دوفصلنامه علمی پژوهشی پژوهشهای معرفت شناختی
سال دوازدهم، شماره ۲۶، پاییز و زمستان ۱۴۰۲
صفحات ۱۵۹-۱۳۳

Biannual Academic Journal
The Epistemological Research
Vol. 12, No. 65, Autumn & Winter 2023/2024

خطاپذیری و قطعیت ریاضیات در دیدگاه قیاس‌گرایی

محمود کوه‌گشت[1]
احمد شاهورانی سمنانی[2]
محمود عبایی کوپائی[3]

چکیده

این پژوهش نشان می‌دهد که خطاپذیری با تمام دگرگونی‌های که ایجاد کرده است، تا حدودی قابل انعطاف است و امکان به وجود آوردن نسبتی میان آن با قطعیت مفاهیم ریاضی وجود دارد. این امکان از طریق احیای قیاس‌گرایی صورت می‌پذیرد. تمایز بین ریاضیات محض و کاربردی منجر به شکل غیر قابل بحثی از خطاپذیری ریاضی به ویژه در ریاضی محض می‌شود. علاوه بر این، این تمایز به خوبی با قیاس‌گرایی مطابقت دارد. زیرا با توجه به نگرش اینشتین، اثبات قطعیت ریاضی اگرچه در واقعیت امکان‌پذیر نیست اما در ریاضی محض ممکن است. در نتیجه قیاس‌گرایی با هدف اثبات قضایا و مفاهیم ریاضی می‌تواند برخی از خطاهای ممکن در ریاضیات را برطرف کند و اصلاحات به قیاس‌گرایی یکپارچه شده و ادعاهای خطاپذیری در اشکال غیرمناقشه‌آمیز خود بازگو می‌شوند.

کلید واژه‌ها: ریاضیات، خطاپذیری، قطعیت، قیاس‌گرایی، اثبات

---

۱. دانشجوی دکتری فلسفه علم واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران؛
Koohgasht3z@gmail.com
۲. دانشیار گروه ریاضی واحد علوم وتحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران (نویسنده مسئول)؛
Maths_ahmad@yahoo.com
۳. استادیار گروه فلسفه حکمت اسلامی، واحد تهران جنوب دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران؛
m_abaee44@yahoo.com

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۸/۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱

بیان مسأله

مباحث مربوط به قطعیت در مفاهیم ریاضی مدت‌ها است که مورد چالش قرار گرفته است. خطاها و پارادوکس‌هایی که در قضایای ریاضی وجود دارد، ذهن فلاسفه و ریاضی‌دانان را متقاعد می‌کند که ریاضی نمی‌تواند مطلق و بدون خطا باشد. از طرفی خطاپذیری اگرچه به صدق قضایای ریاضی اشاره می‌کند اما همراه با خود نوعی بی‌اعتمادی می‌آورد که در حل مسائل و قضایای ریاضی خدشه وارد می‌کند و افراد را دچار سردرگمی می‌کند.

در چنین شرایطی بایستی با پذیرش خطا در ریاضیات از اعتبار آن دفاع کرد، زیرا دیگر اثبات مطلق‌گرایی آن دشوار و نشدنی است. بنابراین قیاس‌گرایی به میان می‌آید تا بتواند به طریقی به منازعه میان مطلق‌گرایی و خطاپذیری ریاضیات پایان دهد. از این جهت قیاس‌گرایی با رویکردی اثباتی نسبت به مفاهیم ریاضی سعی دارد ضمن پذیرش خطا در مفاهیم ریاضی، آن دسته از این مفاهیم را که قابل اثبات است را معین سازد تا بحران عدم قطعیت و منازعه با خطاپذیری در ریاضیات را پایان دهد. رویکرد قیاس‌گرایی در مواجه با مفاهیم و قضایای ریاضی، رویکردی اثباتی است اما در فرآیندی معرفت‌شناختی خود را بروز می‌دهد. زیرا معرفت‌شناسی است که بررسی می‌کند یک دانش چگونه عملکردی دارد و چگونه به پدیده‌های موجود در خود پاسخ می‌دهد. اهمیت چنین رویکردی در این است که بی‌اعتمادی بر ریاضیات را کاهش می‌دهد و همچنان به کاربردی بودن آن تأکید می‌کند.

روش‌شناسی پژوهش

برای بررسی عملکرد قیاسی در شناخت مفاهیم ریاضی و رفع منازعه میان قطعیت یا مطلق‌گرایی و خطاپذیری ریاضیات به بررسی توصیفی و مروری تعاریف مؤلفه‌های مورد بحث پرداخت می‌شود؛ از این رو بسیاری از تعاریف ارائه شده از مفاهیمی چون مطلق‌گرایی و مشتقات آن همچون منطق‌گرایی، صورت‌گرایی و شهودگرایی نیاز به بررسی تاریخی نظریات مختلف بود. البته این رویه در تعریف خطاپذیری نیز رعایت شده است. همچنین تعریف قیاس از منبع بنیادین آن یعنی فلسفه مورد مطالعه قرار می‌گیرد و

سپس در تعاریف قیاس‌گرایی در ریاضیات مورد تحلیل قرار می‌گیرد. از سوی دیگر برای عملکرد مؤثر قیاس‌گرایی در ریاضیات و تأثیر آن در شناخت مطلق بودن یا خطاپذیر بودن مفاهیم ریاضی نیاز به دیدگاهی معرفت‌شناختی بود و از این جهت می‌توان گفت در روش‌شناسی این پژوهش قیاس‌گرایی در ساحت معرفت‌شناختی آن مورد توجه است تا از این طریق دانش ریاضی با موضوع قطعیت (مطلق‌گرایی) و خطاپذیری مورد بحث قرار گیرد.

معرفت‌شناسی در واقع فلسفه‌ای برای مطالعه‌ی دانش است. زمانی که تردید در پذیرش یک دانش عملکرد آن را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد، معرفت‌شناسی می‌آید تا به این تردیدها پاسخ دهد. بر این اساس معرفت‌شناسی شش اصل برای پذیرش یک دانش صادق می‌داند:

۱. دانستن رابطه‌ای است میان یک سوژه ذی‌شعور و یک ابژه، در حالی‌که آن ابژه (که لزوماً هم ابژه بی‌واسطه نیست) بخشی از واقعیت است.

۲. چنین رابطه‌ای یک رابطه شناختی است؛ در واقع سوژه به ابژه می‌اندیشد نه این‌که صرفاً آن را با حواس خود حس کند یا صرفاً احساس و عاطفه‌ای به آن داشته باشد.

۳. لازمه دانستنِ هر چیز باور داشتنِ آن است؛ با تکیه به نظر قدیس آگوستین (قرن ۵ م.) باور داشتن، یعنی فکر کردن همراه با تصدیق.

۴. ابژه/ متعلَّقِ معرفت، یک گزاره است؛ گزاره در بخشی از رابطه دانستن است که در سمتِ ابژه قرار دارد، حال آنکه معرفت‌شناسی، در کنار پرداختن به خود این رابطه، بیشتر به بخشی از این رابطه می‌پردازد که در سمتِ سوژه قرار دارد.

۵. ابژه معرفت گزاره‌ای صادق است؛ هیچ‌کس نمی‌تواند گزاره‌ای نادرست را بداند. البته ممکن است کسی گزاره کاذبی را باور داشته باشد اما باور داشتن صرف به معنای دانستن نیست.

۶. دانستن حالت خوبی است؛ خوب به این معنا که دست کم حالت مطلوبی است و نیز مطلوب‌تر از باور صادقِ خشک‌وخالی (زاگزبسکی، ۱۳۹۷: ۵-۸).

در واقع دیدگاه معرفت‌شناسانه نشان می‌دهد که این پژوهش در پی اثبات مطلق‌گرا بودن و یا خطاپذیر بودن ریاضی نیست بلکه در پی آن است که گزاره‌ی را باور کند و آن دانایی یا دانش بداند که با تمام صداقت آن را باور کند. یعنی برای صدق آن با تفکر و

کنکاش کردن به نتیجه برسد. در اینجا سوژه‌ی اولیه دانش ریاضی است و ابژه‌ی وارد آمده بر آن، مطلق بودن این دانش است. اما ابژه‌ی دیگری (خطاپذیری) صداقت باور و دانایی ابژه‌ی دوم را رد می‌کند. منازعه میان این دو (مطلق‌گرایی و خطاپذیری) با آنکه تا حدی به نفع خطاپذیری است، اما مشکلی پدید می‌آورد، یعنی بحران بی‌اعتمادی به دانش ریاضی در صورت خطاپذیر بودن آن، که این بحران به سوژه‌ی اصلی بدل می‌شود حال بایستی ابژه‌ای در نظر گرفت که بر طبق معرفت‌شناسی به با تمام صدق و باور صحیح به این بحران پاسخ بگوید که این پژوهش قیاس‌گرایی را مطرح می‌کند. زیرا قیاس‌گرایی همانطور که رویکرد معرفت‌شناسی بیان می‌کند از طریق گزاره‌های علّی که همان تفکر می‌باشد، مفاهیم ریاضی را مورد بررسی قرار می‌دهد تا بخشی از دانش ریاضی را که می‌توان به آن قطعیت داد را تأیید کند و در واقع به آن باور صدق دهد. بنابراین طبق این روش بنا نیست هدف رد کردن خطاپذیری ریاضی باشد، بلکه با پذیرش آن در پی تعدیل این خطاها است تا بحران بی‌اعتمادی تا حدود زیادی تعدیل گردد.

