

روشی جامع برای طراحی کنترل کننده PID درجه کسری

مرضیه صفایی^(۱) - سعید حسین نیا^(۲) - مجتبی حسینی تودشکی^(۳)

(۱) کارشناس ارشد - دانشکده برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد

(۲) استادیار - دانشکده برق، دانشگاه صنعتی اصفهان

(۳) استادیار - دانشگاه جامع علمی- کاربردی

تاریخ دریافت: بهار ۱۳۹۱ تاریخ پذیرش: زمستان ۱۳۹۱

خلاصه: با کاربردی شدن محاسبات درجه کسری و پذیرفتن آن به عنوان یک ابزار محاسباتی قوی، ایده استفاده از این نوع محاسبات در کنترل شکل گرفت. نتیجه این تلاش‌ها برای وارد کردن محاسبات درجه کسری منجر به ارائه نسل جدید کنترل کننده‌های PID با عنوان کنترل کننده درجه کسری $PI^{\lambda}D^{\mu}$ شد، کنترل کننده‌هایی با انعطاف پذیری بالاتر، پاسخ بهتر و ناحیه پایداری بزرگتر نسبت به کنترل کننده‌های PID. اما طراحی و تحلیل پایداری این کنترل کننده‌ها از پیچیدگی خاصی برخوردار است. در این مقاله روشی مطمئن و ساده برای یافتن مجموعه کنترل کننده‌های $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ارائه شده است. محاسبات در حوزه فرکانس و بر اساس پاسخ فرکانسی فرآیند صورت می‌پذیرد و ناحیه پایدار با ترسیم مرزهای پایداری در فضای پارامترهای کنترل کننده مشخص می‌شود. استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم در طراحی، توانایی یافتن مجموعه کنترل کننده‌های درجه کسری را برای دسته وسیعی از سیستم‌ها از جمله سیستم‌های تاخیردار و سیستم‌هایی که فاقد تابع تبدیل دقیقی هستند، مهیا می‌سازد. همچنین با بررسی فضای پایدار حاصل می‌توان مجموعه کنترل کننده‌هایی که حد بهره و حد فاز مشخصی را تامین می‌کنند، به دست آورد.

کلمات کلیدی: محاسبات درجه کسری، کنترل کننده درجه کسری $PI^{\lambda}D^{\mu}$.

۱- مقدمه

سبب شده این کنترل کننده با وجود قدمت و ضعف‌هایش هنوز هم به عنوان کنترل کننده پرکاربرد در صنعت به کار گرفته شود، اما برای این که این کنترل کننده بتواند با انواع کنترل کننده‌های مدرن رقابت کند، باید بتوان آن را ارتقا داد [۲].

یکی از روش‌های پیشنهاد شده برای ارتقای کنترل کننده PID وارد کردن محاسبات درجه کسری به آن بود، یعنی تغییر درجه مشتقگیر و انتگرالگیر به اعداد غیر صحیح و تبدیل آن به فرم $PI^{\lambda}D^{\mu}$. این پیشنهاد در سال ۱۹۹۹ توسط Poudlubny ارائه شد [۳]. این کنترل کننده نسبت به کنترل کننده کلاسیک دارای دو درجه آزادی λ و μ است که سبب ایجاد ناحیه پایداری بزرگتری نسبت به کنترل کننده کلاسیک برای یک فرآیند می‌شود، همچنین به طراح این امکان را می‌دهد تا با آزادی عمل بیشتری پارامترهای کنترل کننده را برای رسیدن به پاسخ مطلوب، تنظیم نماید [۲].

برای طراحی کنترل کننده درجه کسری $PI^{\lambda}D^{\mu}$ روش‌های متعددی وجود دارد. برخی از این روش‌ها مبتنی بر الگوریتم‌های هوشمند

ایده محاسبات درجه کسری همزمان با محاسبات درجه صحیح (محاسبات رایج) از ۳۰۰ سال پیش شکل گرفت. اما پیچیدگی ذاتی روابط تحلیلی محاسبات درجه کسری، فقدان تعبیر هندسی و فیزیکی مناسب، سبب شد این محاسبات بیشتر به عنوان یک مبحث ریاضی محض در نظر گرفته شود. در دو دهه اخیر محققان نشان دادند که با استفاده از این محاسبات می‌توان پدیده‌های فیزیکی دارای حافظه، سیستم‌های غیرخطی و با دینامیک پیچیده را به شکل خلاصه، دقیق و بهتر نسبت به محاسبات درجه صحیح توصیف کرد. اکنون این محاسبات به عنوان ابزاری قوی و قابل اعتماد در زمینه‌های مختلف مانند بیومهندسی، الکترونیک، رباتیک، پردازش سیگنال، شناسایی سیستم و کنترل به کار گرفته می‌شود [۱].

همانگونه که می‌دانیم کنترل کننده PID ابزاری استاندارد و انعطاف پذیر در اتوماسیون صنعتی محسوب می‌شود. سادگی ساختار، قابل فهم بودن، طراحی و نصب راحت از جمله ویژگی‌هایی است که

سیستم‌های تاخیردار و سیستم‌های درجه غیرصحیح بهره برد. اما روش دوم در بعضی موارد نسبت به روش اول ناحیه پایداری جامعی را ارائه نمی‌دهد و این به خاطر عدم بررسی فرکانس بی‌نهایت در روابط بین پارامترهای کنترل کننده است که در بعضی از موارد سبب محدودیت در مقدار پارامتر می‌شود. همچنین در این مرجع، الگوریتمی برای یافتن مجموعه کنترل کننده‌های درجه کسری ارائه نشده است.

در این مقاله سعی بر این است که با تلفیق دو روش، روشی کارا، ساده و قابل اعتماد ارائه دهیم که هم کلیت و دقت روش اول را داشته باشد و هم سادگی و عمومیت روش دوم. با استفاده از این روش می‌توان مجموعه کنترل کننده‌های PID پایدارساز را برای هر سیستم دلخواه به دست آورد. همچنین می‌توان مقادیر λ و μ که ناحیه پایداری بزرگتری را ایجاد می‌کنند، به دست آورد و ناحیه پایداری را در فضای پارامترهای کنترل کننده (k_p, k_i, k_d) ترسیم کرد.

ساختار مقاله به شرح زیر می‌باشد. در قسمت ۲ به طور مختصر محاسبات درجه کسری معرفی می‌شود. در قسمت ۳ کلیاتی در مورد کنترل کننده $PI^\lambda D^\mu$ ارائه می‌شود و این کنترل کننده با کنترل کننده PID مقایسه می‌گردد. در قسمت ۴ الگوریتم طراحی کنترل کننده $PI^\lambda D^\mu$ ارائه شده است. در قسمت ۵ روش پیشنهادی بر روی یک مثال کاربردی پیاده شده است. پیاده سازی با استفاده از نرم افزار MATLAB جعبه ابزار OOCRONE صورت پذیرفته است [۱۱]. در پایان روش پیشنهادی در قسمت ۶ مورد ارزیابی و بررسی قرار می‌گیرد.

