



تحلیل پایداری ارتعاشات عرضی ورق‌های مستطیلی شکل تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک

احسان ترکان^۱، مصطفی پیرمردیان^{۲*}، محمد هاشمیان^۲

۱- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خمینی‌شهر، خمینی‌شهر، ایران

۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خمینی‌شهر، خمینی‌شهر، ایران

* خمینی‌شهر، صندوق پستی ۸۴۱۷۵-۱۱۹، pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این پژوهش، پایداری ارتعاشات عرضی ورق مستطیلی شکل نازک با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده که تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک یکسان قرار دارد، با در نظر گرفتن تمامی ترم‌های اینرسی جرم‌های متحرک در تحلیل، مورد بررسی قرار گرفته است. در اثر عبور متناوب جرم‌ها از روی سطح ورق، یک مسأله‌ی پرپیچیدگی خطی حاصل می‌شود. از روش گالرکین، برای تبدیل معادله دیفرانسیل پاره‌ای ارتعاشات عرضی ورق به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی، استفاده گردیده است. در این تحقیق از تئوری فلاکه به عنوان یک روش تحلیلی عددی، برای بدست آوردن نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترها استفاده شده است. همچنین با بکارگیری روش پارامترهای فشرده به عنوان روشی نیمه تحلیلی، علاوه بر صحت‌گذاری بر نتایج حاصل از تئوری فلاکه، وجود پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان برای سیستم ورق-جرم متحرک اثبات و نشان داده شده است. شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده برای یافتن جابجایی نقطه میانی ورق، صحیح بودن نتایج تحلیلی حاصل از دو روش را به خوبی نشان می‌دهد.</p>	<p>مقاله پژوهشی کامل دریافت: ۲۶ مرداد ۱۳۹۶ پذیرش: ۱۱ شهریور ۱۳۹۶ ارائه در سایت: ۱۵ آذر ۱۳۹۶</p> <p>کلیدواژگان ورق-جرم متحرک، پایداری دینامیکی، پدیده پاسخ هم‌زمان، تئوری فلاکه</p>

Stability analysis of transverse vibrations of rectangular plates under periodic passage of moving masses

Ehsan Torkan¹, Mostafa Pirmoradian^{2*}, Mohammad Hashemian²

1- Department of Mechanical Engineering, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran.

* P.O.B. 84175-119 Khomeinishahr, Iran, Pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

Article Information

Original Research Paper
Received 17 August 2017
Accepted 2 September 2017
Available Online 6 December 2017

Keywords

Plate-moving mass,
Dynamic stability,
Coexistence phenomenon,
Floquet theory

ABSTRACT

In this study, stability of transverse vibrations of a simply supported rectangular thin plate under periodic passage of equally-spaced moving masses, by considering all components of the mass inertia in the analysis, is examined. The periodical traverse of masses across the plate results to a linear time-periodic problem. Using Galerkin procedure, the partial differential equation of transverse vibration is transformed to a set of ordinary differential equations. In this study, The Floquet theory is implemented as a numerical method to obtain stable and unstable zones of parameters plane. Applying the strained parameters method as a semi-analytical method, not only certifies the stable and unstable zones resulted by Floquet theory but also clarify the coexistence phenomenon for plate-moving mass system. Numerical simulations of the plate mid-span displacement show the validity of the analytical results obtained by two methods.