سوالات پژوهش

۱- قیاس‌گرایی چگونه بحران میان قطعیت و خطاپذیری ریاضیات را رفع می‌کند؟

۲- چگونه می‌توان ضمن موافقت با خطاپذیری ریاضیات به مفاهیم ریاضی اعتماد کرد؟

۳- آیا قیاس‌گرایی می‌تواند پاسخی برای کلیت ریاضی به عنوان مفهومی قطعی و مطلق در مقابل خطاپذیری بیابد؟

فرضیه‌های پژوهش

۱- قیاس‌گرایی با رویکرد اثباتی در قضایای ریاضی و در فرآیندی معرفت‌شناختی به رفع بحران میان قطعیت و خطاپذیری در ریاضیات می‌پردازد.

۲- از طریق اثبات آن دسته از مفاهیم و قضایای ریاضی که قطعی بودن آن‌ها مورد پذیرش است.

۳- خیر قیاس‌گرایی صرفاً با روش اثباتی خود و ضمن پذیرش خطا در ریاضیات آن

دسته از قضایای ریاضی که قطعی هستند را اثبات می‌کند.

پیشینه‌ی پژوهش

جی داو[i] (۲۰۰۳) در پژوهشی با عنوان «قطعیت و خطاپذیری در ریاضیات بر مبنای قیاس‌گرایی» دو هدف را پی‌گیری می‌کند: (۱) تجزیه و تحلیل ادعاهای خطاپذیری ریاضی به منظور نشان دادن اینکه آن‌ها کمتر از آنچه که بیانیه معمول آن‌ها برمی‌آید بحث برانگیز هستند. (۲) احیای قیاس‌گرایی با اصلاحاتی در آن. برای اهداف این پروژه، خطاپذیری ادعایی متمایز است که برهان‌های ریاضی برای توجیه دانش ریاضی در جایی که دانش یک شرط قطعی دارد و برای اثبات قطعی هر حقیقت ریاضی کافی نیستند. بند اول با دیدگاه سنتی که دانش ریاضی قطعی است در تضاد است. بند دوم این عدم قطعیت را با تضعیف نیروی اثباتی برهان‌ها تقویت می‌کند. پنج استدلال برای خطاپذیری در نظر گرفته شده است: ۱) تمایز بین ریاضیات محض و کاربردی منجر به شکل غیر قابل بحثی از خطاپذیری ریاضی می‌شود. علاوه بر این، این تمایز به خوبی با قیاس‌گرایی مطابقت دارد. ۲) ریاضیات از روش‌های غیر قیاسی استفاده می‌کند. رویه‌های غیرقیاسی نیز، در ابتدا به سختی با قیاس‌گرایی سازگار هستند. از نظر قیاس‌گرایی، قیاس‌گرایی راسلی به سبک قدیمی به نفع یک مفهوم کلی‌تر از اثبات قیاسی کنار گذاشته شده است. ۳) امکان رگرسیون بی‌نهایت برای توجیه ریاضی وجود دارد. برای لاکاتوش، پسرفت از چشم‌اندازهای مختلف برای مبانی ریاضی سرچشمه می‌گیرد. قیاس‌گرایی نشان می‌دهد که رگرسیون بی‌نهایت را نیز متوقف می‌کند. ۴) این واقعیت که استدلال‌های غیررسمی - یعنی استدلال‌هایی که از نظر شکل منطقی آن‌ها معتبر نیستند - تقریباً در همه جا در ریاضیات وجود دارند، شواهد اولیه به نفع شبه تجربی‌گرایی است. استنتاج گرایی با استدلال های غیررسمی سازگار است. ۵) یافته‌ها نشان می‌دهد که طبیعت‌گرایی کواین منجر به خطاپذیری می‌شود. علاوه بر این، اگرچه کواین هرگز رسماً چیزی جز طبیعت‌گرایی را تأیید نمی‌کند، اما نشان می‌دهد که طبیعت‌گرایی با قیاس‌گرایی سازگار است. ۶) اصلاحات به قیاس‌گرایی یکپارچه شده و ادعاهای خطاپذیری در اشکال

غیرمناقشه‌آمیز خود بازگو می‌شوند.

ون اس[ii] (۲۰۰۳). در پژوهش خود با عنوان «سیر تکامل مفاهیم ریاضی: جستاری در مورد قیاس در ریاضیات» به وجود یک مفهوم ثابت تکاملی پنهان در توسعه ایده‌های ریاضی تأکید دارد. تدوین این امر مستلزم تحلیل مفهوم «قیاس» و نقش آن در ریاضیات است. قیاس به عنوان یک مفهوم پنهان به خودی خود یک اعتقاد متافیزیکی بسیار جالب است. استدلال پشت آن حاوی یک عنصر ظریف فریب دهنده است. این مبتنی بر مشاهده است که بسیاری از مفاهیم مدرن ریاضیات، از قیاس ها رشد کرده اند. همچنین می‌توان گفت که این مفاهیم در مقطعی از تاریخ «کمتر واضح» بودند. این مشاهده که به این شکل مجدداً تدوین شده است، تقریباً به یک بیانیه توتولوژیک تبدیل شده است. جدا از اعداد طبیعی، که کرونکر آن‌ها را به عنوان یک موهبت الهی معرفی کرد، همه مفاهیم در یک دوره زمانی معین پدید آمده‌اند. این به نوعی در ایده «مفهوم» ضمنی است. به عنوان یک بیان توتولوژیک نمی‌توان از آن به عنوان استدلال استفاده کرد. مطمئناً نمی‌توان از آن برای نشان دادن اینکه مفاهیم در پشت قیاس‌های امروزی پنهان شده است استفاده کرد. قیاس ناشی از تئوری اعداد را می‌توان به عنوان یک «پدیده طبیعی» در نظر گرفت. به نظر می رسد که ابزار طبیعی دستیابی به جداسازی جنبه هایی است که در سایر بخش های ریاضیات با انتزاع و تعمیم به دست می‌آید. فقط آینده ریاضیات می‌تواند تصمیم بگیرد که آیا این تفاوت ظاهری اساسی است یا خیر.

دیویسون[iii] و میچل[iv] (۲۰۰۸). در پژوهشی با عنوان «فلسفه آموزش ریاضی چگونه در ریاضیات منعکس می شود؟» به جنگ مطلق‌گرایی و خطاپذیری ریاضیات می‌پردازد و تأثیر آن را بر آموزش مطرح می‌کند. در طول مدت زمانی که «جنگ ریاضی» نامیده می‌شود، بسیاری از اظهارات بیش از حد تعمیم‌یافته از سوی هر دو طرف، تضاد بین رویکردهای مفهومی و رویه‌ای در مطالعه ریاضیات را کاهش داده است. از نظر فلسفه‌های آموزش ریاضی، دیدگاه مطلق‌گرایانه معتقد است که دانش ریاضی قطعی و غیرقابل چالش است، در حالی که دیدگاه خطاپذیر این است که دانش ریاضی هرگز فراتر از تجدید نظر و تصحیح نیست. اصلاحات اصلی آموزش ریاضی تمرکز مطلق بوده و ماهیت در حال

تغییر این رشته را منعکس نکرده است. در نهایت اصلاحات واقعی، می‌توانـد ادراکـات در حال تغییر در آموزش ریاضی را به همراه تغییرات (در فرهنـگ آمریکـایی و انتظـارات آن) از آموزش ریاضی منعکس کند.

مقدمه

زمانی ریاضیات به دیدگاهی تثبیت‌پذیر و قطعی رسیده بود کـه بـرای مثـال بـه طـور قطعـی پاسخ به پرسش «۱+۱» قطعاً «۲» بود، اما در حدود بیش از نیم قرن اخیر گروهی از فیلسـوفان پاسخی شگفت‌انگیز به این پرسش می‌دهند و این پاسخ «خیر» یا «شاید» است.

