشان داد، در وضعیت بی‌تفاوتی و وضعیت سوددهی کالیبراسیون مدل هستون برای همه سررسیدها بهتر از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته عمل می‌کند. در وضعیت زیان‌دهی نیز اگرچه کالیبراسیون مدل هستون در دوره کوتاه‌مدت ضعیف عمل می‌کند؛ اما با افزایش زمان تا سررسید، کالیبراسیون مدل هستون بهتر از تکنیک تبدیل انتگرالی در میان‌مدت و بلندمدت پاسخ داده است. براساس نتایج پیشنهاد می‌شود، در راستای توسعه زیرساخت‌های آموزشی و فرهنگ‌سازی اوراق اختیار معامله، اداره ابزارهای نوین مالی شرکت بورس اوراق بهادار تهران، برای محاسبه پارامترهای کلیدی قراردادهای اختیار معامله در سناریوهای مختلف، مدل مطرح‌شده را مدنظر قرار دهد تا از این رهگذر، ارزش‌گذاری دقیق‌تری از قراردادهای اختیار معامله به‌دست آید.

[۱] این مقاله مستخرج از رساله دکتری فروغ لطفی به راهنمایی دکتر رضا آقاجان نشتائی و مشاوره دکتر مهدی مشکی میاوقی در دانشکده مدیریت و حسابداری دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت است.

[*] دانشجوی دکتری تخصصی مهندسی مالی، گروه مدیریت، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران، پست الکترونیکی: lotfi.forough@gmail.com

[**] استادیار، گروه مدیریت بازرگانی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران (نویسنده مسئول)، پست الکترونیکی: nashtaei@iaurasht.ac.ir

[+] دانشیار، گروه حسابداری و مالی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران، پست الکترونیکی: mhd.meshki@yahoo.com

۱. مقدمه

طی چندسال گذشته، رشد و توسعه بازار سرمایه کشور و ارائه سازوکارها و ابزارهای مختلف توسط دولت برای حمایت از آن، اهمیت بازار سرمایه را در اقتصاد کشور افزایش داده است. یکی از این ابزارها، «اوراق مشتقه»[۱] است. با توجه به افزایش چشم‌گیر مبادله ابزار مشتقه از جمله «اوراق اختیار معامله»[۲]، مسئله ارزش‌گذاری این اوراق اهمیت شایانی یافته‌است (فخاری، ولی‌پور خطیر و موسوی، ۱۳۹۶).

از طرفی، مدل‌های ریاضی به‌ویژه، روش‌های حل دیفرانسیلی از پیشرفته‌ترین روش‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله هستند. یکی از این روش‌ها، تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته[۳] است (ایتکین، لیپتون و موراوی[۴]، ۲۰۲۱). اگرچه، نظریه تبدیل انتگرال، جدید و بدیع نیست؛ اما گفته می‌شود که هنوز ازنظر کاربردی، مانند پیچیدگی مدل‌های هوش مصنوعی نظیر شبکه‌های عصبی کانولوشن[۵] یا پردازش تصویر تشخیص پزشکی، ارزش تحقیقات بیشتر را دارد (راثیه، جئوم و کیم[۶]، ۲۰۲۱). همچنین، تجزیه و تحلیل‌ها نشان می‌دهد این روش‌ها از نظر محاسباتی کارآمد هستند و از دقت و پایداری قابل قبولی بهره‌مندند (ایتکین و همکاران، ۲۰۲۱).

از آنجا که تغییر قیمت سهم به نوسان بازار منجرمی‌شود و پیش‌بینی قیمت منصفانه[۷] اختیارها در این شرایط نیازمند حل معادلات پیچیده است؛ از این‌رو، در این مقاله برای دست‌یابی به توزیع نرمال لگاریتمی[۸] یا همان تابع توزیع احتمال شرطی با توجه به قیمت روز سهام، از تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته استفاده شده است که مبتنی‌بر مدل بلک – شولز[۹] است. گفتنی است مدل بلک– شولز برای ارزیابی اختیارات به نوسانات ثابت متکی است که گرچه نمایانگر پویایی در بازارهای مالی نیست؛ اما از مزایایی هم‌چون سادگی و فرم صریح برای قیمت اختیار معامله برخوردار است (شاکران، ۱۳۹۱).

با این اوصاف، مدل بلک– شولز ایرادهایی هم دارد؛ برای مثال، داده‌های واقعی نشان می‌دهد هرچند این مدل در روند بازار، پیوستگی آشکاری به‌نمایش می‌گذارد؛ در دنیای واقعی، قیمت‌ها پرش‌دار هستند؛ افزون‌بر آن، حافظه بلندمدت[۱۰] در بازده دارایی‌ها بیانگر وجود خودهم‌بستگی میان مشاهده‌ها با فاصله زمانی زیاد است (جنابی، ۱۳۹۸).

به‌همین‌دلیل، در این مقاله برای رفع ایرادهای مدل بلک– شولز، از مدل‌های مبتنی‌بر نوسانات تصادفی نیز استفاده شده‌است که برخلاف مدل بلک– شولز، نوسان قیمت دارایی پایه را با یک متغیر تصادفی با «نوسان متغیر»[۱۱] درنظر می‌گیرد.

در این حالت، پویایی این روند تصادفی می‌تواند توسط برخی فرایندهای دیگر مانند حرکت براونی اجرا شود (تائو و تائو[۱۲]، ۲۰۱۲). تلاطم تصادفی و پرش‌ها، از ویژگی‌های فرایند جهان واقعی است و آثار آن، قیمت‌های اختیار

---

1 Derivatives
2 Option Contracts
3 Generalized Integral Transformation Technique (GITT)
4 Itkin, Lipton & Muravey
5 Convolutional Neural Networks (CNN)
6 Rathie, Geum & Kim
7 Fair Value
8 Log Normal
9 Black-Scholes
10 Long-Term Memory (LTM)
11 Stochastic Volatility vs. Constant Volatility
12 Thao & Thao

معامله را متاثر می‌سازد (آلبانز و کوزنتسوف[1]، ۲۰۰۵). ازاین‌رو، در این پژوهش برای گرفتن اثر ناپیوستگی نوسان‌ها از مدل هستون به‌عنوان مدل پایه دیگری برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار استفاده شده‌است. مدل هستون یکی از محبوب‌ترین مدل‌های نوسانات تصادفی برای قیمت‌گذاری «اوراق اختیار معامله(/آپشن[2])» است و می‌توان از آن برای قیمت‌گذاری مشتقاتی که هیچ فرمول ارزیابی فرم بسته‌ای وجود ندارد، استفاده کرد (میلان و پوسپزیل[3]، ۲۰۱۷).

انگیزه اصلی توسعه مدل‌های پیشرفته قیمت‌گذاری نوسان تصادفی، نیاز به اطلاعات بهتر در بازار است و همه مدل‌های قیمت‌گذاری به یک مجموعه پارامتر نیاز دارند تا پویایی هرمدل را به‌طور کامل مشخص کنند. برای اینکه یک مدل در بازارهای واقعی کارا باشد و برای قیمت‌گذاری و مدیریت ریسک قابل‌استفاده باشد، باید «کالیبراسیون[4]» انجام شود. این تکنیک مستلزم استفاده از تکنیک‌های بهینه‌سازی با هدف شناسایی مجموعه پارامترهای مدل است که قیمت مدل برای آنها با قیمت بازار مطابقت داشته باشد (هیرسا و نفسی[5]، ۲۰۱۴).

این مقاله با کمک از الگوریتم‌های بهینه‌سازی جهانی مانند «الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر»[6] که سعی می‌کند دید کلی از فضای جستجو را حفظ کند و این امر را با استفاده از جمعیتی از افراد که به‌طور هم‌زمان در فضای جستجو کاوش می‌کنند، سعی در تطبیق بهینه پارامترهای مدل با قیمت‌های بازار داشته‌است. الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر در کاوش فضای جستجو و شناسایی مناطقی که بهینه‌سازی بالقوه در آن واقع شده‌اند، بسیار کارآمد دانسته شده‌است (سو، چن، اوتامی، لین و وی[7]، ۲۰۲۲).

تحلیل مطالعات مرتبط داخل کشور نشان می‌دهد حتی تکنیک کالیبراسیون بدرستی معرفی نشده است و عمدتا از روش‌های یادشده به‌تنهایی استفاده می‌شود که از دقت مدل می‌کاهد (صاحبی‌فرد، دسترنج و عطاآبادی، ۱۳۹۹؛ موسوی و سهیلی، ۱۳۹۵). بنابراین، سوال اصلی پژوهش این است که کدام‌یک از این دو مدل می‌تواند تحلیل دقیق‌تری از تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران ارائه نماید. در پاسخ‌گویی به سوال اصلی، دو فرضیه مطرح می‌شود که عبارتند از: ۱) کالیبراسیون مدل تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته مبتنی‌بر روش ذوزنقه‌ای، توانایی تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد و ۲) کالیبراسیون مدل تصادفی هستون مبتنی‌بر نوسان‌های دارایی پایه توانایی تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد.