۲- محاسبات درجه کسری

محاسبات درجه کسری شامل محاسبه انتگرال و مشتق با درجه غیر صحیح است. این محاسبات حاصل تعمیم اپراتور مشتق و انتگرال درجه صحیح ${}_a D_t^\alpha f(t)$ است که a, t حدود اپراتور و $r \in \mathbb{R}$ درجه اپراتور است. اپراتور مشتق/انتگرالگیر ${}_a D_t^\alpha f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲].

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^r}{dt^r} & r > 0 \\ 1 & r = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-r} & r < 0 \end{cases} \quad (1)$$

برای محاسبه مشتق و انتگرال درجه کسری چهار تعریف ارائه شده است. طراح بر حسب کاربرد و خصوصیات هر یک از تعاریف، از بین تعاریف ارائه شده یک تعریف را انتخاب می‌کند [۱۳]. در این مقاله برای آشنایی با نحوه محاسبه مشتق و انتگرال درجه کسری تنها یک تعریف آورده شده است، تعریف Caputo به صورت زیر می‌باشد:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{r-n+1}} d\tau \quad (2)$$

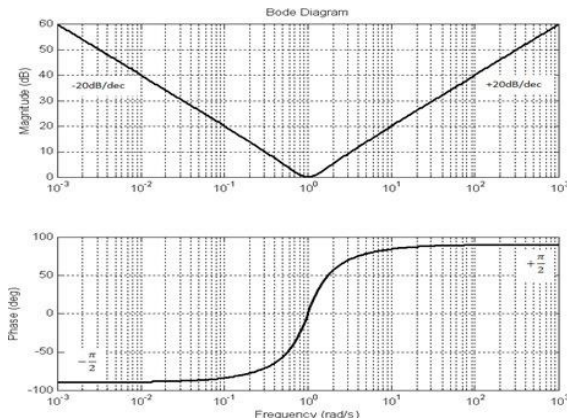
که در آن $n-1 < r < n$ و n یک عدد صحیح مثبت است. وجود توان منفی زمان در رابطه (۲) بیانگر این است که این روابط ذاتاً دارای حافظه هستند و این مهمترین نقطه قوت محاسبات درجه

هستند [۴]. در اکثر مراجع مبتنی بر الگوریتم‌های هوشمند برای به دست آوردن مشخصه‌های مورد نیاز تابع هدف، از تقریب درجه صحیح تابع تبدیل درجه کسری استفاده شده است. برخی دیگر از روش‌های طراحی مبتنی بر تعمیم تکنیک‌های طراحی کنترل کننده کلاسیک (PID) هستند. از میان روش‌های ارائه شده برای یافتن مجموعه کنترل کننده‌های کلاسیک تنها دو روش وجود دارد که می‌توان با تعمیم آنها مجموعه کنترل کننده‌های درجه کسری را یافت. در روش اول با استفاده از تابع تبدیل فرآیند و رسم مرز پایداری در فضای پارامترها می‌توان ناحیه پایدار را به دست آورد. این مرزها عبارتند از مرز ریشه حقیقی، مرز ریشه مختلط و مرز ریشه بی‌نهایت. با ترسیم همزمان این خطوط در فضای پارامترهای کنترل کننده و بررسی وضعیت پایداری نقاط محصور در نواحی به دست آمده حاصل از رسم همزمان مرز ریشه‌ها، ناحیه پایدار مشخص می‌شود [۵]. این روش قابل تعمیم به محاسبات درجه کسری است. بر این اساس الگوریتمی برای یافتن نواحی پایدار ساز کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$ و برای سیستم‌های درجه صحیح و درجه کسری ارائه گردید. با استفاده از این الگوریتم ابتدا برای مقادیر λ و μ مشخص، ناحیه پایدار در فضای پارامترهای کنترل کننده درجه کسری به دست می‌آید. واضح است که مقدار λ و μ بر وسعت ناحیه پایداری تأثیر بسزایی دارد، مراحل الگوریتم به گونه‌ای طراحی شده است که می‌توان مقادیر λ و μ که ناحیه پایداری بزرگتری را ایجاد می‌کنند، به دست آورد [۶]. با این روش می‌توان مجموعه کنترل کننده‌های PID درجه کسری برای سیستم‌های تاخیردار را نیز به دست آورد، اما روابط سیستم‌های تاخیر دار به مراتب پیچیده‌تر از روابط مرجع [۶] می‌شود [۷].

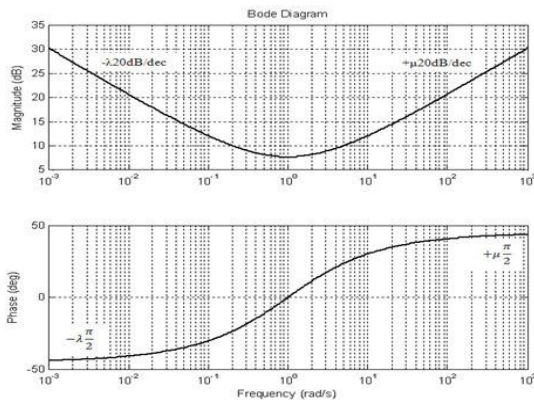
روش دیگری که برای یافتن مجموعه کنترل کننده‌های PID پایدارساز ارائه شده است، بر پایه استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم است. در این روش ناحیه پایدار بر اساس یافتن مقادیری از پارامترها صورت می‌گیرد که سبب پایداری مرزی معادله حلقه بسته سیستم در حوزه فرکانس می‌شود. مزیت استفاده از پاسخ فرکانسی فرآیند این است که از این روش می‌توان برای دسته وسیعی از سیستم‌ها از جمله سیستم‌های تاخیردار بهره برد. ناحیه پایدار در فضای پارامترهای کنترل کننده (k_p, k_i) و (k_p, k_d) و (k_i, k_d) رسم شده است [۸]. پس از ارائه این روش نیز مقالات بسیاری برای یافتن نواحی با خصوصیات دیگری چون تامین رفتار مقاوم ارائه شد [۹]. این روش قابل تعمیم به محاسبات درجه کسری است. با استفاده از این روش برای مقادیر مشخص λ و μ ، ناحیه پایدار برای سیستم تاخیردار در فضای پارامترهای کنترل کننده درجه کسری ترسیم شده است [۱۰].