به عقیده‌ی فیلیپ دیویس جز در موارد «بـی‌اهمیـت»، عملیـات حسـابی در مهـی از عـدم قطعیت احاطه شده است و مجموعات حسابی اعداد نیستند، بلکه توزیع‌های احتمالی هسـتند (Davis, 1972: 171). چنین اندیشه‌ای که گروه زیادی از ریاضی‌دانـان بـه آن پیوسـته‌انـد، «خطاپذیری[v] ریاضیات» می‌نامند. به‌طـور کلـی ریشـه‌هـای خطاپـذیری ریاضـی سـه بخـش تاریخی دارد. ابتـدا کشـف و کـاربرد هندسـه نااقلیدسـی توسـط بویـوئی[vi] و لباچفسـکی[vii] (۱۸۲۹) بود؛ هندسه نااقلیدسی[viii] در ابتدا یک کارکرد ذهنی کاملاً رسـمی را هـدف قـرار می‌داد و هیچ‌گاه در پی اثبات فیزیکی یا تجربی کارکرد خود نبود. اما اندیشه‌هـای اینشـتین در نظریه نسبیت این نگرش را تغییـر داد. در ادامـه آن اسـتفاده از هندسـه نااقلیدسـی نـوعی شک و تردید در ریاضیات به وجـود آورد کـه مـی‌تـوان آن را آغـاز پیشـروی خطاپـذیری ریاضیات دانست. پس از آن کشف پارادوکس نظریه مجموعه‌ها[ix] توسـط راسـل[x] (۱۹۰۱) بود که پایه و اسـاس بسـیاری از مفـاهیم ریاضـی را مـورد تردیـد قـرار داد. بنـابراین اسـاس ریاضیات به دلیل حسابی شدن تحلیل‌ها بسیار اهمیت یافت. در حالی که نظریه مجموعـه‌هـا بنا بود ریاضیات را از شکست نااقلیدسی با اجتناب از هندسه به نفع حساب نجات دهـد، امـا بـا کشـف ایـن پـارادوکس، ایـن دیـدگاه نیـز شکسـت خـورد. پـس از آن سـه مکتـب منطق‌گرایی[xi]، صورت‌گرایـی[xii] و شـهودگرایـی[xiii] در پـی دسـت‌یـابی بـه تثبیـت مفـاهیم ریاضی و قطعیت[xiv] آن بودند.

منطق‌گرایی بخشی از برنامه نظری مجموعه‌ها بود. منطق‌گرایی امیدوار بود که ریاضیات را به منطق مناسب تقلیل دهد. از سوی دیگر صورت‌گرایی امیدوار بود که ریاضـیات را بـر

روی برهان‌های متناهی و برهان‌های فرا ریاضی پایه‌ریزی کند. در نهایت، شهودگرایی امیدوار بود که با جایگزینی برهان‌های کلاسیک با برهان‌های سازنده، ریاضیات را اصلاح کند. دو برنامه اول نتوانستند آرزوهای خود را محقق کنند. منطق‌گرایی، در پاسخ به پارادوکس راسل، کارکردش صرفاً در نظریه مجموعه‌ها قابل اعتنا بود و در آن نظریه مجموعه‌ها به تنهایی به معنای منطق است، در حالی‌که صورت‌گرایی، ظاهراً کاملاً بر اساس نتایج ناقص گودل استوار شده است. امروزه فقط شهودگرایی در قالب ریاضیات سازنده زنده مانده است. با این حال، تا آنجا که مدارس پایه برای نجات ریاضیات کلاسیک قرار داشتند، شهودگرایی به عنوان یک پایه شکست می‌خورد زیرا بسیاری از نتایج کلاسیک را رد می‌کند. از این رو کشف و به کارگیری هندسه نااقلیدسی، کشف پارادوکس‌های نظریه مجموعه‌های ساده و شکست سه مکتب بنیادی، ما را متقاعد می‌سازد که اکنون خطاپذیری ریاضی به گزینه‌ای مناسب در فلسفه ریاضیات تبدیل شده است. اما برای حل این شبه بحران و اطمینان بیشتر، بررسی خطاپذیری و قطعیت ریاضیات در دیدگاه قیاس‌گرایی [xv] می‌تواند کمک کننده باشد.

مرزبندی «قیاس» از سایر پدیده‌ها به خودی خود یک کار ریاضی نیست. بنابراین نمی‌توان انتظار داشت که خط مرزی به معنای مطلق ریاضی دقیق باشد. با این حال، با توجه به دانش و تجربه ریاضی معین، فرد باید بتواند بفهمد کدام مثال‌ها از نمونه‌های دیگر معمولی‌تر هستند. قیاس می‌تواند عملکرد هر فعل علمی را به نسبت نتایجی که به دست می‌آورد تثبیت کند.

بررسی قیاس‌گرایی در ریاضیات بایستی در ساختاری معین شود که بتواند نتایج کلان و قابل حل برای مسائل ریاضی به وجود آورد چیزی که از نوع فرآیند شکل‌گیری و ساختاری قابل تثبیت باشد. یک نمونه‌ی آن در تئوری اعداد است، اعداد هم ابزار و هم هدف توصیف هستند. در ریاضیات مانند هر علم دیگری از اعداد برای اندازه‌گیری و شمارش استفاده می‌شود. آن‌ها ابزار اساسی هر علمی از جمله ریاضیات هستند. در نظریه اعداد، اعداد نیز موضوع علم می‌شوند. البته این مشاهدات فراریاضی است و در خود نظریه اعداد نقشی ندارد. با این حال، وقتی به شیوه‌ای که از قیاس‌ها در نظریه اعداد بهره‌برداری

می‌شود نگاه می‌کنیم، این جنبه به نوعی ظاهر می‌شود و به نظر می‌رسد بر بسیاری از پدیده‌های فرا ریاضیاتی که پیوسته با بهره‌برداری از قیاس در آنجا همراه است، تسلط دارد (Ibid: 172).

بنابراین شناخت تاریخی و هستی‌شناسی [xvi] از نظریه قیاس‌گرایی می‌تواند به شکل‌گیری بحث کمک بسیاری کند. زیرا نظریه خطاپذیری سعی دارد بنیان قطعیت در مفاهیم ریاضی را زیر سوال ببرد، از طرفی این رویه می‌تواند به بحرانی در عملکرد مجموعه‌ی ریاضیات داشته باشد و ذهن را نسبت به کلیت آن بی‌اعتماد سازد. در چنین شرایطی قیاس‌گرایی از دیدگاه معرفت‌شناختی [xvii] با توجه به ابزاری که دارد سعی می‌کند، این بحران را رفع کند تا ریاضیات همچنان قابل اعتماد باشد. زیرا معرفت‌شناسی به بررسی دانش (معرفت، آگاهی یا شناخت) و باور موجه می‌پردازد که در این مورد مفاهیم ریاضی به‌عنوان دانش مورد بررسی قرار می‌گیرند تا از صدق و درستی عملکرد آن‌ها آگاه شویم.

قیاس‌گرایی در ریاضیات

تعاریف و بازنمایی‌های متعددی از قیاس در تلاش برای درک پیچیدگی‌های معنای قیاس ارائه شده است. قبل از بررسی متون مربوط به مفاهیم پیچیده‌تر مدرن قیاس، بهتر است به کاربردهای تاریخی قیاس نگاهی بیاندازیم تا شهودی در مورد تعاریف و کاربردهای کلی قیاس به دست آوریم.

مفهوم‌سازی‌های اولیه قیاس زیر چتر نظریه قیاس کلاسیک قرار می‌گیرد که در ابتدا توسط ارسطو [xviii]، توماس آکویناس [xix] و کاردینال کاجتان [xx] مطرح شد (Haaparanta, 1992: 176). هاپارانتا بین سه روش بحث از قیاس کلاسیک تمایز قائل شد: قیاس اشیا [xxi]، قیاس اصطلاحات [xxii] و استدلال قیاسی [xxiii].

نظریه قیاس کلاسیک در درجه اول به قیاس اشیا و قیاس اصطلاحات مربوط می‌شود. قیاس اشیا به آن قیاس‌هایی اطلاق می‌شود که با ذکر شباهت بین دو شی، رویداد یا سیستم ایجاد می‌شود. این نوع قیاس شامل جملاتی مانند «ماشین به سرعت یوزپلنگ است» و «اتم مانند منظومه شمسی ما است» می‌شود. قیاس اصطلاحات به آن دسته از قیاس‌هایی اطلاق

می‌شود که صریحاً بین دو شیء، رویداد یا سیستم مقایسه نمی‌کنند، بلکه در عوض مقایسه‌ای بین معانی اصطلاحاتی را پیشنهاد می‌کنند که در زمینه‌های معین مشابه هستند، اما لزوماً یکسان نیستند. به عنوان مثال، معنای کلمه صرفه‌جویی در زمینه‌های صرفه‌جویی در زمان و صرفه‌جویی در هزینه مشابه است، حتی اگر این کلمه در هر زمینه دقیقاً به یک شکل استفاده نمی‌شود. تفاوت بین قیاس اشیاء و قیاس اصطلاحات در نگاه اول ظریف است: در حالی که قیاس اشیاء به صراحت به قیاس‌هایی اشاره دارد که بین ویژگی‌ها یا روابط دو یا چند چیز مقایسه می‌کنند، قیاس اصطلاحات مقایسه معنای یک چیز است. این اصطلاح واحد است، همانطور که ممکن است در زمینه‌های مختلف استفاده شود. توجه به این نکته مهم است که سیستم‌های ضمنی وجود دارند که با تشبیه اصطلاحات پیشنهاد می‌شوند، اگرچه این سیستم‌ها هرگز به صراحت به عنوان مشابه مقایسه نمی‌شوند (Ibid: 179-180).