در ادامه، برای آزمون این‌دو فرضیه، ضمن معرفی تکنیک کالیبراسیون، دو مدل مختلف معرفی‌شده کالیبره می‌شود و از این رهگذر سعی می‌شود، دو هدف ۱. قیمت‌گذاری عادلانه اوراق اختیار معامله و ۲. نزدیک شدن آن‌ها به واقعیات بازار تحصیل شود.

برای دست‌یابی به این اهداف، مقاله بدین‌شکل سازمان‌دهی می‌شود: پس از مقدمه، در بخش دوم، ادبیات پژوهش مرور می‌شود؛ در بخش سوم، روش پژوهش عرضه می‌شود؛ بخش چهارم به یافته‌ها و بخش پنجم، به نتیجه‌گیری و پیشنهادها تخصیص می‌یابد.

---

[1] Albanese, Kuznetsov

[2] گفتنی است در زبان گفتاری/محاوره‌ای فنی، واژه «آپشن» کاربرد فراوان‌تری از اصطلاح «اختیار معامله» دارد.

[3] Milan & Pospíšil
[4] Calibration
[5] Hirsa & Neftc
[6] Dove Swarm Optimization (DSO)
[7] Su, Chen, Utami, Lin & Wei

۲. مروری بر ادبیات پژوهش

- مبانی نظری

«قراردادهای اختیار معامله» که یکی از انواع اوراق مشتقه است، به دو نوعِ اختیار خرید و اختیار فروش تقسیم می‌شود. دارنده اختیار خرید با پرداخت مبلغی (پرمیوم) این حق (نه الزام و تعهد) را برای خود می‌خرد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمتی معین (قیمت اعمال) و در تاریخی مشخص یا قبل از آن، بخرد. با همین روال، دارنده اختیار فروش با پرداخت مبلغی این حق را برای خود می‌خرد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمتی معین و در تاریخی مشخص یا قبل از آن بفروشد (فرخی و فرخی، ۱۳۹۵).

به‌دلیل اهمیت اوراق اختیار معامله در پوشش ریسک و کسب بازدهی آربیتراژی[1]، طی چند دهه گذشته، تلاش‌های زیادی برای ارزش‌گذاری این اوراق صورت گرفته‌است. در سال ۱۹۷۳، بلک، شولز و مرتون، معادله دیفرانسیل تصادفی را معرفی کردند که رفتار تصادفی ارزش دارایی‌های مالی مانند سهام را مدل‌سازی می‌کرد. اگرچه، از این مدل هنوز هم در بازار مالی استفاده می‌شود؛ به آن انتقادهای زیادی وارد شده‌است. درواقع، این انتقادها به فرض‌هایی است که مهم‌ترین آن‌ها ثابت درنظرگرفتن نوسان دارایی پایه است. برای حل این معضل، از سال ۱۹۸۷ به بعد، مدل‌های ارزش‌گذاری مختلفی معرفی شده‌اند. ازجمله این مدل‌ها می‌توان به مدل‌های نوسان‌پذیری تصادفی مانند هستون اشاره کرد (میلان و همکاران، ۲۰۱۷).

در همان زمان که استفاده از مدل‌های تلاطم تصادفی رواج یافت، پژوهشگران به این نتیجه رسیدند که «پیوسته‌بودن مسیر فرایند قیمت‌ها» در تطبیق نتایج مدل با داده‌های واقعی اشکال‌هایی ایجاد می‌کند. لزوم توجه به حرکت‌های بزرگ بازار و اطلاعاتی که به‌طور ناگهانی، بازار را متاثر می‌ساخت، موجب شد توجه پژوهشگران به ارائه مدل‌هایی همراه‌با فرایندهای تصادفی جلب شود (فلورسکو، ماریانی و سون[2]، ۲۰۱۴).

این ابزار مدل‌سازی که کالیبراسیون نامیده می‌شود، فرایند تعیین یک پارامتر است؛ به‌گونه‌ای که قیمت مدل و قیمت بازار برای مجموعه معینی از ابزارهای قابل معامله با یکدیگر بسیار مطابقت داشته باشند. نهایتاً، این مدل می‌تواند فرصت‌های آربیتراژ را در میان مشتقات قابل معامله، کشف نماید و این برتری روش کالیبراسیون نسبت به سایر روش‌هاست (هیرسا و همکاران، ۲۰۱۴). در ادامه، مهم‌ترین پژوهش‌های داخلی و خارجی درخصوص موضوع بررسی می‌شود.

- پیشینه پژوهش

راجی‌زاده (۱۴۰۱) در پژوهشی با هدف تبیین مدل جدید نوسان در قیمت‌گذاری برگ اختیار معامله با استفاده از «شاخص نوسان VIX»[3]، معروف به «مدل گارو»[4] همراه با لحاظ مؤلفه‌های نوسان چندگانه، شامل واریانس شرطی مبتنی‌بر بازده (مؤلفه‌های پنهان) و پویایی واریانس تحقق‌یافته (مؤلفه پرش)، به ارائه مدل پرداختند. نتایج تجزیه‌وتحلیل

[1] Arbitrageur
[2] Florescu, Mariani & Sewell
[3] VIX Fluctuation Index
[4] GARV Model

فرضیه‌ها نشان داد محاسبه نوسان برمبنای مدل گارو با مؤلفه‌های پنهان و مؤلفه پرش در پیش‌بینی نوسان VIX، در مقایسه با مدل گارچ و آرچ دارای خطای اندازه‌گیری کم‌تری است.

صاحبی‌فرد و همکاران (۱۳۹۹) در پژوهش خود به قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی تحت مدل هستون برمبنای اطلاعات روزانه شاخص بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. در این پژوهش، قیمت‌گذاری در دو بخش با بازه‌های زمانی متفاوت انجام شد و برای حل مدل اصلی از روش تبدیل فوریه سریع استفاده شد. نتایج قیمت‌گذاری فرضی نشان داد قیمت‌گذاری اختیار معاملات مدل توانی نمی‌تواند از مدل هستون تبعیت کند و باعث ایجاد شرایط آربیتراژ در بازار بورس می‌شود.

باوندپوری گیلان، مظاهری و فتوحی فیروزآبادی (۱۳۹۶) در پژوهش خود معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی در رودخانه را با ضرایب وابسته به مکان و بهره‌گیری از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته در دامنه‌ای با طول محدود حل کرده‌اند. مقایسه نتایج (GITT) و حل‌های تحلیلی استفاده‌شده در صحت‌سنجی و حل عددی به‌همراه شاخص‌های آماری نشان از دقت بسیار بالای راه‌حل پیشنهادی دارد. همچنین، برای نشان دادن اهمیت به‌کارگیری ضرایب متغیر در معادله انتقال آلاینده در رودخانه، نتایج حل معادله با ضرایب ثابت و حل معادله با ضرایب متغیر مقایسه شد. محاسبه شاخص‌های آماری در این حالت بیانگر عدم دقت کافی نتایج معادله انتقال آلودگی با ضرایب ثابت است.

موسوی و همکاران (۱۳۹۵) در پژوهش خود بدون توجه به اینکه از چه مدلی برای تخمین قیمت استفاده می‌کنند، نظریه تطبیق پارامترها را بیان کرده‌اند و پارامترهای مدل هستون را با داده‌های بازار S&P500 مطابقت داده‌اند. سپس با استفاده از پارامترهای به‌دست‌آمده از تطبیق به‌عنوان نقطه شروع، اوراق اختیار معامله اروپایی و آسیایی را با شبیه‌سازی مونت‌کارلو قیمت‌گذاری کرده‌اند. نتایج نشان داد برای اختیار نامتعارف آسیایی قیمت‌های به‌دست‌آمده هم‌گرایی خوبی دارند. اما، نتایج نه‌چندان خوب در قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی با مونت‌کارلو، موجب تردید در استفاده ازاین‌روش برای اختیار آسیایی می‌شود.

فلپل، کینیتز و مک‌والتر[1] (۲۰۲۲) در پژوهشی اظهار کرده‌اند اگر درجه بالایی از دقت و ثبات بازار برای قیمت‌گذاری آپشن موردنیاز باشد، مدل‌های نوسان محلی تصادفی اغلب رویکرد مناسبی هستند. این مدل اغلب به روش‌های عددی فشرده محاسباتی، مانند شبیه‌سازی مونت‌کارلو یا قیمت‌گذاری تبدیل فوریه، در هرتکرار یک روش بهینه‌سازی نیاز دارد. آن‌ها یک رویکرد جایگزین با استفاده از تکنیک‌های نوسانات تصادفی مؤثر ارائه کردند که امکان کالیبراسیون مستقیم کارآمد تابع اهرم را برای کلاس بزرگی از مدل‌های نوسانات محلی تصادفی فراهم می‌کند. نتایج ایشان بیانگر عملکرد خوب هرسه مدل بوده‌است.

رامیرز، مارتینز، ترزا و پالاسیوس[2] (۲۰۲۲) در پژوهشی پارامترهای مدل نوسانات تصادفی هستون را با استفاده از دو روش مختلف کالیبره می‌کنند، این دو روش عبارتند از: ۱) به‌حداقل رساندن یک تابع هدف غیرخطی (یک تابع ضرر) با محدودیت‌هایی در مقادیر پارامتر و ۲) استفاده از یک الگوریتم تکامل تفاضلی. نتایج نشان داد روش اول با خطا و زمان کمتر عملکرد بهتری دارد. بااین‌حال، برای هردو روش، تعدیل نوسانات ضمنی برای گزینه‌های با سررسید بلندمدت بهتر از سررسیدهای کوتاه‌مدت است.