با مقایسه دو روش می‌توان گفت روش اول (روش ارائه شده در مرجع [۶]) مطمئن اما دارای محاسبات بسیار پیچیده‌ای است. همچنین برای به دست آوردن روابط بین پارامترها به تابع تبدیل دقیق فرآیند نیاز است. در حالی که روش دوم (روش ارائه شده در مرجع [۱۰]) دارای محاسبات ساده‌تری است و به علت انجام محاسبات بر اساس پاسخ فرکانسی، می‌توان از این روش برای دسته وسیعی از سیستم‌ها از جمله

$PI^\lambda D^\mu$ نسبت به کنترل کننده PID، می توان دیگرام بد این دو کنترل کننده را با هم مقایسه کرد. دیگرام بد کنترل کننده PID با ضرایب $k_p = k_i = k_d = 1$ در شکل (۲) رسم شده است. دیگرام بد کنترل کننده $PI^\lambda D^\mu$ برای مقادیر $0.5 = \lambda = \mu$ در شکل (۳) رسم شده است [۱].



شکل (۲): دیگرام بد کنترل کننده PID
Fig. (2): PID controller of Bode diagram



شکل (۳): دیگرام بد کنترل کننده $PI^\lambda D^\mu$
Fig. (3): Fractional order of PID controller Bode diagram

با توجه به شکل (۲) و (۳) می توان گفت تغییر مقدار λ و μ در تغییر اندازه شیب و فاز کنترل کننده در فرکانس های پایین و بالا تاثیر بسزایی دارد. تفاوت این دو کنترل کننده به طور خلاصه در جدول (۱) آمده است.

Table (1): Comparison of PID controller and Fractional Order PID controller

| $PI^\lambda D^\mu$ | PID | مشخصه |
|-------------------------|------------------|----------------------------|
| -20λ dB/dec | -20 dB/dec | شیب دامنه در فرکانس پایین |
| $+20\mu$ dB/dec | $+20$ dB/dec | شیب دامنه در فرکانس بالا |
| $-\frac{\lambda\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | اندازه فاز در فرکانس پایین |
| $+\frac{\mu\pi}{2}$ | $+\frac{\pi}{2}$ | اندازه فاز در فرکانس بالا |

کسری نسبت به محاسبات رایج است. همین ویژگی است که سبب توصیف دقیق تر و بهتر پدیده های فیزیکی و فرآیندها می شود [۱۲]. همانگونه که می دانیم معمولاً برای تحلیل رفتار دینامیکی سیستم از تابع تبدیل سیستم استفاده می شود، بنابراین دانستن تبدیل لاپلاس مشتق درجه کسری ضروری می باشد. یکی از مزیت های محاسبات درجه کسری این است که تعریف لاپلاس آن تقریباً مشابه تبدیل لاپلاس محاسبات درجه صحیح است. تبدیل لاپلاس مشتق درجه کسری به صورت زیر می باشد:

$$L\left\{\frac{d^r f(t)}{dt^r}\right\} = s^r F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j \left[\frac{d^{r-1-j} f(t)}{dt^{r-1-j}}\right]_{t=0}, n-1 < r < n \quad (۳)$$

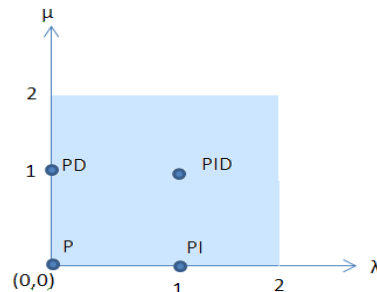
در صورتی که شرایط اولیه برابر صفر باشد، تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال درجه کسری مشابه تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال درجه صحیح با شرایط اولیه صفر خواهد بود [۱۲]. بسیاری از روابط و قوانین موجود در محاسبات رایج، در محاسبات درجه کسری نیز صادق است. از این رو می توان گفت محاسبات درجه صحیح زیرمجموعه ای از محاسبات درجه کسری است.

۳- کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$

تابع تبدیل کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$ به فرم زیر می باشد.

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu, 0 < \lambda, \mu < 2 \quad (۴)$$

کنترل کننده $PI^\lambda D^\mu$ را می توان تعمیم کنترل کننده PID در نظر گرفت. به ازای مقادیر $\lambda = \mu = 1$ ، کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$ به کنترل کننده PID تبدیل می شود. در شکل (۱) فضای کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$ بر اساس درجه های λ و μ ترسیم شده است. همچنین در این شکل حالت های خاص λ و μ که منجر به ایجاد کنترل کننده های کلاسیک می شوند، مشخص شده است.

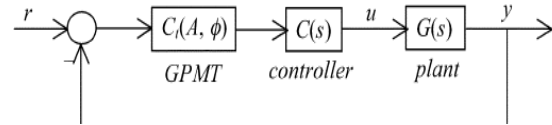


شکل (۱): فضای کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$
Fig. (1): Fractional order of PID controller's space

وجود دو درجه آزادی λ و μ در کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$ به آن ویژگی های ممتازی افزوده است و آن را به کنترل کننده ای با انعطاف پذیری بالاتر بخصوص در تامین حد فاز و حد بهره مطلوب، پاسخ بهتر و ناحیه پایداری بزرگتر نسبت به کنترل کننده PID تبدیل کرده است. برای درک بهتر انعطاف پذیری و قابلیت های کنترل کننده

۴- طراحی کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$

سیستم کنترل درجه کسری یک ورودی- یک خروجی فیدبک واحد را مطابق شکل (۴) در نظر بگیرید.



شکل (۴): ساختار کنترل کننده درجه کسری SISO

Fig. (4): A SISO fractional order control system structure

$G(s)$ تابع تبدیل فرآیند با پاسخ فرکانسی به فرم زیر می باشد.

$$G(j\omega) = R_p(\omega) + jI_p(\omega) \quad (5)$$

$C(s)$ کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$ است، پاسخ فرکانسی کنترل کننده به صورت زیر می باشد.

$$C(j\omega) = k_p + \frac{k_i}{(j\omega)^\lambda} + k_d(j\omega)^\mu = k_p + \quad (6)$$

$$\frac{k_i}{\omega^\lambda} \left\{ \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \right\} + k_d \omega^\mu \left\{ \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \right\}$$

معمولاً برای تامین حد فاز و بهره از تستر حد فاز و بهره $GPMPT^1$ استفاده می شود که می توان آن به عنوان یک جبرانساز مجازی در نظر گرفت. $C_1(A, \phi)$ دارای تابع تبدیل مستقل از فرکانس است و دارای تابع تبدیلی به فرم زیر می باشد [۷].

$$C_1(A, \phi) = Ae^{-i\phi} \quad (7)$$

برای دستیابی به حد فاز و حد بهره مطلوب، کافی است مقادیر تابع تبدیل $C_1(A, \phi)$ به مقادیر دلخواه تغییر یابد. به منظور بررسی پایداری داخلی سیستم حلقه بسته ابتدا باید $\phi = 0$ و $A = 1$ در نظر گرفته شود.