مقوله استدلال قیاسی به جای مشخص کردن نوعی از قیاس، بر فرآیند واقعی استدلال از طریق قیاس متمرکز است. استدلال‌های قیاسی اغلب شامل حدس زدن در مورد شباهت‌های بین دو ساختار است که در آن اطلاعاتی وجود دارد که در مورد یک ساختار مشخص شناخته شده است و اطلاعاتی که مایل است در مورد ساختار دیگری شناخته شود. برای مثال یک استدلال قیاسی براساس قیاس گرما، مانند آب در زمینه توضیح انتقال گرما از یک خانه گرم در هوای سرد را در نظر بگیرید. آن خانه و سقف آن مانند ظرفی درب‌دار است. این واقعیت که سوراخ کردن درب ظرف می‌تواند باعث نشت آب شود برای تشبیه بیشتر و ایجاد حدس جدیدی استفاده می‌شود؛ اگر سوارخی در سقف وجود داشته باشد، ممکن است گرما از خانه نشت کند (Gentner, 1983: 156).

در واقع استدلال از طریق قیاس یک فرآیند ذهنی است که شامل مقایسه دو حوزه شناختی است. محققان تمایل دارند قیاس‌های افراد را از طریق فرآیند تطبیق سازمانی بین یک ساختار و ساختار دیگر عملیاتی کنند. یک وجه مشترک در میان رویکردهای مدرن برای توصیف قیاس‌ها و استدلال قیاسی، در نظر گرفتن نگاشت بین یک منبع و یک حوزه هدف است. در طول یک قسمت از استدلال قیاسی، منبع به ساختاری که یک قیاس از آن

سرچشمه می‌گیرد، اشاره می‌کند، در حالی‌که هدف به ساختاری اشاره می‌کند که روی آن نقشه‌برداری می‌شود. یک دامنه معمولاً قبلاً برای فرد شناخته شده است، در حالی که دیگری دامنه کمتر شناخته شده‌ای است که در دست بررسی است (Ibid: 159).

در حقیقت حوزه‌ی شناختی قیاس از نظر روان‌شناختی به‌عنوان سیستم‌هایی از اشیا، ویژگی‌های شی و روابط بین اشیاء در نظر گرفته می‌شوند که همه آن‌ها با هم ساختاری را در ذهن تشکیل می‌دهند. دامنه‌ها نه تنها شامل اشیایی هستند که در هنگام تشکیل یک قیاس مورد بررسی قرار می‌گیرند، بلکه شامل ویژگی‌های رابطه‌ای زیربنایی هستند که ممکن است شیء داشته باشد. دامنه‌ها می‌توانند نماینده سطوح مختلف ساختار باشند و همچنین می‌توانند در دامنه‌های دیگر تعبیه شوند. به عنوان مثال، می توان حوزه اشیایی مانند گروه‌ها را در نظر گرفت، اما می‌توان دامنه نظریه گروه را به عنوان یک کل در نظر گرفت. با بسط بیشتر، می‌توان حوزه جبر مجرد، حوزه ریاضیات پیشرفته، حوزه ریاضیات و غیره را در نظر گرفت.

ریاضی‌دانان موافق هستند که نمونه‌های خاصی از قیاس به نحوی بسیار واقعی و جالب هستند. این به طور بالقوه بسیار گیج کننده است. از یک سو، به عنوان یک مفهوم، «قیاس» فاقد دقت ریاضی است. از سوی دیگر، نمونه‌های خاص قیاس به معنای دیگری به اندازه کافی دقیق هستند. ریاضیدانان درباره آن‌ها می دانند و درک مشترکی از آن‌ها دارند. این درک مشترک است که آن‌ها را قادر می سازد از این قیاس‌ها به طور سیستماتیک بهره‌برداری کنند (Ibid: 162).

قیاس مثال مهمی از آنچه به نظر می‌رسد مکانیزم شناختی بسیار کلی است ارائه می‌دهد و ورودی‌های خاصی را اساساً از هر حوزه‌ای می‌گیرد که می‌تواند به صورت حرف اضافه صریح نمایش داده شود و بر روی آن‌ها برای تولید استنتاج‌های خاص حوزه هدف عمل کند (Hummel & Holyoak, 1997: 427). قیاس‌ها نقش اصلی را در توسعه حدس در ریاضیات در زمینه حل مسئله ایفا می‌کنند. این توصیفات از قیاس یک دیدگاه را در مورد قدرتی که استدلال قیاسی می‌تواند در شکل‌گیری استنتاج‌های جدید داشته باشد، روشن می‌کند (Canadas et al, 2007: 62).

به‌عنوان دیدگاهی از ریاضیات، قیاس‌گرایی حداقل به دکارت برمی‌گردد، اگرچه برتراند راسل، دیوید هیلبرت، آلبرت اینشتین و همچنین هیلاری پاتنم آن را تایید کرده‌اند. راسل، هیلبرت و پاتنم بعداً و به دلایل موجه آن را رد کردند. نسخه دکارت از قیاس‌گرایی رویکردی ساده را ارائه می‌دهد. استنتاج‌گرایی ساده نقطه شروع خوبی برای دیدگاه‌های معاصر مورد حمایت راسل، هیلبرت، اینشتین و همچنین احیای اخیر پاتنم و آلن ماسگریو است (Musgrave, 1977: 104).

رنه دکارت یکی از فیلسوفانی است که شرح قیاس‌گرایانه‌ای از ریاضیات ارائه داده است. او حساب و هندسه را بسیار مطمئن‌تر از سایر رشته‌ها می‌دانست و در شرح ریاضیات می‌گوید:

> «آن‌ها به تنهایی به موضوعی آنقدر ناب و ساده توجه دارند که هیچ فرضی مبنی بر اینکه تجربه ممکن است نامطمئن باشد، نمی‌کند. آن‌ها کاملاً شامل استنباط نتیجه با استفاده از استدلال‌های عقلی هستند» (Descartes, 1985: 12).

دکارت به عنوان پدر هندسه تحلیلی در کار هندسی خود به هیچ وجه به بدیهیات متوسل نمی‌شود. بنابراین، دکارت باید برداشت وسیع‌تری از استدلال منطقی ریاضی در ذهن داشته باشد. با توجه به این واقعیت که دکارت دارای گرایش فلسفی افلاطونی است، می‌توان گفت او به برخی از اصول افلاطونی برای اثبات استدلال ریاضی متوسل شد. این بدان معناست که قیاس‌گرایی دکارت توسط برخی مفروضات گسترده افلاطونی محدود شده است که هر نظریه استدلالی را که مورد تأیید اوست، تضمین می‌کند. از نظر دکارت این قیاس‌گرایی محدود، مبنای قطعیت هم در حساب و هم در هندسه است. می‌توان این را تعمیم داد تا همه ریاضیات را شامل شود. چنین دیدگاهی محدود است زیرا باید با مفروضات افلاطونی یا منطق‌گرایانه تکمیل شود.

انیشتین نیز اثبات و قطعیت گزاره‌های ریاضی را دور از واقعیت می‌داند اما امکان قطعیت را در ریاضی محض متصور است. او شفافیت کامل در مورد این وضعیت را فقط از طریق نظریه «اصل موضوعی[xxiv]» امکان‌پذیر می‌داند. به عقیده او پیشرفتی که بدیهیات به دست آورده است عبارت است از جداسازی دقیق منطقی-صوری از محتوای عینی یا شهودی آن و بر اساس بدیهیات منطقی- صوری به تنهایی موضوع ریاضیات را تشکیل می‌دهد، که به محتوای شهودی یا منطقی- صوری مربوط نمی‌شود (Einstein, 1954: 254-255).

در دیدگاه اینشتین تمایز بسیار واضحی میان عناصر صوری یک نظریه و عناصر شهودی یا عینی وجود دارد. عناصر صوری در خود بدیهیات «ضمنی» هستند. یعنی بدیهیات موضوعات ریاضی نظریه را ارائه می‌دهند. عناصر شهودی یا عینی یک محدودیت فرا ریاضیاتی دارند که همان دنیای تجربی است. در تفسیر مدرن‌تر ریاضیات و هندسه به اشیایی می‌پردازد که با کلمات خط مستقیم، نقطه و غیره نشان داده می‌شوند. هیچ دانش یا شهودی از این اشیاء وجود ندارد. این شهود فقط به اعتبار بدیهیات فرض اما فاقد تمام محتوای شهود یا تجربه تلقی می‌شوند. این بدیهیات مخلوقات آزاد ذهن انسان است. همه گزاره‌های دیگر ریاضیات استنتاج‌های منطقی از بدیهیات هستند که فقط باید به معنای اسمی تلقی شوند. بدیهیات اشیایی را که ریاضی به آن‌ها می‌پردازد را مشخص می‌کند.

نظر اینشتین این است که چنین نگرشی ریاضیات را از تمام عناصر اضافی پاک می‌کند و در واقع این دیدگاه جهان تجربه را به عنوان محدودیتی بر معنای بدیهیات حذف می‌کند. ریاضیات به هیچ وجه متعلق به اشیاء واقعی نیست و اشیاء ریاضی طرح‌واره‌های مفهومی خالی هستند و آنچه به آن‌ها محتوا می‌دهد به ریاضیات مربوط نمی‌شود (Ibid: 256).