[1] Felpel, Kienitz & McWalter
[2] Ramírez, Martínez, Teresa & Palacios

اچنیم، گوبت و موریس[۱] (۲۰۲۲) در پژوهشی یک روش کالیبراسیون جدید طراحی کردند که برای رسیدگی به ویژگی‌های خاص آپشن‌ها در بازار ارزهای دیجیتال، یعنی اسپردهای پیشنهادی خرید- فروش[۲] بزرگ و احتمال گم‌شدن یا نامنسجم بودن قیمت‌ها در مجموعه داده‌های لحاظ‌شده، طراحی شده‌است و نشان دادند این روش کالیبراسیون به‌طور قابل‌توجهی قوی‌تر و دقیق‌تر از روش استاندارد براساس قیمت‌های منطبق با بازار است.

الغلیث[۳] (۲۰۲۰) در پژوهش خود فرمولی به فرم‌بسته ارائه کرد که به هیچ روش عددی/ محاسباتی نیاز ندارد. فرمولی ساده مانند فرمول کلاسیک قیمت‌گذاری بلک- شولز است. افزون‌براین، هم‌زمان جهش و نوسانات تصادفی را نیز بررسی کرد. رویکرد وی حاکی از معرفی کلاس جدیدی از فرایندهای تصادفی است که براساس جبرهای کلیفورد ساخته شده‌است.

به‌طورکلی، تحلیل مطالعات نشان می‌دهد، در کشور تعدادی پژوهش به روش هستون به بررسی قیمت‌گذاری اختیار معامله پرداخته‌اند؛ اما، مدل‌های ارائه‌شده از دقت کافی برخوردار نیستند. بدین‌ترتیب، جنبه نوآوری این مقاله آن است که چون بربنیاد یک مدل تصادفی قوی مبتنی‌بر نوسان‌های متغیر دارایی پایه و یک مدل ریاضی مبتنی‌بر نوسان‌های ثابت استوار است و این مدل‌ها را کالیبره می‌کند، نهایتاً میزان دقت و صحت هرمدل را برمبنای بهینه‌سازی تابع هدف می‌سنجد.

۳. روش پژوهش

هدف این مقاله، مقایسه کالیبراسیون مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی‌بر نوسانات تصادفی و تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته است. بدین‌منظور، از تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته مبتنی‌بر نوسانات ثابت و نیز مدل نوسان تصادفی هستون مبتنی‌بر نوسانات متغیر برای قیمت‌گذاری استفاده شده است. برای اجرای مدل مطرح‌شده، از داده‌های اختیار خرید عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده‌است.

جامعه آماری آن، تمامی اوراق اختیار خرید عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار تهران است. از آنجا که قیمت اختیار معامله‌های پرنوسان، گران‌تر از قیمت قرارداد اختیار معامله‌های با نوسانات کم هستند و این موضوع اهمیت قیمت‌گذاری این قبیل اختیارها را دوچندان می‌کند؛ از این‌رو، برای اجرای تکنیک مطرح‌شده، برای نمونه، اطلاعات اختیار خرید سهام شرکت سایپا با نماد ضسپا به تاریخ‌های سررسید ۱۴۰۱/۰۸/۲۵ در بازه قیمتی (۳۰۰۰-۱۳۰۰)، به تاریخ سررسید ۱۴۰۱/۱۲/۱۰ در بازه قیمتی (۳۲۵۰-۱۵۰۰)، به تاریخ سررسید ۱۴۰۱/۰۳/۲۵ در بازه قیمتی (۳۰۰۰-۱۰۰۰) و به تاریخ سررسید ۱۴۰۰/۰۳/۲۶ در بازه قیمتی (۴۵۰۰-۱۴۰۰) مناسب دانسته و در ادامه بررسی شده‌است.

بدین‌منظور، برای محاسبه تغییرپذیری قیمت سهام و نوسانات آن، یک دوره زمانی یک‌ساله از داده‌های دسترس‌پذیر در بازه زمانی ۱۴۰۰-۱۴۰۱ مناسب تشخیص داده‌شد. برای جمع‌آوری داده‌های مربوط به اوراق اختیار خرید از وب‌سایت بورس اوراق بهادار تهران[۴] و برای جمع‌آوری داده‌های سهام پایه از سامانه تحلیل بنیادی بورس

[1] Echenim, Gobet & Maurice

[۲] «اسپرد پیشنهاد خرید و درخواست فروش» که به‌طور اختصار، اسپرد خرید- فروش نامیده می‌شود؛ درواقع، تفاوت بین بالاترین قیمتی که یک خریدار حاضر است بابت خرید دارایی پرداخت کند و پایین‌ترین قیمتی که یک فروشنده برای فروش دارایی درخواست کرده است، می‌باشد.

[3] Alghalith

[4] www.tse.ir

ویو[1] استفاده شده‌است.

برای آزمون فرضیه‌های مقاله، ابتدا اطلاعات با استفاده از نرم‌افزار صفحه گسترده اکسل محاسبه و تقسیم‌بندی شدند و در ادامه، در محیط پایتون و در مواردی نیز بهره‌گیری از نرم‌افزار متلب، آزمون فرضیه انجام شده‌است. برای تحلیل داده‌ها، از قیمت پایانی اختیار خرید بهره گرفته‌شد. جدول (۱) اختیارهای مختلف خرید مربوط به سهام خساپا در قیمت‌های متفاوت توافقی را نشان می‌دهد.

جدول ۱. اختیارهای مختلف خرید مربوط به سهام خساپا در قیمت‌های متفاوت توافقی

(اختیارخ خساپا-۱۴۰۰/۰۳/۲۶)		(اختیارخ خساپا-۱۴۰۱/۰۳/۲۵)		(اختیارخ خساپا-۱۴۰۱/۱۲/۱۰)		(اختیارخ خساپا-۱۴۰۱/۰۸/۲۵)	
نماد	قیمت توافقی	نماد	قیمت توافقی	نماد	قیمت توافقی	نماد	قیمت توافقی
ضسپا۳۰۰۰۱	۱۴۰۰	ضسپا۳۰۱۰۱	۱۰۰۰	ضسپا۱۲۰۰۱	۱۵۰۰	ضسپا۸۰۵۸۱	۱۳۰۰
ضسپا۳۰۰۱۱	۱۶۰۰	ضسپا۳۰۱۱۱	۱۲۰۰	ضسپا۱۲۰۱۱	۱۶۰۰	ضسپا۸۰۵۹۱	۱۴۰۰
ضسپا۳۰۰۲۱	۱۸۰۰	ضسپا۳۰۱۲۱	۱۴۰۰	ضسپا۱۲۰۲۱	۱۷۰۰	ضسپا۸۰۴۷۱	۱۵۰۰
ضسپا۳۰۰۳۱	۲۰۰۰	ضسپا۳۰۱۳۱	۱۶۰۰	ضسپا۱۲۰۳۱	۱۸۰۰	ضسپا۸۰۴۸۱	۱۶۰۰
ضسپا۳۰۰۴۱	۲۵۰۰	ضسپا۳۰۱۴۱	۱۸۰۰	ضسپا۱۲۰۴۱	۱۹۰۰	ضسپا۸۰۴۹۱	۱۷۰۰
ضسپا۳۰۰۵۱	۳۰۰۰	ضسپا۳۰۱۵۱	۲۰۰۰	ضسپا۱۲۰۵۱	۲۰۰۰	ضسپا۸۰۵۰۱	۱۸۰۰
ضسپا۳۰۰۶۱	۳۵۰۰	ضسپا۳۰۱۶۱	۲۵۰۰	ضسپا۱۲۰۶۱	۲۲۰۰	ضسپا۸۰۵۱۱	۱۹۰۰
ضسپا۳۰۰۷۱	۴۰۰۰	ضسپا۳۰۱۷۱	۳۰۰۰	ضسپا۱۲۰۷۱	۲۴۰۰	ضسپا ۸۰۵۲۱	۲۰۰۰
ضسپا۳۰۰۸۱	۴۵۰۰			ضسپا۱۲۰۸۱	۲۶۰۰	ضسپا۸۰۵۳۱	۲۲۰۰
				ضسپا۱۲۰۹۱	۲۸۰۰	ضسپا ۸۰۵۴۱	۲۴۰۰
				ضسپا۱۲۱۰۱	۳۰۰۰	ضسپا۸۰۵۵۱	۲۶۰۰
				ضسپا۱۲۱۱۱	۳۲۵۰	ضسپا۸۰۵۶۱	۲۸۰۰
						ضسپا۸۰۵۷۱	۳۰۰۰

منبع: شرکت مدیریت فناوری بورس تهران[2]

بخش اول: تکنیک تبدیل انتگرالی

تکنیک تبدیل انتگرالی به‌عنوان یک روش عددی همه‌منظوره جدید قدرتمند، مدل‌های معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به یک سیستم غیرخطی جفت‌شده از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند تا به‌صورت عددی با تکنیک‌های تثبیت‌شده حل شوند (ایتکین و همکاران، ۲۰۲۱). روش تبدیل انتگرال از بسط توابع ویژه کوتاه‌شده استفاده می‌کند (کوتا و میخایلوف[3]، ۱۹۹۳).