برای مشخص کردن مجموعه کنترل کننده های درجه کسری پایدارساز باید مقادیری از پارامترهای $\lambda, \mu, k_d, k_i, k_p$ را یافت که سبب پایداری سیستم حلقه بسته شوند. به عبارت دیگر به ازای این مقادیر باید همه ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، سمت چپ محور $j\omega$ قرار گیرند. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته در حوزه فرکانس به صورت زیر می باشد [۱۰].

$$\Delta(j\omega) = R_\Delta(\omega) + jI_\Delta(\omega)$$

$$R_\Delta(\omega) = 1 + k_p R_p(\omega) + \frac{k_i}{\omega^\lambda} \left\{ \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) R_p(\omega) + \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) I_p(\omega) \right\} + k_d \omega^\mu \left\{ \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) R_p(\omega) - \sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) I_p(\omega) \right\} \quad (8)$$

$$I_\Delta(\omega) = k_p I_p(\omega) + \frac{k_i}{\omega^\lambda} \left\{ \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) I_p(\omega) - \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) R_p(\omega) \right\}$$

$$+ k_d \omega^\mu \left\{ \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) I_p(\omega) + \sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) R_p(\omega) \right\}$$

واضح است که با تغییر پارامترهای کنترل کننده محل ریشه های معادله مشخصه تغییر می کند. زمانی که ضرایب به صورت پیوسته تغییر کنند، تغییر ناگهانی در محل ریشه ها رخ نخواهد داد. از این خصوصیت می توان برای یافتن محدوده پارامترها استفاده کرد زیرا زمانی یک چندجمله ای پایدار، ناپایدار می شود که تغییر ضرایب سبب شود حداقل مکان یک ریشه از ناحیه پایدار (سمت چپ محور $j\omega$) به ناحیه ناپایدار (سمت راست محور $j\omega$) جابجا شود. این اتفاق زمانی رخ می دهد که حداقل یک ریشه محور موهومی را قطع کند [۵]. بنابراین با یافتن مقادیری از پارامترها که سبب صفر شدن معادله مشخصه در محور موهومی می شوند، می توان مرز پایداری را یافت. در سه وضعیت ممکن است ریشه ها محور موهومی را قطع کنند. این سه وضعیت عبارتند از:

$$\Delta(\omega = 0, k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu) = 0$$

۱- مرز ریشه حقیقی (RRB^2): ممکن است یک ریشه حقیقی محور موهومی را در مبدا قطع کند، یعنی

$$\Delta(j\omega|_{\omega \rightarrow \infty}, k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu) = 0$$

۲- مرز ریشه مختلط (CRB^3): ممکن است ریشه های مختلط محور موهومی را قطع کنند، یعنی

$$\Delta(\omega = \infty, k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu) = 0$$

۳- مرز ریشه بی نهایت (IRB^4): ممکن است یک ریشه محور موهومی را در بی نهایت قطع کند، یعنی

با ترسیم همزمان مرزهای ریشه ها، فضای پارامترها به چندین ناحیه افزای می شود. برای تعیین ناحیه پایدار کافی است از هر ناحیه، یک نقطه به دلخواه انتخاب کرده و وضعیت آن را از لحاظ پایداری بررسی کنیم. در صورتی که نقطه انتخاب شده سبب پایداری سیستم حلقه بسته شود، تمامی نقاط محصور در آن ناحیه نیز پایدار هستند، در غیر این صورت ناحیه ناپایدار است. برای تست پایداری از روش ارایه شده در مرجع [۱۴] به کار برده شده است.

با توجه به معادله مشخصه حلقه بسته و تعاریف مرزها، محدوده پارامترها را می توان به دست آورد.

مرز ریشه حقیقی با جایگذاری $\omega = 0$ در معادله مشخصه به دست می آید و به صورت زیر می باشد.

$$k_i = \begin{cases} 0 & , R_p(0) \neq 0 \\ \text{none} & , R_p(0) = I_p(0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

برای به دست آوردن مرز ریشه مختلط، قسمت حقیقی و موهومی معادله مشخصه باید همزمان برابر صفر قرار گیرند. از برابر صفر قرار گرفتن همزمان قسمت حقیقی و موهومی معادله مشخصه، معادلات زیر حاصل می شود [۱۰].

$$\begin{cases} \omega^\mu R_p(\omega) k_p + X_{Ri} k_i + X_{Rd} k_d = -\omega^\mu \\ \omega^\mu I_p(\omega) k_p + X_{Ii} k_i + X_{Id} k_d = 0 \end{cases} \quad (10)$$

روابط ضرایب معادلات به صورت روابط (۱۱) می باشند.

$$k_p = -k_d \omega^\mu \frac{\sin(\frac{(\mu+\lambda)\pi}{2})}{\sin(\frac{\lambda\pi}{2})} - \frac{R_p(\omega) - \cot(\frac{\lambda\pi}{2})I_p(\omega)}{|G_p(j\omega)|^2} \quad (15)$$

$$k_i = -k_d \omega^{\mu+\lambda} \frac{\sin(\frac{\mu\pi}{2})}{\sin(\frac{\lambda\pi}{2})} - \frac{\omega^\lambda I_p(\omega)}{\sin(\frac{\lambda\pi}{2})|G_p(j\omega)|^2}$$

برای k_i ثابت و $\omega \neq 0$ ، روابط k_p و k_d به صورت زیر می‌باشد.

$$k_p = -k_i \frac{\sin(\frac{(\mu+\lambda)\pi}{2})}{\omega^\lambda \sin(\frac{\mu\pi}{2})} - \frac{R_p(\omega) - \cot(\frac{\lambda\pi}{2})I_p(\omega)}{|G_p(j\omega)|^2} \quad (16)$$

$$k_d = k_i \frac{\sin(\frac{\lambda\pi}{2})}{\omega^{\lambda+\mu} \sin(\frac{\mu\pi}{2})} + \frac{I_p(\omega)}{\omega^\mu \sin(\frac{\mu\pi}{2})|G_p(j\omega)|^2}$$

مرز ریشه بی‌نهایت زمانی رخ می‌دهد که ریشه‌های سمت چپ محور موهومی را در بی‌نهایت ترک کند. در روش اول مرز ریشه بی‌نهایت با برابر صفر قرار دادن ضریب بزرگترین درجه معادله مشخصه حلقه بسته در فضای لاپلاس با توجه به تابع تبدیل فرآیند قابل محاسبه است. اما در روش دوم که بر اساس پاسخ فرکانسی فرآیند صورت می‌گیرد، این فرکانس مورد بررسی قرار نگرفته است. عدم بررسی این حالت سبب نقص در به دست آوردن ناحیه پایدار می‌شود. روش پیشنهادی بر اساس پاسخ فرکانسی فرآیند صورت می‌پذیرد، پس نمی‌توان از روابط روش اول برای یافتن مرز ریشه بی‌نهایت بهره برد. بنابراین برای به دست آوردن مرز ریشه بی‌نهایت نیاز به تعریف رابطه‌ای بر حسب پاسخ فرکانسی فرآیند می‌باشد.