عناصری چون بدیهیات، قضایا و برهان قضایا از بدیهیات، عناصر اساسی قیاس‌گرایی هستند. با این حال، حقیقت تنها عنصری از آخرین جزء آن است. بدیهیات و قضایا ارزش صدق ندارند. فقط شرط‌هایی که بدیهیات را با قضایا مرتبط می‌کنند، برای قیاس‌گرا ارزش صدق دارند. ارتباط بین بدیهیات و قضایا مشروط است، اگر بدیهیات پشت قضایا باشد، این ارتباط شرطی از نظر صدق اجزای آن خنثی است.

قیاس‌گرایی هیچ تعهد ریاضی هستی شناختی ندارد. تعهدات هستی شناختی قیاس‌گرایی، تعهدات فرضی هستند. حداقل یک عارضه برای قیاس‌گرا در رابطه با تعهدات هستی شناختی وجود دارد. زیرا، اگرچه قیاس‌گرا تعهدات را به صورت فرضی انجام می‌دهد، با این حال زبانی که قیاس‌گرایی در آن عمل می‌کند، اگر قرار است برای ریاضیات کافی باشد، باید حاوی نام‌های نامحدود باشد. در نتیجه به نظر می‌رسد که قیاس‌گرایی از نظر هستی‌شناختی به اندازه افلاطونیسم خاص است (Resnik, 1980: 118).

لوسی اووریه بوفه[xxv] روش‌هایی را که در آن ریاضیدانان اشیاء ریاضی را تعریف

می‌کنند بررسی کرد و مدلی از فرآیند ریاضیدانان را برای تولید تعاریف ایجاد کرد. او دریافت که قیاس‌ها در مراحل مختلف مدل تعریف کننده نقش دارند: در طول کاوش اولیه هنگام ایجاد یک تعریف و در طول تعریف مهم نیست که در چه مرحله‌ای از قیاس‌ها استفاده می‌شود، هدف ثابت می‌ماند: مفاهیم و نظریه‌های جدید مربوط به تعریف جدید از طریق مقایسه با مفاهیم و نظریه‌های موجود ایجاد می‌شوند (Ouvrier-Buffet, 2015: 2219).

با استفاده از مولفه‌های مدل تعریف‌کننده اووریه بوفه، مارتین-مولینا[xxvi]، گونزالس‌رگانا[xxvii] و گاویلان-ایزکویردو[xxviii] (۲۰۱۸) نمونه‌ای از یک ریاضیدان محقق را به اشتراک گذاشتند که کار خود را در تولید یک تعریف با ایجاد یک نسخه تعمیم‌یافته مناسب از یک تعریف موجود توصیف می‌کرد. به ویژه، ریاضیدان در مطالعه خود از قیاس‌ها برای مقایسه بین حوزه منبع تعاریف از قبل شناخته شده و حوزه هدف نسخه‌های تعمیم یافته تعاریف منبع استفاده می‌کند.

استدلال قیاسی به طور هدفمند توسط این ریاضیدانان مورد استناد قرار گرفت، به ویژه به روشی که ریاضیدان محقق آگاهانه حوزه جدیدی را ایجاد می‌کند که شباهت‌ها و تفاوت‌ها در آن قابل مشاهده است.

قطعیت و خطاپذیری در ریاضیات

در ریاضیات، استدلال می‌شود که یک تصویر «مطلق‌گرا» یا «فرمالیست» از ریاضیات در ظاهر مطابقت دارد، در حالی که یک تصویر «خطاگرا» یا «ساخت‌گرا» در باطن آن پدیدار می‌شود. آنچه در خطر است نه تنها صحت این دو تصویر، بلکه پیامدهای آن‌ها برای اقتدار عمومی علم است. تصویر اول علم را به گونه‌ای نشان می‌دهد که گویی مستحق اقتدار مطلق است، به این معنی که افراد غیردانشمند باید هر چه را «متخصصان» به آن‌ها می‌گویند، تأیید کنند، زیرا آنچه به آن‌ها گفته می‌شود ممکن نیست اشتباه شود. تصویر دوم، متناوب، با زیر سوال بردن این تصور که علم سزاوار چنین اقتدار مطلق است و حتی نشان می‌دهد که فقط ایدئولوژی دیگری نیست، مردم را از تصویر اول رهایی می‌دهد (Greiffenhagen & Sharrock, 2011: 842).

طیف وسیعی از دیدگاه‌ها در فلسفه ریاضیات وجود دارد که به آن‌ها «مطلق‌گرا» می‌گویند. این نگرش‌ها ریاضیات را به عنوان مجموعه‌ای از دانش عینی، مطلق، قطعی و اصلاح ناپذیر می‌بینند که بر پایه‌های محکم منطق قیاسی استوار است. در میان دیدگاه‌های قرن بیستم در فلسفه ریاضیات، منطق‌گرایی، صورت‌گرایی و تا حدودی شهودگرایی و افلاطون‌گرایی را می‌توان مطلق‌گرا دانست (Ernest, 1991: 45). قطعیت دانش ریاضی برای قرن‌ها کم و بیش بدون شک باقی ماند (Hersh, 1997: 14). با این حال، هنگامی که قطعیت ریاضی در آغاز قرن بیستم تحت نظارت فزاینده‌ای قرار گرفت، ثابت شد که هر ادعایی در ریاضی به راحتی قابل دفاع نیست (Grattan-Guinness, 2000: 91). عبارات ساده‌ای که زمانی بدیهی به نظر می‌رسید، مانند اینکه همه اشیاء با یک ویژگی خاص می‌توانند یک مجموعه را تعریف کنند، نشان داده شد که در معرض پارادوکس هستند و بنابراین دیگر نمی‌توان آن‌ها را به عنوان حقایق قطعی جهانی در نظر گرفت (Giaquinto, 2002: 46). به نظر می‌رسید که ریاضیات در خطر از دست دادن معنایی (اعم از عینی و ذهنی) بود که قرن‌ها به آن نسبت داده می‌شد، یعنی نمونه‌سازی دانشی که مسلم و قطعی بود (Russell, 1969: 71). به‌عنوان مثال بدیهیات قوی و واضح برای نظریه مجموعه‌ها، به سادگی بعید است. این بدان معنی است که نظریه اقلیدسی نمی‌تواند رگرسیون نامحدود را متوقف کند. بنابراین، قضایای نظریه‌های اقلیدسی قطعی نیستند. آن‌ها هیچ حمایتی از بدیهیات به دست نمی‌آورند، زیرا بدیهیات نامشخص هستند. به این ترتیب، رگرسیون نامحدود دانش ریاضی نظریه‌های اقلیدسی را تضعیف می‌کند.

هیوم نیز بر اساس همین دیدگاه در درک اشیاء ریاضی می‌گوید:

> «اگرچه هرگز دایره یا مثلثی در طبیعت وجود نداشت، اما حقایقی که اقلیدس نشان داد، برای همیشه قطعیت و شواهد خود را حفظ خواهند کرد» (Hume, 1993: 15).

در واقع ریاضیدانان آماده نبودند که یقین را کنار بگذارند. برعکس، آن‌ها به عنوان یکی از اهداف اساسی خود، تضمین قطعیت ریاضی بر پایه‌های محکم را تعیین کردند. هیلبرت[xxix] ریاضیاتی را متصور شد که هیچ کس در آن شک نمی‌کند و تناقضات تنها از طریق بی‌احتیاطی خود ما به وجود می‌آیند (Hilbert, 1983: 191). در این دوره، یافتن معنا

(عینی یا ذهنی) در ریاضیات با یافتن قطعیت در ریاضیات برابر بود. علاوه بر این، این تلاش‌ها صرفاً ریاضی نبودند، بلکه ملاحظات فلسفی داشتند، زیرا آنچه مسلم به حساب می‌آمد اساساً یک موضوع فلسفی بود (Giaquinto, 2002: 90). از این نقطه به بعد، سه نوع معنای عینی و فلسفی برای قطعیت ریاضی ایجاد شد: منطق‌گرایی، شهودگرایی و صورت‌گرایی.

قطعیت ریاضیات هدف اصلی مکاتب مختلف فلسفی در ریاضیات بوده است. البته آنچه باید بر آن تأکید شود این است که فلسفه‌های مطلق‌گرایانه ریاضی به توصیف ریاضیات یا دانش ریاضی نمی‌پردازند. آن‌ها به پروژه معرفت‌شناختی ارائه سیستم‌های دقیق برای تضمین دانش ریاضی به طور مطلق (به دنبال بحران قبلی در پایه‌های ریاضیات ناشی از معرفی نظریه مجموعه‌های نامتناهی کانتور) توجه دارند. بسیاری از ادعاهای مطلق‌گرایی در اشکال مختلف آن ناشی از همذات‌پنداری آن با ساختار منطقی سفت و سختی است که برای این اهداف معرفتی معرفی شده است. بنابراین، بر اساس مطلق‌گرایی، دانش ریاضی بی‌زمان است، اگرچه ممکن است نظریه‌ها و حقایق جدیدی را برای افزودن کشف کنیم. این رویکرد فوق بشری و غیرتاریخی است، زیرا تاریخ ریاضیات به ماهیت و توجیه دانش ریاضی بی‌ربط است (Rosenthall, 1996: 29). بنابراین، نتیجه به دست آمده تصویری از ریاضیات است که از نظر فلسفی تایید شده و به نوعی ثابت، منطقی، مطلق، غیرانسانی، سرد، عینی، خالص، انتزاعی و تا حدودی فوق عقلانی درک شده است.