1 www.bourseview.com
2 www.tsetmc.ir

قابل دسترس در وب‌سایت بورس اوراق بهادار تهران به نشانی: www.tse.ir

3 Cotta & Mikhailov

متغیرهای مورداستفاده در تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته این پژوهش به‌صورت زیر تعریف (= مفهوم‌سازی) می‌شوند:

S_0: قیمت روز سهام[١] به ریال (که مقداری مشخص است)؛

K: قیمت توافقی[٢] به ریال (که مقداری مشخص است)؛

T: زمان تا سررسید[٣] برحسب سال (که مقداری مشخص است)؛

$v_0(K,T)$: بهای پرداختی آپشن‌ها بابت قیمت توافقی k و سررسید T [٤] به ریال؛

S_T: قیمت سهام در روز T [٥] به ریال (که مقداری نامشخص است)؛

r: نرخ بهره بدون ریسک به درصد (که مقداری مشخص است).

- گام اول: تعیین توابع

ابتدا مقدار S_T تعیین می‌شود و سپس قیمت‌گذاری اوراق یادشده صورت می‌گیرد؛ زیرا تغییر قیمت سهم به نوسان بازار منجرمی‌شود و اگر S_T مقداری مشخص باشد، دیگر اوراق اختیاری وجود نخواهد داشت و روند بازار مشخص خواهد بود. برای قیمت‌گذاری اوراق مشتقه مهم‌ترین گام، تعیین تابع پرداختی[٦] است که برای اختیار خرید به‌صورت رابطه (١) است (فرخی و فرخی، ١٣٩٥).

$$Call: (S_T - K)^+ = Max(S_T - K, 0) \qquad (١)$$

در صورت استفاده از اختیار خرید یا فروش، تابع پرداختی هیچ‌گاه منفی نخواهد بود (یا برابربا صفر است یا مقداری مثبت). بنابراین، مقدار $S_T - k$ مثبت است؛ یعنی، اگر در تاریخ انقضا، قیمت سهم بیشتر از قیمت توافقی شود، اوراق اختیار خرید اعمال خواهد شد. تابع مورد نظر برای اختیار فروش نیز به‌صورت رابطه (٢) است.

$$Put: (K - S_T)^+ = Max(K - S_T, 0) \qquad (٢)$$

اگر در تاریخ انقضا، قیمت سهم، کمتر از قیمت توافقی شود، اوراق اختیار فروش اعمال خواهد شد. مطلب بعدی مورد نیاز، تابع توزیع احتمال شرطی[٧] قیمت سهام در زمان سررسید T است که نشانه‌گذاری آن به‌صورت $f(S_T|S_0)$ است و مقدار آن به قیمت روز سهام وابسته است و به‌همین‌دلیل، نام‌گذاری آن با واژه شرطی همراه است. به‌طورخلاصه، با این پرسش روبرو هستیم که اگر قیمت روز سهام S_0 باشد، توزیع قیمت آینده آن یعنی S_T به چه صورت است. بدین‌منظور، بعد از مشخص کردن موارد فوق، از مقدار پرداختی نسبت به تابع توزیع احتمال شرطی انتگرال گرفته می‌شود (یاووس و عبدالجواد[٨]، ٢٠٢٠).

---

[1] Spot Price
[2] Strike Price
این مقدار در برخی منابع با نام لاتین X نیز عرضه شده‌است.
[3] Time to Maturity
[٤] اگر به‌دنبال ارزش‌گذاری اختیار فروش باشیم، این‌مقدار به‌صورت P_0 و اگر درپیِ ارزش‌گذاری اختیار خرید باشیم، این مقدار به‌صورت V_0 نشان داده می‌شود.
[5] Price at Time T
[6] Payoff Function
[7] Conditional Probability Distribution Function (PDF)
[8] Yavuz & Abdeljawad

فصلنامه علمی
مدلسازی اقتصادی
Economic Modelling
دوره ۱۶. شماره ۵۹. پاییز ۱۴۰۱ صفحه‌های ۶۷ تا ۸۶

$$\int_{0}^{\infty} (S_T-K)^{+} f(S_T|S_0)\, ds_T \qquad (۳)$$

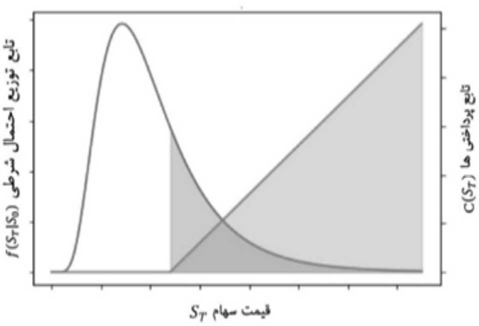
رابطه (۳) ارزش اختیار را در تاریخ انقضا مشخص می‌کند؛ درحالی‌که ارزش روز آن مدنظر است. بدین‌منظور، باید مقدار فوق را تنزیل کرده و ازاین‌رو، به فاکتور تنزیل[۱] نیاز است. بنابراین، خواهیم داشت:

$$C_0(K,T)=e^{-rT}\int_{0}^{\infty} (S_T-K)^{+} f(S_T|S_0)\, ds_T=e^{-rT}\int_{k}^{\infty} (S_T-K)\ f(S_T|S_0)\, ds_T \qquad (۴)$$

در رابطه (۴) برای آسان‌کردن محاسبات، بازه انتگرال از k تا بی‌نهایت لحاظ‌شده تا مستقیما به مقدار مثبت آن دست یافت. درخصوص اختیار فروش تنها چیزی که تغییر می‌کند، تابع پرداختی است و تابع توزیع احتمال شرطی تغییری نخواهد کرد؛ بنابراین:

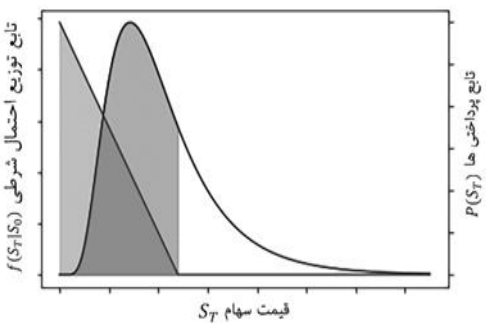
$$P_0(K,T)=e^{-rT}\int_{0}^{\infty} (K-S_T)^{+} f(S_T|S_0)\, ds_T=e^{-rT}\int_{0}^{K} (K-S_T)\ f(S_T|S_0)\, ds_T \qquad (۵)$$

در رابطه (۵) نحوه قیمت‌گذاری اختیار فروش با استفاده از روابط ریاضی توضیح داده‌شد. در ادامه، نمودار (۱) قیمت‌گذاری اختیار خرید را با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی نشان می‌دهد. سطح زیرمنحنی تابع توزیع احتمال شرطی و تابع پرداختی‌ها مدنظر است و قسمت خالی زیرمنحنی اهمیتی ندارد؛ زیرا حاصل‌ضرب هرمقداری در صفر برابربا صفر خواهد بود.



نمودار ۱. نحوه قیمت‌گذاری اختیار خرید با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی

منبع: یافته‌های پژوهش



نمودار۲. نحوه قیمت‌گذاری اختیار فروش با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی

منبع: یافته‌های پژوهش

- گام دوم: ارزیابی عددی انتگرال

پس از تبیین انتگرال برای اوراق اختیار، برای محاسبه‌پذیر بودن انتگرال و کوتاه‌کردن هزینه محاسبات، لازم است محدوده محاسبات مشخص شود. بدین‌ترتیب، به‌جای ∞ با قراردادن عددی به اندازه کافی بزرگ (B) و تعیین زیرفاصله‌های مساوی[۲]، به‌طول η هرزیر فاصله را ارزیابی کرده و با یکدیگر جمع می‌کنیم. بدین‌ترتیب، در هرزیر

[1] Discount Factor
[2] Equal Sub-Intervals

فاصله به‌تعداد n، زیرانتگرال[1] خواهیم داشت. بدین‌ترتیب، هرکدام از این زیرانتگرال‌ها را ارزیابی عددی کرده و با هم جمع می‌کنیم. گفتنی است علامت مساوی در روابط (٤ و ٥) تبدیل به تقریب خواهد شد (یاووس و همکاران،۲۰۲۰).

$$C_0(K,T) = e^{-rT}\int_K^{\infty} (S_T - K)\ f(S_T)\, dS_T \approx e^{-rT}\int_k^{B} (S - K)\ f(S)\, ds \tag{٦}$$

انتخاب η (طول هرزیر فاصله) و N به‌طور مستقل صورت می‌پذیرد و بدین‌ترتیب، مقدار B (کران بالا) مشخص خواهد شد. بدین‌ترتیب، حلقه‌ای خواهیم داشت که به‌صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود.

$$S_j = K + (j-1)\eta \quad \text{for } j = 1, \dots, N+1 \tag{۷}$$

و مقدار B برابر خواهد بود با:

$$B = S_{N+1} = K + N\eta \tag{۸}$$

درخصوص اوراق اختیار فروش، کران بالا از قبل مشخص و برابر k است. با انتخاب N و مجموعه $\eta = \frac{K}{N}$. بدین‌ترتیب، حلقه‌ای خواهیم داشت که به‌صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود.