با توجه به تعریف مرز ریشه بی‌نهایت می‌توان به رابطه مورد نظر دست یافت. منظور از مرز ریشه بی‌نهایت ریشه‌ای است که محور موهومی را در بی‌نهایت قطع کند. چون ریشه محور موهومی را قطع می‌کند، بنابراین باید بخش حقیقی معادله مشخصه برابر صفر باشد. در ضمن این اتفاق در فرکانس بی‌نهایت (فرکانس‌های بالا) رخ می‌دهد. با برابر صفر قرار دادن قسمت حقیقی معادله مشخصه و ساده کردن عبارت‌هایی که به ازای فرکانس بسیار بزرگ برابر صفر می‌شوند، رابطه (۱۷) حاصل می‌گردد.

$$k_d = \frac{-1}{\omega^\mu \left\{ \cos(\frac{\mu\pi}{2}).R_p(\omega) - \sin(\frac{\mu\pi}{2}).I_p(\omega) \right\}} \quad (17)$$

مرز ریشه بی‌نهایت با در نظر گرفتن مقدار بزرگ برای ω و مقدار مشخص μ قابل محاسبه است.

۴-۱- الگوریتم طراحی کنترل کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$

در این بخش با استفاده از نتایج فوق و با استفاده از الگوریتم موجود در مرجع [۶]، الگوریتمی برای یافتن مجموعه کنترل کننده‌های درجه

$$X_{Ri} = \cos(\frac{\lambda\pi}{2}).R_p(\omega) + \sin(\frac{\lambda\pi}{2}).I_p(\omega)$$

$$X_{Rd} = \omega^{\mu+\lambda} \left\{ \cos(\frac{\mu\pi}{2}).R_p(\omega) - \sin(\frac{\mu\pi}{2}).I_p(\omega) \right\} \quad (11)$$

$$X_{Ii} = \cos(\frac{\lambda\pi}{2}).I_p(\omega) - \sin(\frac{\lambda\pi}{2}).R_p(\omega)$$

$$X_{Id} = \omega^{\mu+\lambda} \left\{ \cos(\frac{\mu\pi}{2}).I_p(\omega) + \sin(\frac{\mu\pi}{2}).R_p(\omega) \right\}$$

با توجه به تعداد معادلات و تعداد مجهولات برای حل دستگاه معادلات باید یکی از پارامترها را ثابت در نظر گرفت. بنابراین پاسخ را می‌توان به سه فرم، در صفحه (k_p, k_d) برای k_i ثابت، در صفحه (k_p, k_i) برای k_d ثابت و در صفحه (k_i, k_d) برای k_p ثابت به دست آورد. با حل معادلات (۱۰) برای k_p ثابت دو حالت رخ خواهد داد. حالت اول: در صورتی که $\lambda + \mu \neq 2$ باشد و به ازای فرکانس $\omega \neq 0$ ، روابط (k_i, k_d) به صورت زیر خواهند بود.

$$k_i = -k_p \omega^\lambda \frac{\sin(\frac{\mu\pi}{2})}{\sin(\frac{(\mu+\lambda)\pi}{2})} - \frac{\omega^\lambda \left(\sin(\frac{\mu\pi}{2}).R_p(\omega) + \cos(\frac{\mu\pi}{2}).I_p(\omega) \right)}{\sin(\frac{(\mu+\lambda)\pi}{2})|G_p(j\omega)|^2}$$

$$k_d = -\frac{k_p \sin(\frac{\lambda\pi}{2})}{\omega^\mu \sin(\frac{(\mu+\lambda)\pi}{2})} - \frac{\sin(\frac{\lambda\pi}{2}).R_p(\omega) - \cos(\frac{\lambda\pi}{2}).I_p(\omega)}{\omega^\mu \sin(\frac{(\mu+\lambda)\pi}{2})|G_p(j\omega)|^2}$$

$$|G_p(j\omega)|^2 = R_p^2(\omega) + I_p^2(\omega) \quad (12)$$

حالت دوم: در صورتی که مقدار $\lambda + \mu = 2$ باشد، برای هر فرکانس ω_i که در شرط

$$k_p = \frac{\cot(\frac{\lambda\pi}{2}).I_p(\omega_i) - R_p(\omega_i)}{|G_p(j\omega_i)|^2} \quad (13)$$

صدق کند، رابطه بین پارامترها به صورت معادله یک خط راست خواهد بود و معادله آن به صورت زیر می‌باشد.

$$k_d = \frac{\sin(\frac{\lambda\pi}{2}).R_p(\omega_i) - \cos(\frac{\lambda\pi}{2}).I_p(\omega_i)}{\omega_i^{\mu+\lambda} \left(\sin(\frac{\mu\pi}{2}).R_p(\omega_i) + \cos(\frac{\mu\pi}{2}).I_p(\omega_i) \right)} \quad (14)$$

$$\times \left(k_i + \frac{\omega_i^\lambda I_p(\omega_i)}{\sin(\frac{\lambda\pi}{2})|G_p(j\omega_i)|^2} \right)$$

برای k_d ثابت و $\omega \neq 0$ ، روابط k_p و k_i به صورت روابط (۱۵) می‌باشد.

$$G(s) = \frac{T(s)}{\Psi(s)} = \frac{-0.0781 s^{0.5} + 0.1271}{3.0641 s^{1.5} + 0.0305 s + s^{0.5}}$$

با توجه به تابع تبدیل فرآیند دارای یک صفر سمت راست است بنابراین یک سیستم غیر مینیمم فاز است.

ابتدا پاسخ فرکانسی فرآیند را در بازه فرکانسی دلخواه به دست آورده و جواب را به دو بخش حقیقی و موهومی تجزیه می‌کنیم. برای λ ، μ و k_p مقادیر ثابت و دلخواه انتخاب کرده و منحنی CRB را به دست می‌آوریم. فرض کنید $k_p = 100$ و $\lambda = \mu = 1$ (کنترل‌کننده PID) باشد. (مقادیر را مشابه مرجع [۶] انتخاب شده‌است تا بتوان نتایج به دست آمده را مقایسه کرد.)

با توجه به رابطه (۱۴) منحنی CRB به صورت زیر می‌باشد.

$$k_d = 0.2332k_i + 4.1716$$

با توجه به رابطه (۹) منحنی RRB به صورت زیر می‌باشد.

$$k_i = 0$$

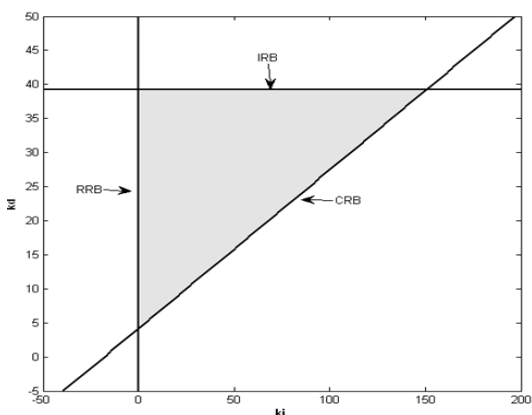
منحنی IRB را با توجه به رابطه (۱۷) و با در نظر گرفتن مقدار بزرگ برای فرکانس می‌توان به دست آورد.

$$k_{dinf} = 39.233$$

با توجه به مجموع λ و μ برای به دست آوردن منحنی CRB از روابط (۱۳) و (۱۴) استفاده می‌کنیم. ابتدا باید فرکانسی را که در رابطه (۱۳) صدق می‌کند، به دست آوریم.

$$100 = \frac{\cot\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \cdot I_p(\omega_i) - R_p(\omega_i)}{|G_p(j\omega_i)|^2} \Rightarrow \omega_i = 2.071$$

با رسم همزمان این منحنی‌ها در فضای (k_i, k_d) نمودار شکل (۵) حاصل می‌شود. برای یافتن ناحیه پایدار، یک نقطه دلخواه از نواحی به دست آمده را انتخاب می‌کنیم و وضعیت پایداری آن نقطه را بررسی می‌کنیم. در شکل (۵) ناحیه پایدار با سایه مشخص شده‌است.