Please cite this article using:

Ehsan Torkan, Mostafa Pirmoradian, Mohammad Hashemian, Stability analysis of transverse vibrations of rectangular plates under periodic passage of moving masses, *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, Vol. 8, No. 3, pp. 18-26, 2017 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

۱- مقدمه

مطالعه‌ی رفتار دینامیکی تیرها، کابل‌ها، ورق‌ها و پوسته‌ها تحت بارگذاری متحرک از پرکاربردترین انواع مسائل در حوزه‌ی سازه‌های مهندسی می‌باشد. به عنوان نمونه‌ای از این کاربردها می‌توان به حرکت وسایل نقلیه روی پل‌ها و بزرگراه‌ها، طراحی باند فرودگاه، پروسه ماشینکاری سرعت بالا، جرثقیل‌های سقفی، تله کابین‌ها و غیره اشاره کرد. پیچیده بودن تعامل بین سازه و بار متحرک در کاربردهای مرتبط، منجر به تبدیل این موضوع به علاقه‌مندی‌های محققین در سال‌های اخیر شده است. در مسأله‌ی بارگذاری متحرک، بر اساس در نظر گرفتن یا صرف نظر از تأثیرات اینرسی بارهای متحرک در معادلات دینامیکی، این نوع بارگذاری به دو دسته‌ی نیرو متحرک و جرم متحرک تقسیم‌بندی می‌شود. به حالتی از بارگذاری متحرک که در آن اثرات اینرسی در نظر گرفته شود، حالت جرم متحرک می‌گویند. اگرچه شرایط واقعی بارگذاری معمولاً از نوع جرم متحرک است، اما در مواردی که نسبت وزن جرم متحرک به وزن سازه‌ی بستر قابل چشم پوشی باشد و یا جرم متحرک در سرعت‌های بسیار کمی نسبت به سرعت تشکیل موج در سازه‌ی بستر حرکت می‌کند، می‌توان با تقریب قابل قبولی شرایط را به صورت نیروی متحرک در نظر گرفت. از نقطه نظر تاریخی اولین تلاش‌ها برای حل مسأله‌ی بار متحرک را می‌توان در مطالعات ویلیس [۱] و استوکس [۲] در فرو ریختن پل راه‌آهن چستر جستجو کرد. در میان انبوه مطالعات انجام شده در این زمینه، دسته‌ای از مطالعات اساساً بر تحلیل پایداری دینامیکی این سیستم‌ها تمرکز دارند. در این مطالعات، به شناسایی پارامترهایی از سیستم پرداخته می‌شود که باعث افزایش بی‌رویه دامنه‌ی ارتعاشات سیستم می‌شوند یا به عبارت دیگر دلیلی بر ایجاد ناپایداری در آن می‌شوند. در ادامه تعدادی از مقالات ارائه شده در این زمینه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

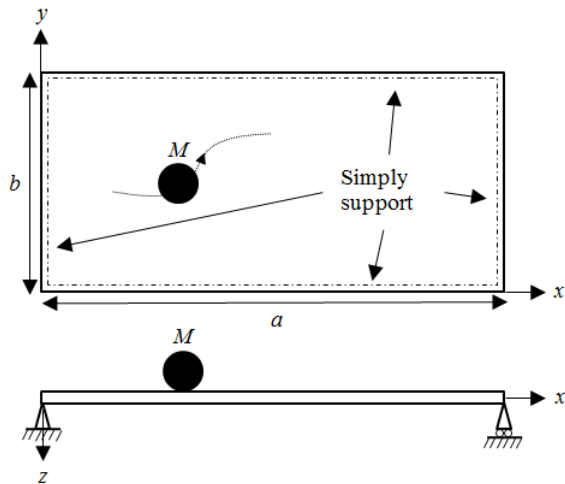
نلسون و کونور [۳]، پاسخ دینامیکی تیر اوپلر-برنولی^۱ که با یک سری پیوسته از جرم‌های عبوری با فاصله مساوی بارگذاری شده است را مطالعه کردند. آن‌ها از روش گالرکین برای گسسته-سازی معادله‌ی حاکم بر سیستم استفاده کردند و نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترهای مسأله را با استفاده از تئوری فلاکه مشخص کردند. آلدراهم و باز [۴]، پایداری دینامیکی تیر پله‌ای تحت عبور جرم متحرک را بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از تئوری تحریک پارامتریک تکانشی، پایداری تیر را هنگامی که