$$S_j = (j-1)\eta \quad \text{for } j = 1, \dots, N+1 \tag{۹}$$

با بازنویسی مجدد رابطه (٦) خواهیم داشت:

$$C_0(K,T) \approx e^{-rT}\sum_{j=1}^{N}\int_{sj}^{sj+1} (S-K)\ f(S)\, ds \tag{۱۰}$$

بدین‌ترتیب، N زیر انتگرال (یعنی، بخش $\left(\int_{sj}^{sj+1} (S-K)\ f(S)\, ds\right)$ خواهیم داشت، که در ادامه یکی از این بخش‌ها را با کمک روش ذوزنقه‌ای[2] به کمک کدنویسی پایتون ارزیابی عددی کرده و با استفاده از آن به‌طور تقریبی هرزیرانتگرال تقریب زده‌می‌شود. شکل (۳) تمامی این روابط را نشان می‌دهد. ناحیه‌ای که با رنگ قرمز مشخص شده‌است، بخشی است که در ازای محاسبات تقریبی از دست می‌رود. هراندازه η کوچکتر باشد، تقریب به اندازه واقعی نزدیک‌تر خواهد شد. بدین‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$\int_{sj}^{sj+1} (S-K)\ f(S)\, ds \approx \frac{\eta}{2}\Big(\underbrace{(s_j - K)f(S_j)}_{\mathrm{y}} + \underbrace{(s_{j+1} - K)f(S_{j+1})}_{\mathrm{y+u}}\Big) \tag{۱۱}$$

با جایگزین کردن رابطه (۱۰) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$C_0(K,T) \approx e^{-rT}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta}{2}\Big((s_j-K)f(S_j) + (s_{j+1}-K)f(S_{j+1})\Big) \approx e^{-rT}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta}{2}(s_j-K)f(S_j|S_0)W_j \quad , \quad W_j = \begin{cases}\frac{1}{2}\eta & j=1\\ \eta & \text{غیره}\end{cases} \tag{۱۲}$$

برای اختیار فروش نیز خواهیم داشت:

$$P_0(K,T) \approx e^{-rT}\sum_{j=1}^{N}\frac{\eta}{2}(K-S_j)f(S_j|S_0)W_j \qquad , \quad W_j = \begin{cases}\frac{1}{2}\eta & j=1\\ \eta & \text{غیره}\end{cases} \tag{۱۳}$$

[1] Sub-Integrals
[2] Trapezoidal Rule

با توجه به اینکه رابطه (۱۳) برای تعداد N زیرانتگرال محاسبه می‌شود؛ بنابراین، هزینه محاسبات آن برابر است با O(N). برای دست‌یابی به توزیع نرمال لگاریتمی[۱] یا همان تابع توزیع احتمال شرطی با توجه به قیمت روز سهام، با تکیه بر مدل بلک- شولز به‌صورت زیر عمل خواهیم کرد:

$$f(S_T|S_0) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S_T - \ln S_0 - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}}{\sigma S_T\sqrt{2\pi T}} \quad (۱۴)$$

- بخش دوم مدل هستون و پارامترها

مدل هستون یک‌راه‌حل بسته برای قیمت‌گذاری است که می‌تواند برخی کاستی‌های ارائه‌شده در مدل قیمت‌گذاری بلک- شولز را برطرف کند.[۲]

- کالیبراسیون مدل

کالیبراسیون، معمولاً با تعیین یک تابع هدف شروع می‌شود تا میزان خطا حداقل شود. در این مقاله، تابع هدف استفاده از ریشه میانگین مربعات خطا[۳] است که به‌صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌شود.

$$\min_{\Theta\to O}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\hat{V}_i^{\Theta} - V_i\right)^2}{n}} \quad (۱۵)$$

که در آن، n تعداد قیمت‌های بازار، $\hat{V}_i^{\Theta}$ قیمت اختیار معامله تخمینی، V_i قیمت اختیار معامله بازار، Θ مجموعه پارامترها، O تمامی مقادیری که پارامترها می‌توانند اختیار کنند. با شناسایی تابع هدف، انواع طرح‌های بهینه‌سازی که می‌توانند برای حل مسئله بهینه‌سازی استفاده شوند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. تمرکز این مقاله بر الگوریتم بهینه‌سازی فراابتکاری بهینه‌سازی ازدحام کبوتر است. این الگوریتم که به‌اختصار (DSO)[۴] نامیده می‌شود، از روش تغذیه‌ای کبوتر الهام گرفته است.[۵]

۴. یافته‌های پژوهش

- آمار توصیفی

بررسی معاملات انجام‌شده بر اختیارهای خرید سهام سایپا (خساپا) نشان می‌دهد، به‌طور معمول اختیارهای به تاریخ سررسید ۱۴۰۱/۰۳/۲۵ درمقایسه‌با سایر اختیارها با استقبال بیشتری روبرو بوده و با نزدیک شدن به تاریخ سررسید، ارزش بیشتری داشته‌اند. در جدول (۲) آمار توصیفی داده‌ها به تفکیک کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت شامل

[1] Log Normal

[۲] برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به هستون (۱۹۹۳).

[3] Root-Mean-Square Deviation (RMSE)
[4] Dove Swarm Optimization (DSO)

در تعدادی از مقالات از این الگوریتم با عنوان Swarm Inspired Projection یا SIP یاد شده‌است.

[۵] برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به پژوهش خردیار، قلیزاده و لطفی، ۱۳۹۷ و سو و همکاران، ۲۰۲۲.

میانگین، میانه، بیشینه، کمینه، انحراف معیار، چولگی، کشیدگی ارائه شده‌است. در کوتاه‌مدت، $v_0(K,T)$ دارای بالاترین انحراف استاندارد است. این امر نشان می‌دهد که تغییرات قیمت در سررسید کوتاه‌مدت به انحرافات شدید در واریانس سری این سررسید می‌انجامد. این موضوع متعاقباً باعث می‌شود که حرکت قیمت‌ها در دوره کوتاه‌مدت کمی بی‌ثبات‌تر از سایر دوره‌ها باشد. افزون‌بر این، انحراف معیار آن تا پایان دوره نمونه کاهش می‌یابد. حرکت صعودی قیمت در اختیار خرید به سررسید ۱۴۰۱/۰۳/۲۵ رخ می‌دهد. چنین روندی در بازار تمایل به افزایش سود فعالان بازار سرمایه در طول زمان در کوتاه‌مدت را منجرخواهد شد. جدای از آن، باید انتظار داشت که بازدهی در این دوره‌ها چولگی مثبت با میانگین مثبت باشد و این موضوع در آمار توصیفی نیز برقرار بوده است.

قیمت در همه سررسیدها به‌جز (۱۴۰۱/۰۳/۲۵) روند نزولی را نشان می‌دهد و بازدهی در این دوره دارای چولگی منفی با میانگین منفی است. بنابراین، با توجه به چولگی منفی با میانگین منفی، فعالان بازار به‌احتمال زیانِ بسیار بالا پی‌می‌برند و اختیار خرید این شرکت را در قیمت‌های پایین بازار می‌فروشند. درخصوص بازدهی کشیدگی بالاتر از ۳ توزیع لپتوکورتیک را نشان می‌دهد و نشانگر این است که این سری، دنباله نسبتاً سنگین‌تری از توزیع عادی را نمایش می‌دهد. کشیدگی کمتر از ۳ نیز توزیع پلاتیکورتیک را نشان می‌دهد و درجه لپتوکورتوز آن در سررسید میان‌مدت و بلندمدت همراه‌با چولگی منفی بیشتر افزایش می‌یابد.

جدول ۲. آمار توصیفی داده‌های پژوهش در سررسیدهای مختلف

سررسید	سررسید کوتاه‌مدت		سررسید بلندمدت		سررسید میان‌مدت	
نام متغیر	بهای پرداختی بابت آپشن	بازدهی	بهای پرداختی بابت آپشن	بازدهی	بهای پرداختی بابت آپشن	بازدهی
آماره / نماد	$v_0(K,T)$	Return	$v_0(K,T)$	Return	$v_0(K,T)$	Return
میانگین	۲۴۰/۱۵۵۶	۰/۰۰۱	۲۹۸/۲۱۶۶	-۰/۰۲	۳۲۳/۰۰۳۱	-۰/۰۱
میانه	۸۳	۰/۰۰۰	۲۳۶	۰/۰۰۰	۲۱۲	۰/۰۰۰
بیشینه	۱۳۵۸	۰/۲۷	۱۵۵۰	۰/۳۱	۱۸۸۹	۰/۲۵
کمینه	۱	-۰/۲۰	۱۰	-۰/۳۹	۲	-۰/۲۸
انحراف معیار	۳۵۶/۱۹۰۹	۰/۰۱۶	۲۴۸/۸۱۰۹	۰/۱۴	۳۲۵/۸۶۶۱	۰/۱۱
چولگی	۱/۵۷۰۴۸۲	۰/۶۲	۱/۲۲۱۶۱۳	-۰/۴۲	۱/۰۱۴۴۴	-۰/۱۷
کشیدگی	۴/۵۹۹۴۷۹	۴/۸۴	۴/۴۶۲۱۸۵	۴/۶	۳/۲۹۶۰۵۴	۴/۵۳
تعداد مشاهدات	۸۲۹	۸۲۹	۱۶۹۴	۱۶۹۴	۱۲۹۸	۱۲۹۸