شکل (۵): ناحیه پایدار در صفحه (k_i, k_d) برای مقادیر $\lambda = \mu = 1$ و $k_p = 100$

Fig. (5): The stability region in the (k_i, k_d) plane for $k_p = 100$, $\lambda = \mu = 1$

کسری پایدارساز که حد فاز و حد بهره مشخصی را تامین می‌کنند، ارایه می‌گردد.

برای یافتن مجموعه کنترل‌کننده‌های $PI^\lambda D^\mu$ پایدارساز ابتدا مقادیر $A=1$ و $\Phi=0$ در نظر می‌گیریم. مراحل الگوریتم به صورت زیر می‌باشد.

گام اول: در یک محدوده فرکانسی مشخص، قسمت حقیقی و موهومی پاسخ فرکانسی فرآیند را به دست آورید.

گام دوم: برای مقدار μ ثابت و دلخواه منحنی RRB و IRB را با توجه به روابط (۹) و (۱۷) به دست آورید.

گام سوم: برای مقادیر λ ، μ و k_p ثابت و دلخواه منحنی CRB را در فضای (k_i, k_d) رسم کنید. در صورتی که $\lambda + \mu \neq 2$ باشد، منحنی CRB با استفاده از روابط (۱۲) به دست خواهد آمد و در غیر این صورت این مرز با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۴) به دست خواهد آمد. گام چهارم: RRB، CRB و IRB را همزمان در صفحه (k_i, k_d) رسم کنید.

گام پنجم: محدوده تغییرات پایدار پارامترها را با رسم CRB در صفحه (k_i, k_d) و (k_p, k_d) با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) به دست آورید. برای مشخص کردن ناحیه پایدار از نواحی به دست آمده نقطه‌ای را به اختیار انتخاب کنید و وضعیت نقطه را از نظر پایداری بررسی کنید. وضعیت نقطه قابل تعمیم به تمام نقاط محصور در آن ناحیه است.

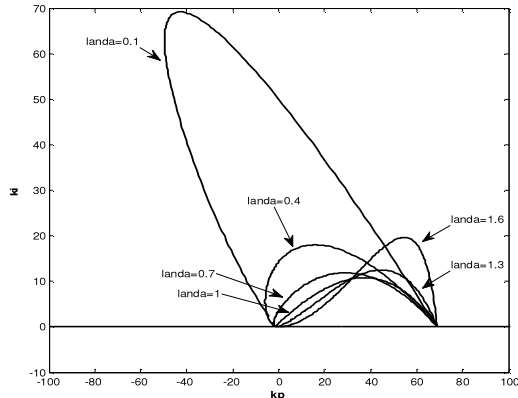
گام ششم: یافتن مقادیری از λ و μ که ناحیه پایداری بزرگتری را ایجاد می‌کنند. برای یافتن این ناحیه از منحنی CRB در صفحه (k_i, k_d) برای k_d ثابت استفاده کنید. با ثابت فرض کردن مقدار $\mu=1$ و تغییر λ در بازه (۰-۲) و مشاهده تاثیر آن بر سطح ناحیه پایداری، مقداری از λ را انتخاب کنید که سبب ایجاد ناحیه پایداری بزرگتر می‌شود و سپس همین مرحله را برای $\lambda=1$ و μ متغیر انجام دهید. در صورت نزدیک بودن سطح نواحی پایدار به ازای مقادیر مختلف μ از رسم منحنی در صفحه دیگری برای انتخاب مقدار مناسب استفاده کنید.

گام هفتم: تمامی نواحی پایدار کنترل‌کننده را در فضای (k_i, k_d, k_p) برای مقادیر λ و μ به دست آمده از مرحله قبل به دست آورید.

برای دستیابی به حد فاز و حد بهره دلخواه کافی است مقادیر تابع تبدیل $C_i(A, \Phi)$ به مقادیر دلخواه تغییر یابد. با دنبال کردن روش زیرمجموعه‌ای از فضای پایدار به دست می‌آید که مشخصه‌های مطلوب را برآورده می‌سازد.

۵- بررسی یک مثال کاربردی

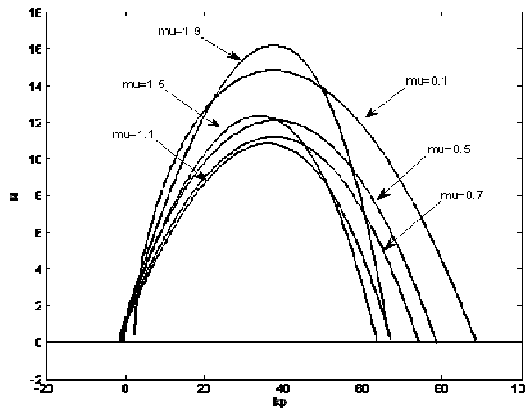
با استفاده از کنترل‌کننده درجه کسری $PI^\lambda D^\mu$ می‌خواهیم دمای مفتول آلومینیومی را کنترل کنیم. مفتول آلومینیومی از یک سمت محدود و از سمت دیگر نامحدود است و حرارت تنها از یک سمت به مفتول آلومینیومی اعمال می‌شود [۱۵]. تابع تبدیل سیستم که نسبت دمای خروجی به شار گرمای ورودی است به صورت زیر می‌باشد:



شکل (۸): ناحیه پایدار برای مقادیر متفاوت λ به ازای مقادیر

$$k_d = -5 \text{ و } \mu = 1$$

Fig. (8): The stability region of some λ values for $k_d = -5, \mu = 1$



شکل (۹): ناحیه پایدار برای مقادیر متفاوت μ به ازای مقادیر

$$k_d = -5 \text{ و } \lambda = 1$$

Fig. (9): The stability region of some μ values for $k_d = -5, \lambda = 1$

با رسم CRB در صفحه مناسب مانند (k_i, k_d) ، می توان مقداری از μ را که سبب ایجاد ناحیه پایداری بزرگتری می شود، یافت.