منطق همیشه با ریاضیات، نمونه تفکر عقلانی مرتبط بوده است. افلاطونیسم فرض کرد که دانش ریاضی نتیجه عملکرد منطق است. با این حال در منطق‌گرایی، منطق نه تنها وسیله‌ای است که از طریق آن به ریاضیات دسترسی پیدا می‌شود، بلکه جوهر اساسی آن نیز می‌باشد. بر اساس منطق‌گرایی، تمام ریاضیات و مشتقات ریاضی را می‌توان در نسخه‌هایی که فقط شامل عبارات منطقی و قوانین استنتاج کاملاً منطقی هستند، بازنویسی کرد (Rayo, 2005: 213). بر این اساس، معنای ذهنی روان‌شناختی مرتبط با قطعیت ریاضی ریشه در معنای ذهنی و روان‌شناختی منطق و قطعیت آن دارد (Shapiro, 2007: 31). در واقع می‌توان گفت «منطق» بدیهیات ریاضی نیست بلکه به این عنوان در نظر گرفته می‌شود. در چنین شرایطی امکان شکست در بیان بدیهیات چنین دیدگاهی وجود دارد.

برای صورت‌گرایان، یقین ریاضی نه نتیجه منطق است و نه شهود. این صرفاً یک موضوع نحوی است (Giaquinto, 2002: 23). بر اساس نظریه صورت‌گرایی، موضوع ریاضیات نمادهای آن است. قرار بود این نمادها بر اساس قوانین نحوی مشخص و بدون ابهام ارائه شود (Hilbert, 1983: 192). اینکه نمادها و قواعدی که برای ترکیب آن‌ها به کار می‌رفت معنای ذاتی داشته باشد برای فرمالیست‌ها بی‌ربط بود (Ernest, 1998: 23). آنچه اهمیت داشت این بود که قواعد فرمالیستی می‌توانستند گزاره‌های ریاضی عینی و غیرقابل انکار را دقیقاً به این دلیل که عاری از هر معنایی بودند تولید کنند (Zach, 2006: 429). این بدان معناست که معنای ذهنی و روان‌شناختی یقین همچنان می‌تواند در مورد این گزاره‌های بی‌معنا صدق کند. از این منظر مسئله‌ی خطاپذیری ریاضی همچنان پابرجا است و فرمالیست به‌جای پاسخ به نوعی صورت مسئله را پاک می‌کند و مفاهیم ریاضی در حدود نام‌گرایی[xxx] تقلیل می‌دهد؛ یعنی مفاهیم ریاضی از اساس دارای بیان عینی و بازتاب واقعی نیستند و در واقع این‌ها چیزهایی هستند که انسان‌ها آن را بر اساس نوعی قرارداد معین کرده‌اند. می‌توان گفت ممکن است که بخشی از نگرش خطاپذیری ریاضیات در حضور انسان و تأثیرش بر ریاضی از همین نگرش در فرمالیسم نشأت گرفته است.

شهودگرایان معتقدند که دانش ریاضی به جای منطق، نتیجه استعدادهای ذاتی و شهودی انسانی است که به انسان اجازه می‌دهد مفاهیمی مانند زمان یا مکان را درک کند (Hersh, 1997: 19). این شهودها به عنوان ویژگی‌های جهانی ذهن انسان در نظر گرفته شد. به این ترتیب، آن‌ها دانشی را آشکار کردند که همه می‌توانند آن را به عنوان یقین بدیهی بپذیرند (Kline, 1980: 56). بنابراین می‌توان ادعا کرد که دانش ریاضی عینی و قطعی است. با این وجود، وابستگی به شهود انسانی، شهودگرایان را به انکار و رد بخش‌های خاصی از دانش ریاضی معاصر که به نظر می‌رسید با شهودها در تضاد هستند، سوق داد (Ramsey, 2013: 31). یکی از مفاهیمی که شهودگرایان نمی‌پذیرند مفهوم بی‌نهایت بود. بی‌نهایت برای آن‌ها هیچ معنای عینی یا ذهنی نداشت، زیرا فراتر از هر چیزی است که انسان می‌توانست درک کند (Benacerraf, & Putnam, 1983: 17). در نگرش شهودگرایی نیز ویژگی حضور انسان در عملکرد این نگرش نیز وجه تشابه با خطاپذیری را نشان می‌دهد همانطور که پیش از این فرمالیسم با رویکرد

نام‌گرایی این تشابه را رقم زده است. اما می‌توان گفت شهودگرایی به ویژگی‌هایی با وضوح بیشتر نیز دست می‌یابد که نمونه‌ی آن در عدم درک مفهوم «بی‌نهایت» خود را بروز می‌دهد. در واقع شهودگرایی اگر چه مفاهیم از مبنای قراردادی به ساختاری از پیش موجود و ذاتی تعریف می‌کند و انسان بایستی با شهودش آن‌ها را درک کند، اما سازوکار علمی به این ادراک می‌بخشد و زمانی که نتواند آن سازوکار را به دست آورد آن را از دایره شهود خارج می‌داند و این را می‌توان گامی مهم به سوی نظریه‌ی خطاپذیری دانست، هر چند که هدف شهودگرایی نیز مطالق‌گرایی دانش ریاضی و قطعیت بخشی به آن بود.

هر یک از سه نظریه مطلق‌گرایی تلاش کردند تا پایه‌های ریاضیات را تضمین کنند و در عین حال جنبه‌های قطعیت را که در یک زمینه افلاطونی مستلزم است، کنار بگذارند. برای مثال، شهودگرایی به معنایی که افلاطونیسم است عینی نیست. به اشیایی که مستقل از ذهن وجود دارند اشاره نمی‌کند (Shapiro, 2007: 346). علیرغم این واقعیت که شهودها را می‌توان قادر به آشکار کردن حقایق جهانی دانست، شهودگرایی به یک معنا ذهنی است، زیرا فرض می‌کند که دانش ریاضی از ذهن بیرون می‌آید (Heyting, 1983: 53). با این وجود، این فرض شهودگرایی آن را در موقعیت بهتری نسبت به افلاطونیسم در توضیح چگونگی دستیابی انسان به دانش ریاضی قرار می‌دهد. علاوه بر این، به نظر می‌رسد شهودگرایی نشان می‌دهد که ریاضیات نمی‌تواند چیزی کاملاً انتزاعی باشد. شهودگرایی طعمی تجربی دارد، زیرا دانش ناشی از شهودها، به یک معنا، تبدیل به دانشی می‌شود که می‌توان تجربه کرد (Brouwer, 1983: 94). به عنوان مثال، اگر درک ما از اعداد طبیعی به درک شهودی ما از زمان بستگی داشته باشد، همانطور که کانت فرض می‌کند، در این صورت نحوه برخورد فرهنگ‌های مختلف با زمان در سراسر جهان باید شواهد تجربی ارائه کند که به نحوه‌ی درک انسان از اعداد مربوط می‌شود. در واقع، شهودگرایی فقط بر اساس این مبانی مورد قضاوت قرار گرفته است، زیرا به نظر نمی‌رسد شهودی جهانی از زمان وجود داشته باشد (Hersh, 1997, 42).

اما موضع دیگر در فلسفه ریاضیات خطاپذیری است که بر تمرین ریاضیات و جنبه انسانی ریاضیات تأکید دارد. خطاپذیری، ریاضیات را نتیجه فرآیندهای اجتماعی و کاملاً انسانی

می‌داند. دانش ریاضی هم از نظر براهین و هم از نظر مفاهیم آن قابل خطا و قابل بازبینی است (Lakatos, 1976: 32). در نتیجه این دیدگاه به عنوان دغدغه‌های فلسفی مشروع، شیوه‌های ریاضیدانان، تاریخچه و کاربردهای آن، جایگاه ریاضیات در فرهنگ بشری، از جمله مسائل ارزش‌ها و آموزش را در بر می‌گیرد. به طور خلاصه، چهره انسانی به ریاضیات می‌بخشد و احتمال خطا در ریاضیات را کاملاً می‌پذیرد (Davis & Hersh, 1980: 79).