منبع: یافته‌های پژوهش

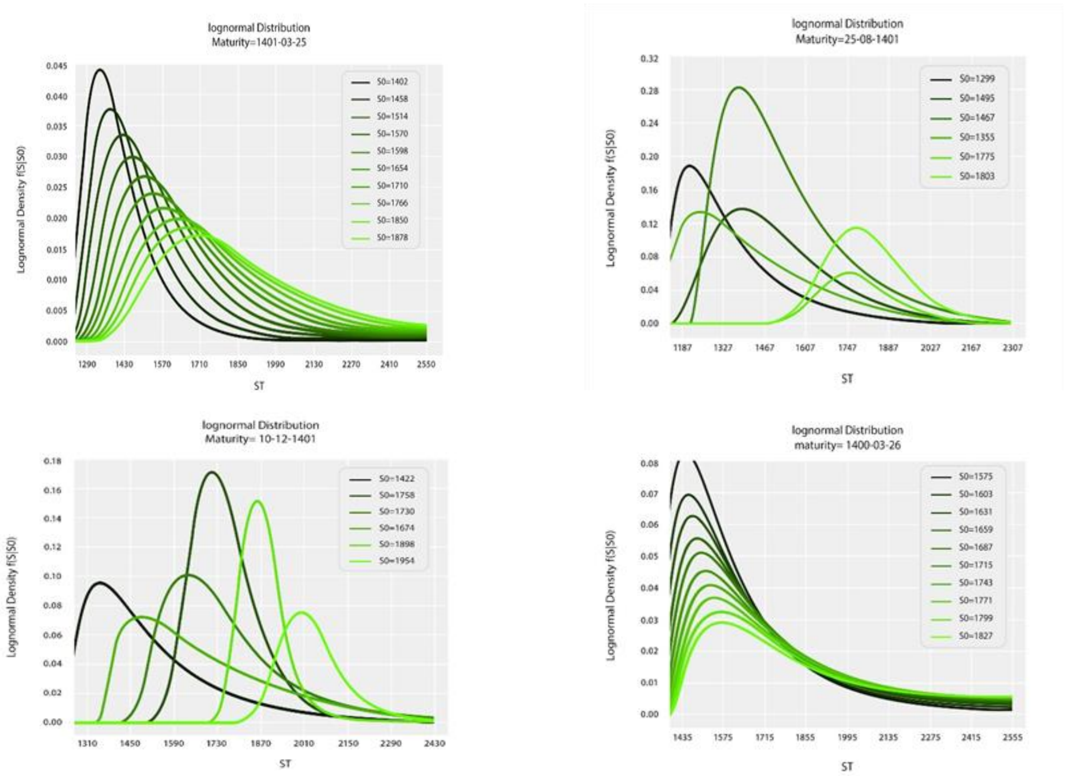
- کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته

در ابتدا، با استفاده از تکنیک درون‌یابی[1] برای پرکردن داده‌های ازدست‌رفته و صاف‌کردن سطح موجود قیمت‌ها، برای اطمینان از اینکه برای هر تاریخ سررسید، قیمت اعمال وجود داشته باشد، قیمت متقابل آن درون‌یابی شده‌است. سپس،

[1] Interpolation

فصلنامه علمی
مدلسازی اقتصادی
Economic Modelling
دوره ۱۶. شماره ۵۹. پاییز ۱۴۰۱ صفحه‌های ٦٧ تا ٨٦

برای دست‌یابی به تابع توزیع نرمال لگاریتمی (تابع توزیع احتمال شرطی) کدنویسی در پایتون صورت پذیرفت و پارامترهای ثابت مدل مقداردهی شد. نمودار (۳) توزیع نرمال لگاریتمی برای مقادیر مختلف قیمت دارایی پایه در سررسیدهای مختلف را نشان می‌دهد.



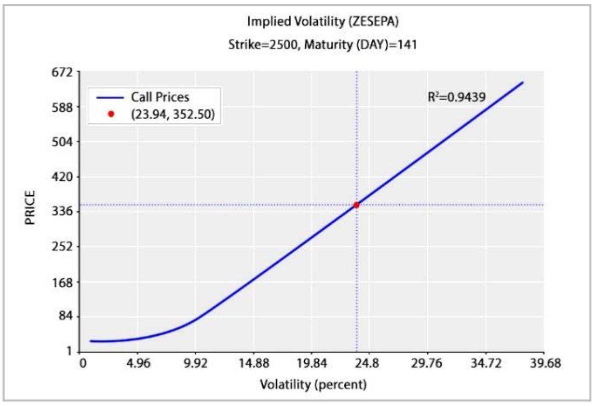
نمودار ۳. توزیع احتمال شرطی برای مقادیر مختلف S0 اختیار خرید خساپا در سررسیدهای متفاوت

منبع: یافته‌های پژوهش

در ادامه، کالیبراسیون مدل و فرایند تعدیل پارامترها به‌گونه‌ای که قیمت‌های مدل $\hat{V}_i(\Theta)$ بر قیمت‌های بازار V_i منطبق باشد، اجراشده‌است. گفتنی است که قیمت‌های بازار ثابت هستند؛ اما، قیمت‌های مدل با تغییر مقادیر پارامترها (Θ) می‌توانند تغییر کنند؛ به‌گونه‌ای که دو قیمت یادشده به اندازه کافی به یکدیگر نزدیک شوند.

در نمودار (٤) مقادیر مختلف نوسان (σ) براساس کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته از کم‌ترین تا نسبتا بیشترین، مقداردهی شده‌است تا نقطه‌ای منطبق با قیمت بازار برای قیمت اعمال ۲۵۰۰ ریال و زمان تا سررسید ۱٤۱ روز نقطه‌یابی شود. چنانچه در نمودار ٤ نیز مشخص شده‌است، مقدار قیمت اوراق اختیار خرید، برمبنای نوسان تحقق‌یافته ۲۳/۹٤ درصد،۳۵۲/۵۰ به‌دست آمده است که با مقدار واقعی بازار (یعنی، ۳۵٤ ریال معادل ۱/۵ ریال) اختلاف دارد. درواقع، اگر این مقدار نوسان تحقق‌یاقته به‌عنوان ورودی تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته قرار گیرد، قیمت آپشن برابر با ۳۵۲/۵۰ ریال خواهد بود.

مدلسازی اقتصادی
Economic Modelling
دوره ١٦. شماره ٥٩. پاییز ١٤٠١ صفحه‌های ٦٧ تا ٨٦



نمودار ٤. کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته

منبع: یافته‌های پژوهش

– کالیبراسیون مدل نوسانات تصادفی هستون

– یافتن مناسب‌ترین نقطه شروع

یافتن مناسب‌ترین نقطه شروع برای یافتن مجموعه پارامترهای بهینه در مدل اهمیت بسیاری دارد. بنابراین، با داشتن نقطه شروع و داشتن تابع هزینه، می‌توان مجموعه پارامترهای بهینه مدل را شناسایی کرد و برای تحقق این امر به الگوریتم‌های بهینه‌سازی نیاز است. الگوریتم بهینه‌سازی مورد استفاده در این مقاله، الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر (DSO) است و نتایج با تکیه بر این الگوریتم به‌دست آمده است. بدین‌منظور، برمبنای پژوهش گالوسیو[١] و همکاران (٢٠٠٨) با استفاده از رابطه (١٦)، مقادیر مختلف $\alpha \in (0,1)$ برای دو سری متفاوت از مجموعه پارامترها (Θ_1 و Θ_2) که کاملاً دلخواه هستند، تنظیم شده‌است.

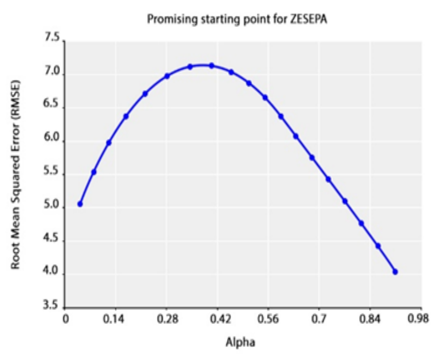
$$\Theta = \alpha\Theta_1 + (1-\alpha)\Theta_2 \tag{١٦}$$

که در رابطه (١٦) پارامترهای زیر مقداردهی گردید:

$$\Theta_1 = \{\kappa_1, \theta_1, \lambda_1, \rho_1, v_{0_1}\} = \{٥.٨,٠.٠٤,٠.٠٥,+٠.٥٣,٠.٠٧٤\}$$
$$\Theta_2 = \{\kappa_2, \theta_2, \lambda_2, \rho_2, v_{0_2}\} = \{٢.١,٠.٠١,٠.١١,-٠.٧٦,٠.٠٤٣\}$$

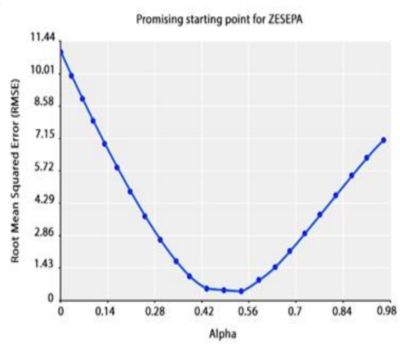
برای هریک از Θ_1 و Θ_2، مجموعه مقادیر وارد مدل هستون شده و قیمت‌های مدل محاسبه گردید. سپس، با استفاده از تابع هدف (RMSE)، بهترین نقطه شروع به‌دست آمد. نمودارهای (٥–٧) نمودار تابع RMSE به‌ازای مقادیر مختلف α را نشان می‌دهد.