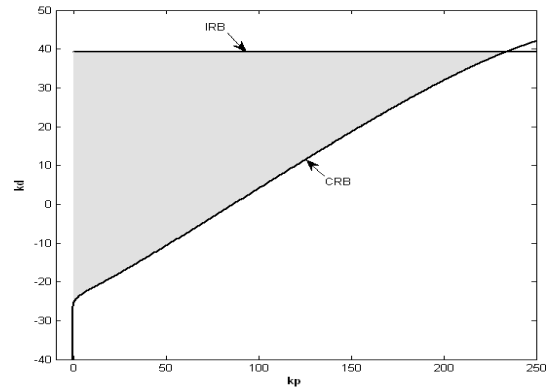
$$\mu = 0.1 \Rightarrow k_{dinf} = 2.5080 \times 10^{20} \approx \infty$$

$$\mu = 1.9 \Rightarrow k_{dinf} = 2.5080 \times 10^{-16} \approx 0$$

منحنی های CRB در صفحه (k_i, k_d) برای $k_p = 10$ در شکل (۱۰) رسم شده است.

محدوده پایدار پارامترهای کنترل کننده PID را می توان با رسم منحنی CRB در صفحه (k_p, k_d) و (k_p, k_i) که به ترتیب در شکل (۶) و (۷) رسم شده اند، به دست آورد. با توجه به این شکل ها محدوده پایدار ساز کنترل کننده PID به صورت زیر می باشد.

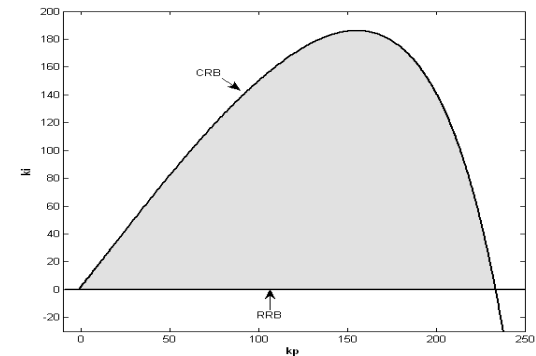
$$k_p = [-1 \ 233] \quad k_i = [0 \ 186] \quad k_d = [-25 \ 39.233]$$



شکل (۶): ناحیه پایدار در صفحه (k_p, k_d) برای مقادیر

$$k_i = 0 \text{ و } \lambda = \mu = 1$$

Fig. (6): The stability region in the (k_p, k_d) plane for $k_i = 0, \lambda = \mu = 1$



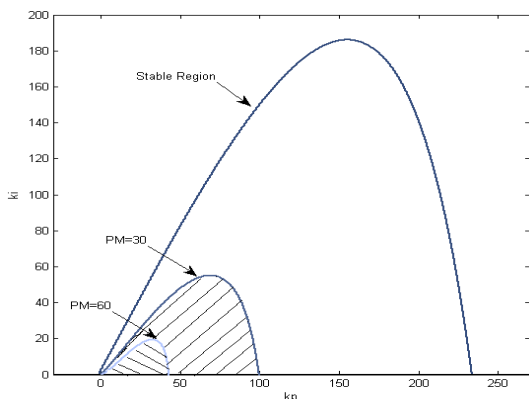
شکل (۷): ناحیه پایدار در صفحه (k_p, k_i) برای مقادیر

$$k_d = 39.233 \text{ و } \lambda = \mu = 1$$

Fig. (7): The stability region in the (k_p, k_i) plane for $k_d = 39.233, \lambda = \mu = 1$

برای یافتن مقدار λ که ناحیه پایداری بزرگتری را ایجاد می کند، منحنی CRB در صفحه (k_p, k_i) برای مقادیر $k_d = -5, \mu = 1$ و مقادیر مختلف λ رسم می کنیم. با توجه به شکل (۸)، ناحیه پایداری بزرگتری ایجاد می کند. همین کار را برای یافتن مقدار μ که سبب ایجاد ناحیه پایداری بزرگتری می شود، انجام می دهیم. با توجه به شکل (۹) به ازای دو مقدار $\mu = 0.1$ و $\mu = 1.9$ ناحیه پایداری بزرگتری ایجاد شده است.

مجموعه‌ای از ناحیه پایدار شکل (۷) خواهد آمد که حد فاز مطلوب را تأمین می‌کند. شکل (۱۲) این فضا را نشان می‌دهد.



شکل (۱۲): ناحیه پایدارکنترل کننده PID در صفحه (kp-ki) برای حد فاز ۳۰ و ۶۰ درجه

Fig. (12): The stability region for phase margin 30 and 60

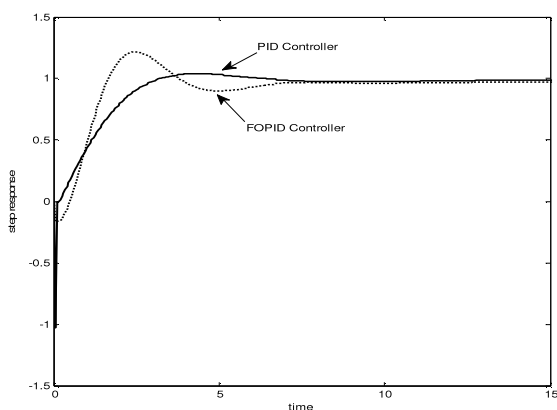
در شکل (۱۳) پاسخ پله سیستم برای دو کنترل کننده PID و $PI^{0.1}D^{0.1}$ با ضرایب بهینه ترسیم شده است. ضرایب بهینه کنترل کننده با استفاده از الگوریتم بهینه سازی فاخته [۱۶] و با تعریف تابع هدفی متشکل از میزان فرجهش، زمان نشست و خطای ردیابی به دست آمده‌اند. این ضرایب حاصل جستجوی الگوریتم فاخته در فضای پایدار حاصل از هر یک از کنترل کننده‌ها است.

ضرایب کنترل کننده PID به صورت زیر می‌باشند.

$$k_p = 20.08 \quad k_i = 0.67 \quad k_d = 12.96$$

ضرایب کنترل کننده $PI^{0.1}D^{0.1}$ به صورت زیر می‌باشند.

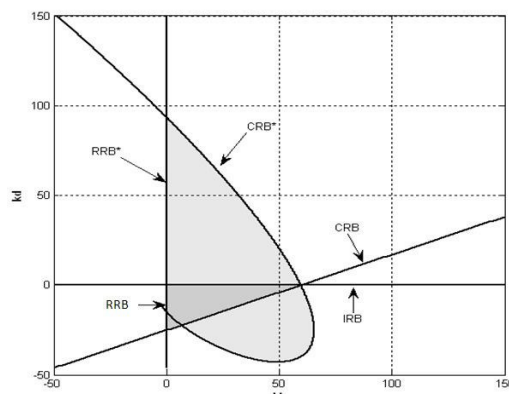
$$k_p = -300 \quad k_i = 130.99 \quad k_d = 212.3315$$



شکل (۱۳): پاسخ پله حلقه بسته سیستم

Fig. (13): Step response of closed loop system

با توجه به شکل (۱۳) کنترل کننده درجه کسری نسبت به کنترل کننده PID دارای پاسخ پله‌ای با فروجهش کمتر و زمان صعود کمتر است.