تحت تحریک پارامتریک متناوب قرار دارد، بررسی کردند. ماکرتیچ [۵]، پایداری دینامیکی تیری با تکیه‌گاه‌های ساده واقع بر بستر الاستیک که تحت عبور یک سری جرم‌های متحرک با سرعت‌های ثابت و فواصل یکسان قرار گرفته است را بررسی کرد. تئوری فلاکه برای مطالعه‌ی پارامتریک نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترهای جرم عبوری، استفاده شد. هر دو تئوری معروف تیر تیموشنکو^۲ و تیر اوپلر-برنولی در این مقاله مورد توجه واقع و نشان داده شد که تئوری تیر اوپلر-برنولی ناحیه ناپایدار وسیع‌تری را در صفحه‌ی پارامترها به خود اختصاص می‌دهد. در مطالعات اخیر، پیرمادیان و همکاران [۶، ۷] تیرهای اوپلر-برنولی و تیموشنکوئی تحریک شده با یک سری جرم‌های متحرک یکسان را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از روش هارمونیک بالانس نموی برای تعیین منحنی مرزی جدا کننده‌ی نواحی پایدار و ناپایداری و منحنی‌های تشدید در صفحه‌ی پارامترهای جرم عبوری استفاده کردند.

با مروری بر مقالات ارائه شده در زمینه‌ی تحلیل پایداری دینامیکی سازه‌های الاستیک تحت بارهای متحرک، مشاهده می‌شود که این موضوع برای تیر به عنوان سازه‌ی تحت بارگذاری جرم متحرک مورد مطالعه قرار گرفته است اما با توجه به بهترین دانش نویسندگان، تاکنون تحلیل پایداری دینامیکی برای ورق به عنوان سازه‌ی تحت بارگذاری جرم متحرک انجام نشده است. در این مقاله، پایداری دینامیکی سیستم ورق-جرم متحرک به عنوان یک مسأله‌ی متغیر با زمان مورد بررسی قرار می‌گیرد. بر خلاف سیستم‌های با ضرایب ثابت که دارای حل تحلیلی می‌باشند، سیستم‌های با ضرایب متغیر با زمان معمولاً دارای پاسخ تحلیلی نیستند. با این وجود می‌توان خصوصیات را برای دسته خاصی از آن‌ها که سیستم‌های با ضرایب متناوب با زمان هستند، آشکار ساخت. پاسخ دینامیکی این سیستم‌ها می‌تواند با گذشت زمان به طور مستمر افزایش یافته و منجر به ناپایداری پاسخ گردد. از این رو مطالعه‌ی پایداری این نوع سیستم‌ها حائز اهمیت است. روش‌های تحلیل پایداری سیستم‌های پریودیک دو دسته هستند. دسته اول با استفاده از حل عددی به تحلیل این سیستم‌ها می‌پردازند که از جمله می‌توان به روش‌هایی مانند تئوری فلاکه [۳، ۵] و روش نرخ انرژی [۸] اشاره کرد. دسته‌ی دوم شامل روش‌های نیمه‌تحلیلی هستند که منحنی‌های گذار را در صفحه‌ی پارامترهای مسأله مشخص می‌کنند، مانند روش

2. Timoshenko beam theory

1. Euler-Bernoulli beam theory



شکل ۱ حرکت جرم متحرک در طول مسیری دلخواه روی سطح ورق

در رابطه‌ی (۱-الف)، $w(x, y, z)$ ، $p(x, y, t)$ و h به ترتیب بیانگر جابجایی عرضی سطح میانی ورق، تحریک خارجی و ضخامت ورق هستند. همچنین در رابطه‌ی (۱-ب)، E مدول یانگ و ν ضریب پواسون است. عبارت تحریک خارجی برای بارگذاری جرم متحرک را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۲) در نظر گرفت.

$$p(x, y, t) = M \left(g - \frac{d^2 w_0}{dt^2} \right) \delta(x - x_0(t)) \delta(y - y_0(t)) \quad (2)$$