لاکاتوش در مقاله خود «رنسانس تجربه‌گرایی در فلسفه ریاضیات[xxxi]» به آثار متأخر راسل، فرانکل[xxxii]، کارنپ[xxxiii]، ویل[xxxiv]، فون نویمان[xxxv]، برنایز[xxxvi]، چرچ[xxxvii]، گودل[xxxviii]، کواین[xxxix]، روسر[xl]، کری[xli]، ماستوفسکی[xlii] و کالمار[xliii] اشاره می‌کند و در واقع به فهرستی که شامل بسیاری از منطق‌دانان کلیدی قرن بیستم است، اشاره دارد و برای نشان دادن دیدگاه مشترک خود در مورد «عدم امکان قطعیت کامل» در ریاضیات در بسیاری از موارد، توافق آن‌ها مبنی بر اینکه دانش ریاضی مبنایی تجربی دارد و مستلزم رد مطلق‌گرایی است، تأکید می‌کند (Lakatos, 1978: 25). از آنجایی که دیدگاه شبه تجربی لاکاتوش مستلزم آن است که دیدگاه اثباتی برای اثبات قطعیت تمام گزاره‌های ریاضی کافی نیست و این تنها دیدگاهی است که می‌تواند به اندازه کافی برخی مفاهیم ریاضی را مدیریت کند، پس شاید خطاپذیری ریاضی دیدگاه صحیحی از ریاضیات باشد.

البته ممکن است ادعا شود که یک نظریه اقلیدسی درست است. یک نظریه شبه تجربی در بهترین حالت که به خوبی تأیید می‌شود، اما همیشه حدسی است. همچنین در یک نظریه اقلیدسی، گزاره‌های اصلی واقعی در «بالای» سیستم قیاسی (که معمولاً «بدیهیات» نامیده می‌شوند) بقیه سیستم را ثابت می‌کنند. در یک نظریه شبه تجربی، گزاره‌های اصلی (درست) توسط بقیه سیستم توضیح داده می‌شود، بنابراین ریاضیات شبه تجربی است (Ibid: 28-30).

در نتیجه اگر ریاضیات توسط انسان ساخته شده است و تجربی محسوب می‌شود، پس دارای تمام خطاپذیری و عدم قطعیتی است که انسان نیز به آن دچار است و همین دلالت کافی است. ریاضیات خارج از ذهن انسان وجود ندارد و ویژگی‌های خود را از ذهن افرادی که آن را خلق کرده‌اند، می‌گیرد. از آنجایی که ریاضیات توسط انسان ساخته

می‌شود و فقط در ذهن انسان وجود دارد، باید در ذهن هر فردی که آن را یاد می‌گیرد، ساخته یا بازسازی شود. از این نظر، ریاضیات را تنها با خلق شدن می‌توان آموخت (Wheeler, 2007: 2).

دانش ریاضی شبیه دانش تجربی است؛ یعنی معیار صدق در ریاضیات همانقدر که در فیزیک، موفقیت ایده های ما در عمل است به اثبات معادله‌های ریاضی وابسته است، بنابراین دانش ریاضی اصلاح پذیر است نه مطلق (Putnam, 1975: 51). این آموزه که دانش ریاضی پیشینی گرایی ریاضی است، به طرق مختلف در طول دوره تأمل در مورد ریاضیات بیان شده است. اما تصویری دیگری از دانش ریاضی قابل ادراک است که پیشینی گرایی ریاضی را رد می کند. جایگزین برای پیشینی گرایی ریاضی، تجربی گرایی ریاضی است. این نگرش به وضوح نشان می‌دهد که ریاضیات خطاپذیر است (Kitcher, 1984: 3–4).

در واقع توتولوژی‌ها[xliv] لزوماً درست هستند، اما ریاضیات اینطور نیست. نمی‌توان گفت که آیا بدیهیات حساب سازگار هستند یا خیر. اگر اینطور نباشد، هر قضیه خاصی از حساب ممکن است نادرست باشد. بنابراین این قضایا توتولوژی نیستند. آن‌ها همیشه آزمایشی هستند و باید همیشه باقی بمانند، در حالی که توتولوژی حقیقتی غیرقابل انکار است. ریاضی‌دان احساس می کند که مجبور است ریاضیات را به عنوان حقیقت بپذیرد، حتی اگر امروز از اعتقاد به ضرورت منطقی آن محروم باشد و محکوم به اعتراف برای همیشه به امکان متصور باشد و ممکن است کل تار و پود آن با آشکار ساختن یک تناقض قاطع با خود، ناگهان فرو بریزد (Polanyi, 1998: 187-189).

بنابراین قطعیت و خطاپذیری در ریاضیات کاملاً در مقابل یکدیگر قرار دارند. قطعیت که آرمان فلسفه‌ی مطلق گرایی است، ریاضیات را امری فراتر از ذهن انسان و اشیاء و کارکرد مفاهیم ریاضی را مطلق و قطعی تصور می کند. در مقابل خطاپذیری ریاضیات را همچون بسیاری از علوم دیگر ساخته‌ی ذهن انسان می‌داند و به آن نگرش انسانی دارد، در نتیجه از آنجا که انسان امکان خطا دارد، پس ممکن است در ادراک و خلق مفاهیم ریاضی نیز دچار اشتباه شده باشد. بنابراین بایستی در درک خود از مفاهیم ریاضی بازنگری کند.

عملکرد قیاس‌گرایی در رفع منازعه قطعیت و خطاپذیری ریاضیات

با توجه بـه تزلزلـی کـه در درک قطعیـت از نگـرش مطلـق‌گرایانـه وجـود داشـت و فلسـفه خطاپذیری نیز به صرف پذیرش خطا نمی‌توانست پایه‌ای برای درک ریاضی در زمینـه‌هـای مختلف از جمله آموزش باشد، نیاز بود ساختاری اثباتی و یقینـی در درک مفـاهیم ریاضـی پدید آید. به‌نظر احیای قیاس‌گرایی می‌توانست این مشکل را حـل کنـد. بنـابراین هـدف از به‌کارگیری قیاس‌گرایی نه در اثبات قطعیت مفاهیم ریاضی بـود، بلکـه بـا صـریح‌تـر کـردن ادعاهای واقعی خطاپذیری، سعی در نرم کردن موضع خطاپذیری داشت.

هسته‌ی اصلی خطاپذیری را دو ادعای زیر تشکیل می‌دهد:

۱) اثبات برای تضمین قطعیت دانش ریاضی کافی نیست.

۲) اثبات برای اثبات قطعی یک حقیقت ریاضی کافی نیست.

یکی از این دو ادعا در پس‌زمینه اکثر بحث‌هـای معاصـر دربـاره خطاپـذیری ریاضـی قـرار دارد، اگرچه به ندرت به صراحت بیان می‌شوند. این ادعاهـا بـه طـور کلـی باعـث نگرانـی در مورد غیرقابل اعتماد بودن شواهد است. یعنی حتی وقتی دلیلی بر گزاره‌ای وجود داشته باشـد، آن گزاره می‌تواند نادرست باشد. چنین امکانی هرگونه ایمان به قطعیت ریاضیات را تضـعیف می‌کند. اگر برهان‌ها به روشی که اخیراً پیشـنهاد شـد غیرقابـل اعتمـاد بودنـد، در آن صـورت موضعی مانند قیاس‌گرایی که برهان را در مرکز خود دارد، یقین را در ریاضیات دوباره برقرار نمی‌کرد. در عوض بررسی خطاپذیری آن را یک پدیده محدودتر نشان می‌دهد.

تصور نادرست رایج از اثبات‌های ریاضی این است که حـداقل در اصـل بایـد بـه شـکل بدیهی باشند. در حالی که قیاس‌گرایی را می‌تـوان بـا کـارکرد اثبـاتی بـه کـار بـرد و آن را «اثبات گرایی[xlv]» نامید. زیرا اثبات‌ها در ریاضیات استدلال‌های قیاسـی هسـتند کـه اسـتنتاج آن‌ها می‌تواند به همان اندازه که شکل منطقی آن‌ها به محتوای ریاضی آن‌هـا بسـتگی دارد، اثرگذار باشند. با این حال، اگرچه نمی‌خواهم قیاس‌گرایی را به ارائه بـدیهی محـدود کـنم، اما روش بدیهی مقدمه خوبی برای قیاس‌گرایی است. از نظر بدیهیات و قضایا، قیاس‌گرایـی در مورد ارزش صدق سخن نمی‌گوید. نـه بـدیهیات و نـه قضـایا بـرای قیـاس‌گرایـی ارزش صدق جداگانه‌ای ندارند. در عوض، بدیهیات از نظر فرضی درست در نظر گرفته می‌شـوند و قضایا به طور مشروط مضاعف صادق هستند، که این هم از نظر ماهیت فرضی بدیهیات و

هم از نظر شرطی شدن با بدیهیات را شامل می‌شود. البته این منجر به شکلی نه چندان واقعی از قیاس‌گرایی می‌شود. اگر بدیهیات صادق باشند، قضایا نیز صادق هستند. برای قیاس‌گرا، اگر اصلاً در سیستم مقدار صدق وجود داشته باشد، در ساختار قیاسی توزیع می‌شود، یعنی گزاره‌های شرطی که بدیهیات را با قضایا مرتبط می‌کنند، درست هستند، اگرچه اجزای مؤلفه‌ای بی‌ارزش هستند. به خاطر داشته باشید که ارائه شرطی اصل قضیه فقط برای توضیح است و این موارد، برای ساخت قیاس‌گرایی کافی نیست.