[1] Galluccio et al.



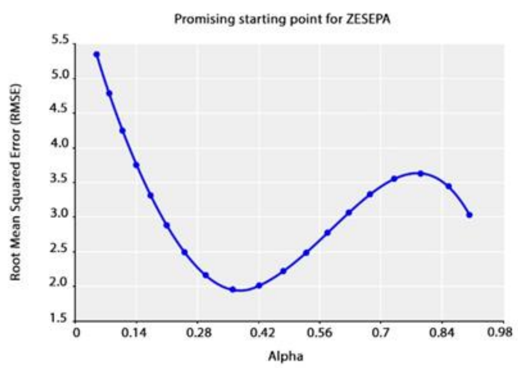
نمودار ۵. تنظیم نقطه شروع پارامترها (غیرقابل قبول)

منبع: یافته‌های پژوهش



نمودار ۶. تنظیم نقطه شروع پارامترها (نقطه بهینه و مینیمم خطا)

منبع: یافته‌های پژوهش



نمودار ۷. تنظیم نقطه شروع پارامترها (غیرقابل قبول)

منبع: یافته‌های پژوهش

- جستجوی شبکه‌ای پارامترها

در ادامه حول نقطه یافته‌شده جستجوی شبکه‌ای انجام شده‌است تا مجموعه نقاط به‌دست آید. جدول (۳) جستجوی شبکه‌ای انجام‌شده حول نقطه شروع را نشان می‌دهد. در ادامه نیز با کدنویسی انجام‌شده، پارامترهای بهینه با حداقل مقدار خطا به‌دست آمد. Θ^* مقدار پارامتر بهینه را نشان می‌دهد.

جدول ۳. جستجوی شبکه‌ای انجام‌شده حول نقطه شروع

	κ	θ	λ	ρ	v_0
نقطه شروع اولیه (Θ)	۳/۳۴	۰/۰۲۸	۰/۰۸۵	−۰/۱۴۹	۰/۰۶۴
	$RMSE_{starting\ point}$=۰/۷۰۴۸۰۳۵۰۷				
بازه همسایگی نقطه شروع	[۲.۸ ,۳.۸]	[۰.۰۱۶ ,۰.۰۳۶]	[۰.۰۷۵ ,۰.۰۹۵]	[−۰.۲۴ , −۰.۰۵]	[۰.۰۵ ,۰.۰۷]
پارامترهای بهینه (Θ^*)	۲/۹۱	۰/۰۲۹	۰/۰۹۳	−۰/۱۰۲	۰/۰۵۷
	$RMSE_{Optimization}$=۰/۴۶۷۱۶۲۰۰۸۳۵				

منبع: یافته‌های پژوهش

– مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های مدل

در ادامه نیز نمودارهای (۸ – ۱۰) مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های مدل را در سررسیدهای مختلف نشان می‌دهد. محور افقی قیمت اعمال و محور عمودی نشان‌دهنده قیمت اختیار خرید است.

نمودار ۸. مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های کالیبره مدل هستون در سررسید کوتاه‌مدت

منبع: یافته‌های پژوهش

نمودار ۹. مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های کالیبره مدل هستون در سررسید میان‌مدت

منبع: یافته‌های پژوهش

نمودار ۱۰. مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های کالیبره مدل هستون در سررسید بلندمدت

منبع: یافته‌های پژوهش

نمودارهای (۸، ۹ و ۱۰) نشان می‌دهند که در همه سررسیدها، قیمت اختیار خرید تحصیل از مدل، متناسب‌با قیمت اختیار در بازار بوده و در بلندمدت، دقت بالاتری دارد.

– مقایسه کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی و نوسان تصادفی هستون

جدول (٤) مقایسه زمان محاسباتی (برحسب ثانیه) کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی و نوسان تصادفی هستون با تغییر مقادیر N و تکرار محاسبات برای ۱۰۰ بار را نشان می‌دهد.

جدول ٤. مقایسه زمان محاسباتی (برحسب ثانیه) مدل‌های پژوهش (سرعت 1GHZ)

N	زمان محاسبه (ثانیه)		نسبت روش تکنیک تبدیل انتگرالی به هستون
	کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی	کالیبراسیون نوسان تصادفی هستون	
2^{9}	۰/۲۸۳۰	۰/۰۱٦۷	۱٦/۹٤٦
2^{10}	۲/۷۱۲۰	۰/۰۱۵۲	۱۷۸/٤۲۱
2^{11}	۵/۳۱۲۳	۰/۰۲٤۰	۲۲۱/۳٤
2^{12}	۲۱/۰٦۸	۰/۰۸٦۰	۲٤٤/۹۷٦
2^{13}	٦۷/۸۳۹	۰/۱۳٤۰	۵۰٦/۲٦
2^{14}	۲٤۳/٦۲	۰/٤۰۳۳	٦۰٤/۰٦٦
2^{15}	۳۱۰۸/۰۲۲	۰/۹۹۸۷	۳۱۱۲/۰٦

منبع: یافته‌های پژوهش

درخصوص $N<2^{9}$، هردو مدل کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی و نوسان تصادفی هستون زمان نسبتاً یکسانی برای محاسبه پیچیدگی‌ها نشان دادند؛ بنابراین، مقادیر قبل از آن در جدول (٤) نشان داده نشده‌است. با توجه به نتایج جدول (٤) روشن است که کالیبراسیون نوسان تصادفی هستون بسیار سریع‌تر از کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی به‌ویژه، برای Nهای بزرگ عمل می‌کند. درواقع، کالیبراسیون نوسان تصادفی هستون تعداد محاسبات مورد نیاز برای N نقطه را از $2N^{2}$ به 2NlogN کاهش می‌دهد. بنابراین، درصورتی‌که محاسبه پارامترهای بهینه هزینه‌بر نباشد (چنانچه در مدل پژوهش نیز نشان داده‌شد) مدل پیشنهادی از سرعت مناسبی در کسری از ثانیه برخوردار خواهد بود.

در ادامه جدول (۵) میانگین درصد مطلق خطا[۱] برای کالیبراسیون مدل‌های پژوهش در وضعیت سوددهی[۲]، زیان‌دهی[۳] و بی‌تفاوتی[٤] در سناریوهای مختلف سررسید را نشان می‌دهد.

جدول ۵. میانگین درصد مطلق خطای مدل در سناریوهای گوناگون

سررسید	کالیبراسیون	وضعیت زیان‌دهی (درصد)	وضعیت بی‌تفاوتی (درصد)	وضعیت سوددهی (درصد)
کوتاه‌مدت (<٤۵ روز)	تکنیک تبدیل انتگرالی	۰/۹۸۲۵	۰/۹۱۵۸	۹/۰۱۵۱
	هستون	۱/۳۰۲۷	۰/۵۹۳۱	۷/۸۸۹۰
میان‌مدت (٤۵-۹۰روز)	تکنیک تبدیل انتگرالی	۰/۷٤۰۷	۰/۸۰۹۹	٤/۱۹۵۰
	هستون	۰/۵۷۰۵	۰/۵۱۷۵	۲/۱۲۹
بلندمدت (>۹۰ روز)	تکنیک تبدیل انتگرالی	۰/۷۵٤٦	۰/۷٦۲۳	۲/۰۰۰۱
	هستون	۰/۳۰۷۹	۰/۲۸۹۱	۰/۸۹۲٦

منبع: یافته‌های پژوهش

[1] MAPE
[2] In-the-Money
[3] Out- of-the-Money
[4] At-the-Money

براساس نتایج جدول (۵) در وضعیت بی‌تفاوتی و وضعیت سوددهی کالیبراسیون هستون برای همه سررسیدها بهتر از تکنیک تبدیل انتگرالی عمل می‌کند. در وضعیت زیان‌دهی نیز اگرچه کالیبراسیون هستون در دوره کوتاه‌مدت ضعیف عمل می‌کند؛ اما با افزایش زمان تا سررسید، کالیبراسیون هستون بهتر از تکنیک تبدیل انتگرالی در میان‌مدت و بلندمدت پاسخ داده‌است. برای کاهش خطای سناریوی کوتاه‌مدت- وضعیت سوددهی می‌توان روزهای بیشتری را تجزیه و تحلیل نمود تا مشخص شود هردو مدل در سناریوی کوتاه‌مدت و وضعیت سوددهی چگونه عمل می‌کنند. به‌طورکلی، تجزیه و تحلیل مجموع داده‌های استفاده‌شده در حال حاضر نشانه بسیار خوبی از دقت هردو مدل است.