که M ، g و w_0 به ترتیب جرم بارهای عبوری، شتاب گرانش و جابجایی عمودی جرم متحرک هستند. δ بیانگر تابع دلتای دیراک، $x_0(t)$ و $y_0(t)$ موقعیت جرم روی ورق در زمان t می‌باشند. با در نظر گرفتن همه‌ی ترم‌های اینرسی و فرض تماس کامل جرم با ورق، رابطه‌ی (۳) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_0}{dt^2} = & \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \left(\frac{dx}{dt} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ & \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) \right]_{x=x_0(t)}^{y=y_0(t)} \quad (3) \end{aligned}$$

پاسخ ارتعاش آزاد ورق به صورت رابطه‌ی (۴) در نظر گرفته می‌شود.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x, y) e^{j\omega_i t} \quad (4)$$

که ω_i و $\phi_i(x, y)$ ، $j = \sqrt{-1}$ به ترتیب i -امین تابع شکل ورق بدون حضور جرم و i -امین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی شکل هستند که با استفاده از روابط (۵) و (۶) بیان می‌شوند.

توازن هارمونیک‌ها^۱ [۹]، روش پارامترهای فشرده [۱۰] و روش اغتشاش هوموتوپی^۲ [۱۱].

در این تحقیق، ابتدا معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات عرضی یک ورق مستطیلی شکل نازک (ورق کیرشف^۳ [۱۲]) با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده که در معرض عبور جرم‌های متحرک یکسان واقع شده است، در نظر گرفته می‌شود. روش گالرکین^۴ به همراه توابع شکل مثلثاتی برای تبدیل معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر ارتعاشات عرضی ورق به یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل معمولی، استفاده می‌شود. در ادامه، بوسیله-ی تئوری فلاکه نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترهای جرم عبوری مشخص می‌شود و همچنین با استفاده از روش پارامترهای فشرده منحنی‌های مرزی جداکننده‌ی نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترها تعیین می‌شوند. برای بررسی صحت و دقت نواحی حاصل، از شبیه‌سازی‌های عددی برای پارامترهای انتخابی از نواحی پایدار و ناپایدار مسئله استفاده می‌شود. مسئله-ی دیگری که در این مقاله به آن پرداخته می‌شود، وجود پدیده-ی پاسخ هم‌زمان در سیستم ورق-جرم متحرک با استفاده از روش پارامترهای فشرده است. این پدیده هنگامی رخ می‌دهد که دو منحنی مرزی تشکیل دهنده‌ی یک زبانه‌ی ناپایدار در صفحه-ی پارامترها کاملاً بر روی هم منطبق شوند و باعث ایجاد یک زبانه‌ی ناپایدار بسته و پنهانی، می‌شوند. در مطالعات اخیر، کریم‌پور و همکاران [۹] با استفاده از روش توازن هارمونیک‌ها، به وجود پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان در مطالعه‌ی پایداری دینامیکی تیر اوپلر-برنولی تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک اشاره کردند و اهمیت آگاهی از آن را متذکر شدند.

۲- مدل‌سازی سیستم

فرض می‌شود که جرمی روی مسیری دلخواه واقع بر یک ورق مستطیلی شکل نازک و یکنواخت با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده، مطابق با شکل ۱ حرکت می‌کند. جرم واحد حجم ورق ρ و سختی خمشی آن D است. معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر ارتعاشات عرضی ورق را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۱) بیان نمود [۱۳].