یکی دیگر از ارزش‌های قیاس‌گرایی توانایی آن در توضیح وجود نظریه‌های ریاضی متقابل ناسازگار است. برای مثال، قیاس‌گرا در توضیح پژوهش در مورد هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی هیچ مشکلی ندارد. برای قیاس‌گرا، بدیهیات هندسه نه درست است و نه نادرست. در نتیجه اثبات در تحقیقات ریاضی محور است. هر فلسفه‌ای از ریاضیات که اثبات را در ریاضیات متمرکز نمی‌کند، در ابتدا دچار کمبود است. می‌توان گفت قیاس‌گرایی با هدف اثبات یا رد یک قضیه ریاضی خود خطاپذیری ریاضی را تأیید می‌کند، اما این فرصت را ایجاد می‌کند که مفاهیم قابل اثبات ریاضی نیز درک شوند.

نتایج

با توجه به مطالعات انجام شده در ارائه هندسه نااقلیدسی و پس از آن پارادوکس نظریه مجموعه‌ها می‌توان پذیرفت که قطعیت یا مطلق‌گرایی در ریاضیات چندان پذیرفتنی نیست. همین‌ها اولین نگرش درباره‌ی خطاپذیری ریاضیات را تبیین می‌کنند. از طرفی صرف پذیرش خطا در ریاضیات بحران بی‌اعتمادی در مفاهیم ریاضی را پدید می‌آورد. بنابراین نیاز است که به این بی‌اعتمادی پاسخی داده شود تا ذهن بتواند بر عملکرد مفاهیم ریاضی تکیه کند.

در واقع قیاس‌گرایی در پی همان پاسخی است که بتواند منازعه میان قطعیت و خطاپذیری را رفع کند. از این منظر قیاس‌گرایی با رویکردی اثباتی خود را با قضایایی ریاضی مواجه می‌کند؛ اما این رویکرد اثباتی، نه در پی آن است که قطعیت یا مطلق‌گرایی مفاهیم ریاضی را ثابت کند، نه آنکه بر خطاپذیری ریاضیات صحه بگذارد. البته به صورت

ضمنی خطاپذیری ریاضیات پذیرفته می‌شود، اما قیاس‌گرایی در پی آن است که از طریق رویکرد اثباتی به قضایای ریاضی، شدت این خطاپذیری را کاهش دهد و از میان مفاهیم ریاضی، آن دسته که می‌توان به قطعیت آن یقین داشت را معین سازد. در نتیجه می‌توان گفت عملکرد قیاس‌گرایی در رفع بحران عدم قطعیت و منازعه با خطاپذیری از دیدگاه معرفت‌شناسی سرچشمه می‌گیرد که سعی دارد دانش ریاضی را مورد بررسی قرار دهد و باور به مفاهیم آن را با روشی قیاسی موجه سازد.

منابع

زاگزبسکی، لیندا (۱۳۹۷). معرفت‌شناسی. ترجمه کاوه بهبهانی. تهران: نشر نی.

Benacerraf, P., & Putnam, H. (1983). *Introduction. In P. Benacerraf and H. Putnam* (Eds.), Philosophy of mathematics: Selected readings (pp.1-38). Cambridge: Cambridge University Press.

Brouwer, L. E. J. (1983). Consciousness*, philosophy, and mathematics*. In P. Benacerraf and H. Putnam (Eds.), *Philosophy of mathematics*: Selected readings (pp. 90-96). Cambridge: Cambridge University Press.

Canadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: *Perspectives in theory and implications in practice*. Journal of Teaching and Learning, 5(1), 55-72.

Davis, P. (1972). "*Fidelity in Mathematical Discourse*: Is one and one really two?" American Mathematical Monthly, v. 79, pp. 252-263.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1980). *The Mathematical Experience*, London: Penguin.

Descartes, R. (1985) Selected Writings vol. 1, trans. Cottingham et al. Cambridge: Cambridge UP.

Einstein, A. (1954). "*Geometry and Experience*" in Ideas and Opinions pp. 254 - 268, New York: The Modern Library.

Ernest, P. (1991) *The Philosophy of Mathematics Education*, London: Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Mathematical knowledge and context*. In A. Watson (Ed.), Situated cognition and the learning of mathematics (pp. 13-31). Oxford: Center for Mathematics Education Research.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: *A theoretical framework for analogy*. Cognitive Science, 7(2), 155-170.

Giaquinto, M. (2002). The search for certainty: *A philosophical account of foundations of mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Grattan-Guinness, I. (2000). *The search for mathematical roots*, 1870-1940: Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Greiffenhagen, C. and W. Sharrock (2011). *Does mathematics look certain in the front, but fallible in the back?* Studies of Science 41 (6), 839-866.

Haaparanta, L. (1992). The analogy theory of thinking. Dialectica, 46(2), 169-183.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* London: Jonathan Cape.

Heyting, A. (1983). *The intuitionistic foundations of mathematics*. In Benacerraf, P., & Putnam, H. (Eds.), Philosophy of mathematics (pp.52-61). Cambridge: Cambridge University Press.

Hilbert, D. (1983). On the infinite. In Benacerraf, P., & Putnam, H. (Eds.), *Philosophy of mathematics* (pp.183-201). Cambridge: Cambridge University Press.

Hume, D. (1993), An Enquiry Concerning Human Understanding, New York: Hackett.

Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (1997). Distributed representations of structure: *A theory of analogical access and mapping. Psychological Review*, 104(3), 427.
Kitcher, P. (1984) *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York, Oxford University Press.
Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty*. New York: Oxford University Press.
Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations, Cambridge*: Cambridge University Press.
Lakatos, I. (1978) *Mathematics, Science and Epistemology* (Philosphical Papers Vol 2), Cambridge, Cambridge University Press.
Musgrave, A. (1977). "*Logicism Revisited*," Brit. J. Phil. Sci., 28, pp. 99-128.
Ouvrier-Buffet C. (2015). *A model of mathematicians' approach to the defining processes*. In Krainer K, Vondrová N. (Eds.), Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9) (pp. 2214–2220). Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
Polanyi, M. (1998) *Personal Knowledge*, London, Routledge & Kegan Paul.
Putnam, H. (1975) *Mathematics, Matter and Method* (Philosophical Papers Vol. 1), Cambridge, Cambridge University Press.
Ramsey, F.P. (2013). The foundations of mathematics and other logical essays. London: Kegan Paul.
Rayo, A. (2005). *Logicism reconsidered. In Shapiro*, S. (Ed.), The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic (pp. 203-235). Oxford: Oxford University Press.
Resnik, M. (1980), *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Ithaca: Cornell UP.
Rosenthall, P. (1996). *The Nature of Mathematics and Teaching* Paul Ernest, University of Exeter, UK.
Russell, B. (1969). *The autobiography of Bertrand Russell*, vol.3. London: Allen & Unwin.
Shapiro, S. (2007). The objectivity of mathematics, Synthese, 156(2), 337-381.
Van Es, A. (2001). "The evolution of mathematical concepts An essay on analogy in mathematics"
Wheeler, D. H. (2007). *Notes on Mathematics in Primary Schools*, Cambridge, Cambridge University Press.
Zach, R. (2006). *Hilbert's program then and now*. In D. Jacquette (Ed.), Philosophy of logic, (pp. 411-447). Handbook of the philosophy of science, vol. 5. Amsterdam: Elsevier.

پی‌نوشت

[i] Ian J. Dove
[ii] Andr´e van Es
[iii] David M. Davison
[iv] Johanna E. Mitchell
[v] Fallibility
[vi] János Bolyai
[vii] Nikolai Lobachevsky
[viii] Non-Euclidean geometry
[ix] Paradoxes of set theory
[x] Bertrand Russell
[xi] Logicism
[xii] Formalism
[xiii] Intuitionism
[xiv] Certainty
[xv] Deductivism
[xvi] Ontology
[xvii] Epistemology
[xviii] Aristotle
[xix] Thomas Aquinas
[xx] Cardinal Cajetan
[xxi] Analogia entis
[xxii] Analogia nominum
[xxiii] Analogia rationis
[xxiv] Axiom
[xxv] Lucie OUVRIER-BUFFET
[xxvi] Martín-Molina
[xxvii] GonzálezRegaña
[xxviii] Gavilán-Izquierdo
[xxix] Hilbert
[xxx] Nominalism
[xxxi] A renaissance of empiricism in the philosophy of mathematics
[xxxii] Fraenkel
[xxxiii] Carnap
[xxxiv] Weyl
[xxxv] Von Neumann
[xxxvi] Bernays
[xxxvii] Church
[xxxviii] Godel

[xxxix] Quine
[xl] Rosser
[xli] Curry
[xlii] Mostowski
[xliii] Kalmar
[xliv] Tautology؛ «همان‌گویی» در معنی‌شناسی، یکی از روابط مفهومی در سطح جمله است که در اصل کاربرد حشو درون جمله به حساب می‌آید.
[xlv] Positivism