شکل (۱۰): ناحیه پایدار در صفحه (k_i, k_d) برای $k_p = 10$

CRB^* و RRB^* مربوط به $\lambda = \mu = 0.1$

CRB و RRB مربوط به $\lambda = 0.1$ و $\mu = 1.9$

Fig. (10): The stability region in (k_i, k_d) plane for $k_p = 10$

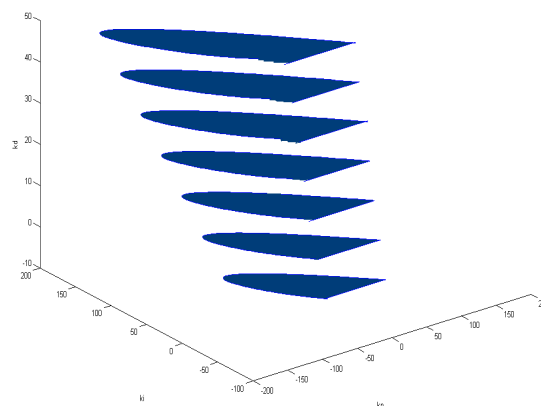
CRB^* and RRB^* related to $\lambda = \mu = 0.1$

CRB , RRB and IRB related to $\lambda = 0.1$, $\mu = 1.9$

با توجه به شکل (۱۰)، $\lambda = 0.1$ و $\mu = 0.1$ ناحیه پایداری بزرگتری را ایجاد خواهند کرد. محدوده پایدار پارامترهای کنترل کننده برای مقادیر $\lambda = 0.1$ و $\mu = 0.1$ بسیار بزرگ است به گونه‌ای که برای k_p محدودیتی وجود ندارد و برای دو پارامتر دیگر شرایط زیر برقرار است.

$$k_i \geq 0, \quad k_d \geq -23.5$$

با تغییر مقادیر پارامترها می‌توان مجموعه کنترل کننده‌های پایدار ساز $PI^{0.1}D^{0.1}$ را در فضای سه بعدی به دست آورد. در شکل (۱۱) مجموعه کنترل کننده‌های $PI^{0.1}D^{0.1}$ برای بازه محدودی از پارامترها رسم شده است.



شکل (۱۱): مجموعه کنترل کننده‌های پایدار ساز $PI^{0.1}D^{0.1}$

Fig. (11): Set of stabilizer $PI^{0.1}D^{0.1}$ controllers

در صورتی که بخواهیم مجموعه کنترل کننده PID پایدار ساز در صفحه (k_p, k_i) برای $k_d = 39.233$ که حد فاز ۳۰ و یا ۶۰ را تأمین کند، مشخص کنیم با تغییر مقادیر تابع تبدیل $C_i(A, \varphi)$ به مقدار تعیین شده تغییر دهیم. برای حد فاز ۳۰ و ۶۰ درجه زیر

۷- نتیجه گیری

می توان در فضای به دست آمده از این روش، مجموعه کنترل کننده هایی را که حد فاز و حد بهره معینی را تامین می کنند، مشخص نمود.

در این مقاله روشی برای یافتن مجموعه کنترل کننده های $PI^\lambda D^\mu$ ارائه گردید. روش پیشنهادی با به کارگیری روند روش اول و استفاده از نحوه محاسبات روش دوم و همچنین برطرف کردن نقص های روش دوم، روشی منسجم، دقیق و مطمئن محسوب می شود. خصوصیت بارز این روش سادگی و عمومیت استفاده از آن بدون ایجاد تغییر در روند الگوریتم برای دسته وسیعی از سیستم ها است. همچنین به راحتی

پی نوشت:

- 1- Gain-Phase Margin Tester
- 2- Real Root Boundary
- 3- Complex Root Boundary
- 4- Infinit Root Boundary

References

- [1] M. Concepción, Y. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, "Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications", Springer, 2010.
- [2] B. Khalfa, A. Charef. "Control quality enhancement using fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller", Int. Jou. of Sys. Sci., Vol. 40, No. 8, pp. 875-888, 2009.
- [3] I. Podlubny, "Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ controllers", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol. 44, No. 1, pp. 208-214, 1999.
- [4] M. Zamani, N. Sadati, M. Karimi-Ghartemani, "Design of an H_∞ PID controller using particle swarm optimization", Int. Jou. of Con., Aut. and Sys., Vol. 7, No. 2, pp. 273-280, 2009.
- [5] N. Tan, K. Ibrahim, Y. Celaledin, P.A. Derek, "Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus", Ene. Con. and Man., Vol. 47, No. 18, pp. 3045-3058, 2006.
- [6] S.E. Hamamci, "Stabilization using fractional-order PI and PID controllers", Nonlinear Dynamics, Vol. 51, No. 1, pp. 329-343, 2008.
- [7] S. Hamamci, "An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol. 52, No. 10, pp. 1964-1969, 2007.
- [8] S. Sujoldzic, J.M. Watkins, "Stabilization of an arbitrary order transfer function with time delay using a PID controller", IEEE/CDC, pp. 846-851, Dec. 2006.
- [9] T. Emami, J.M. Watkins, "Robust performance characterization of PID controllers in the frequency domain", WSEAS Trans. on Sys. and Con., Vol. 4, No. 5, pp. 232-242, 2009.
- [10] Y.K. Lee, J.M. Watkins, "Determination of all stabilizing fractional-order PID controllers", IEEE/ACC, pp. 5007-5012, 2011.
- [11] R. Malti, P. Melchior, P. Lanusse, A. Oustaloup, "Towards an object oriented CRONE toolbox for fractional differential systems", IFAC, 2011.
- [12] R. Caponetto, "Fractional order systems: modeling and control applications", World Scientific Publishing Company Incorporated, Vol. 72, 2010.
- [13] M.D. Ortigueira, J.T. Machado, J.S. Costa, "Which differintegration?[fractional calculus]", IEE Proc. Vision, Image and Sig. Proc., Vol. 152, No. 6, 2005.
- [14] F. Merrikh-Bayat, M. Karimi-Ghartemani, "An efficient numerical algorithm for stability testing of fractional-delay systems", ISA Trans., Vol. 48, No. 1, pp. 32-37, Jan. 2009.
- [15] J.L. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Bastale, A. Oustaloup, O. Cois, "Heat flow estimation through inverted non integer identification models", Int. Jou. of The. Sci., Vol. 39, No. 3, pp. 374-389, 2000.
- [16] R. Rajabioun, "Cuckoo optimization algorithm", Appl. Soft Com., Vol. 11, No. 8, pp. 5508-5518, Dec. 2011.