به‌طورکلی، نتایج نشان داد کالیبراسیون مبتنی‌بر تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته در پیش‌بینی آپشن‌های با سررسید کوتاه‌مدت بهتر است. همچنین، رویکرد معرفی‌شده ازنظر هزینه محاسبات تابع توزیع احتمال شرطی امکان‌پذیر و عملی است و بنابراین، به‌عنوان روش پیشنهادی توصیه می‌گردد.

در ادامه نیز کالیبراسیون هستون برای پیش‌بینی آپشن‌هایی که دارای سررسید میان‌مدت و بلندمدت هستند، بهتر عمل می‌کند. اگر به دنبال قیمتی باشیم که در زمان سررسید فراتر از داده‌های دردسترس این مقاله قرار داشته باشد (فراتر از سررسید بلندمدت)، می‌توان از تکنیک برون‌یابی[1] مبتنی‌بر منحنی[2] و یا مبتنی‌بر مدل[3] (که تمرکز این مقاله بر مورد دوم است) استفاده گردد. مبتنی‌بر منحنی به این معنا که داده‌ها تا نقطه در دسترس بر یک منحنی متناسب می‌شوند و در ادامه برون‌یابی می‌شوند.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

هدف این مقاله، مقایسه کالیبراسیون مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی‌بر نوسانات تصادفی و تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته بود که برای نیل به آن از کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته مبتنی‌بر نوسانات ثابت و نیز کالیبراسیون مدل نوسان تصادفی هستون مبتنی‌بر نوسانات متغیر استفاده گردید. دلیل به‌کارگیری تکنیک کالیبراسیون - که یک فرایند بسیار حائز اهمیت است - این بود که تفاوت بین قیمت‌های مشاهده شده بازار و قیمت‌های مدل را به‌حداقل برسد.

نتایج حاصل از تخمین فرضیه اول پژوهش نشان داد کالیبراسیون مدل تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته مبتنی‌بر روش ذوزنقه‌ای، توانایی تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد که این نتیجه مطابق با یافته‌های ایتکین و همکاران (۲۰۲۱)، راتیه و همکاران (۲۰۲۱) و باوندپوری گیلان و همکاران (۱۳۹٦) است.

در ادامه، نتایج حاصل از تخمین فرضیه دوم پژوهش نشان داد کالیبراسیون مدل تصادفی هستون مبتنی‌بر نوسان‌های دارایی پایه، توانایی تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد و این نتیجه مطابق با یافته‌های صاحبی فرد و همکاران (۱۳۹۹)، فلپل و همکاران (۲۰۲۲)، رامیرز و همکاران (۲۰۲۲) است.

براساس نتایج، پیشنهاد می‌شود در راستای توسعه زیرساخت‌های آموزشی و فرهنگ‌سازی اوراق اختیار معامله، اداره ابزارهای نوین مالی شرکت بورس اوراق بهادار تهران، برای محاسبه پارامترهای کلیدی قراردادهای اختیار معامله در سناریوهای مختلف، مدل ارائه‌شده این مقاله را مدنظر قرار دهد تا بدین طریق ارزش‌گذاری دقیق‌تری از قراردادهای اختیارمعامله به‌دست آید.

---

[1] Extrapolation Technique
[2] Curve-Based
[3] Model-Based

منابع

- باوندپوری گیلان، ناظم، مظاهری، مهدی، فتوحی فیروزآبادی، مرتضی (۱۳۹٦). حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در رودخانه با ضرایب متغیر دلخواه با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته، *مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی*، ۷(۱): ۸۹–۱۱٦.
- جنابی، امید، دهمرده قلعه نو، نظر (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون کسری ـ پرشی، *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۲۱(۳): ۳۹۲–٤۱٦.
- خردیار، سینا، قلیزاده، محمد حسن، لطفی، فروغ (۱۳۹۷). پیش‌بینی درماندگی مالی با استفاده از روش ترکیبی PCA-ANFIS و الگوریتم فراابتکاری بهینه‌سازی ازدحام کبوتر، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۹(۳۷): ۱۳۳–۱۵۷.
- راجی‌زاده، سیمین (۱٤۰۱). ارزیابی شاخص نوسان VIX در بازار سرمایه ایران و تأثیر قیمت‌گذاری آتی آن با استفاده از مدل گارو. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۱۳ (۵۲): ۸۰–٦۰.
- شاکران، زهرا (۱۳۹۱). ارزش‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی تحت وجود تلاطم تصادفی، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان، ۳–۱۸.
- صاحبی‌فرد، حسین، دسترنج، الهام، عطاآبادی، عبدالباقی عبدالمجید (۱۳۹۹). قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی برمبنای مدل هستون (شواهدی از بورس اوراق بهادار تهران)، *فصلنامه دانش سرمایه گذاری*، ۹(۳۳): ۲۵۷–۲٤۱.
- فخاری، حسین، ولی‌پور خطیر، محمد، موسوی، سیده مائده (۱۳۹٦). بررسی عملکرد شبکه عصبی بیزین و لونبرگ مارکوات در مقایسه با مدل‌های کلاسیک در پیش‌بینی قیمت سهام شرکت‌های سرمایه گذاری. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۱۹(۲): ۳۱۸–۲۹۹.
- فرخی، زهرا؛ فرخی، فاطمه (۱۳۹۵). مفاهیم مقدماتی و ارزش گذاری اوراق مشتقه، چاپ اول، تهران: انتشارات بورس وابسته به شرکت اطلاع رسانی و خدمات بورس.
- موسوی، ساناز، سهیلی، علیرضا (۱۳۹۵). بررسی عددی تطبیق پارامترهای مدل هستون، چهارمین کنفرانس ریاضی و علوم انسانی، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۵۵–۱۵۱.
- نیسی، عبدالساده، ملکی، بهروز، رضائیان، روزبه (۱۳۹۵). تخمین پارامترهای مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان، *مجله مهندسی مالی و مدیریت ریسک اوراق بهادار*، ۷ (۲۸): ۱۱۵–۹۱.
- Albanese, C., Kuznetsov, A. (2005). Unifying the three volatility models. *Risk*, 17(3): 94–98.
- Alghalith, M (2020). Pricing options under simultaneous stochastic volatility and jumps: A simple closed-form formula without numerical/computational methods, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 540: 1-4.
- Black, F., & Scholes, M.S (1973) The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81(3) ,637–654. ISSN 0022-3808. DOI: 10.1086/260062
- Cotta, R.M., & Mikhailov, M.D. (1993). Integral transform method, *Applied Mathematical Modelling*, 17(3), 156-161, https://doi.org/10.1016/0307-904X(93)90041-E.
- Echenim, M., Gobet. E., & Maurice. A-C (2022), Unbiasing and robustifying implied volatility calibration in a cryptocurrency market with large bid-ask spreads and missing quotes, hal open accses, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03715921
- Felpel, M. Kienitz, J., & McWalter, Th (2022), Effective Stochastic Local Volatility Models, Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=4016334

- Florescu, I., Mariani, M.C., & Sewell, G. (2014). Numerical solutions to an integro-differential parabolic problem arising in the pricing of financial options in a Levy market. *Quantitative Finance*, 14(8): 1445-1452.
- Heston S.L (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, The Review of Financial Studies, 6(2): 327–343. ISSN 0893-9454. DOI: 10.1093/rfs/6.2.327
- Hirsa, A., & Neftc, S. N (2014), An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives (Third edition), Chapter 25 - Overview of Calibration and Estimation Techniques, Academic Press, https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384682-2.00025-6
- Itkin, A., Lipton, A., & Muravey, D. (2021). Generalized Integral Transforms in Mathematical Finance. WORLD SCIENTIFIC. https://doi.org/10.1142/12147.
- Milan, M., & Pospíšil, J (2017), Calibration and simulation of Heston model, journal Open Mathematics, 15(1), 679-704. DOI 10.1515/math-2017-0058
- Ramírez, A. O., Martínez, V. F., Teresa , M., & Palacios, V. M (2022), Parameter calibration of stochastic volatility Heston, from https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8387459.pdf
- Rathie, A. K., Geum, Y., & Kim, H. (2021). Various Approaches for Generalized Integral Transforms. In Mathematical Problems in Engineering (Vol. 2021, pp. 1–2). Hindawi Limited. https://doi.org/10.1155/2021/9781038
- Stein J., & Stein E (1991), Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. Review of Financial Studies, 4(4): 727– 752. ISSN 0893-9454. DOI: 10.1093/rfs/4.4.727
- Su, M.-C., Chen, J.-H., Utami, A. M., Lin, S.-C., & Wei, H.-H. (2022). Dove Swarm Optimization Algorithm. In IEEE Access (Vol. 10, pp. 46690–46696). Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). https://doi.org/10.1109/access.2022.3170112
- Thao, H.T.P., & Thao, T.H. (2012). Estimating Fractional Stochastic Volatility. *The International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 82(38): 1861-1869.
- Yavuz, M., Abdeljawad, T. (2020). Nonlinear regularized long-wave models with a new integral transformation applied to the fractional derivative with power and Mittag-Leffler kernel. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 367 (2020). https://doi.org/10.1186/s13662-020-02828-1