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (1-الف)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1-ب)$$

1. Harmonic balances method
2. Homotopy perturbation method
3. Kirchhoff's plate
4. Galerkin method

در رابطه‌ی (۱۲)، $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ ، آرایه مختصات مودال است. مولفه‌های ماتریس‌های ظاهر شده در (۱۲) به صورت رابطه‌ی (۱۳) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{M}{\rho h} \phi_i(x_0(t), y_0(t)) \phi_j(x_0(t), y_0(t)) \\ C_{ij} &= 2 \frac{M}{\rho h} [\dot{x}_0(t) \phi_{i,x}(x_0(t), y_0(t)) \\ &\quad + \dot{y}_0(t) \phi_{i,y}(x_0(t), y_0(t))] \phi_j(x_0(t), y_0(t)) \\ K_{ij} &= \omega_{ij}^2 \delta_{ij} + \frac{M}{\rho h} [\dot{x}_0^2(t) \phi_{i,xx}(x_0(t), y_0(t)) \\ &\quad + \dot{y}_0^2(t) \phi_{i,yy}(x_0(t), y_0(t)) \\ &\quad + \ddot{x}_0(t) \phi_{i,x}(x_0(t), y_0(t)) + \ddot{y}_0(t) \phi_{i,y}(x_0(t), y_0(t)) \\ &\quad + 2\dot{x}_0(t) \dot{y}_0(t) \phi_{i,xy}(x_0(t), y_0(t))] \phi_j(x_0(t), y_0(t)) \\ F_j &= \frac{Mg}{\rho h} \phi_j(x_0(t), y_0(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

حال فرض می‌شود که جرم عبوری بر روی یک مسیر مستقیم و موازی لبه‌های طولی ورق با سرعت ثابت V مطابق با شکل ۲ حرکت می‌کند. از این رو مکان جرم روی ورق با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵) توصیف می‌شود.

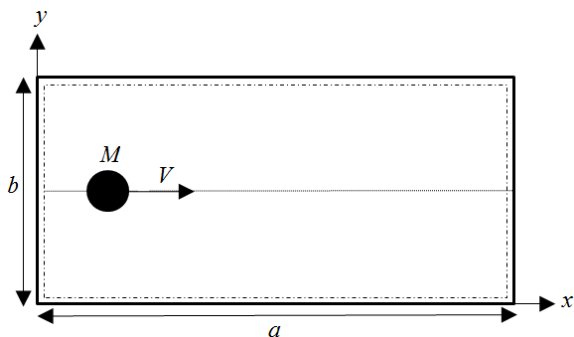
$$x_0(t) = Vt \quad (14)$$

$$y_0(t) = \frac{b}{2} \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در (۱۲) و در نظر گرفتن مود اول ارتعاشی، معادله حاکم بر سیستم در مختصات مودال به صورت رابطه‌ی (۱۶) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\left(1 + 4 \frac{M}{\rho h a b} \sin^2 \left(\frac{\pi V t}{a}\right)\right) \ddot{q}(t) \\ &+ \left(8 \frac{M V \pi}{\rho h a^2 b} \sin \left(\frac{\pi V t}{a}\right) \cos \left(\frac{\pi V t}{a}\right)\right) \dot{q}(t) \\ &+ \left(\omega_1^2 - 4 \frac{M V^2 \pi^2}{\rho h a^3 b} \sin^2 \left(\frac{\pi V t}{a}\right)\right) q(t) \\ &= \frac{2M}{\rho h \sqrt{a b}} g \sin \left(\frac{\pi V t}{a}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

برای تبدیل معادله‌ی حاکم به فرم بی‌بعد، پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه‌ی (۱۷) تعریف می‌شوند.



شکل ۲ حرکت جرم متحرک در طول مسیری مستقیم روی سطح ورق

ورق

$$\begin{aligned} \phi_i(x, y) &= \phi_{mn}(x, y) \\ &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\omega_i = \omega_{mn} = \sqrt{\frac{\pi^4 D}{\rho h} \left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right)} \quad (6)$$

در روابط (۵) و (۶)، m و n مدهای ارتعاشی در راستای طول و عرض ورق هستند. با جایگذاری رابطه‌ی (۴) در سمت چپ (۱) الف، رابطه‌ی (۷) نتیجه می‌شود.

$$D \nabla^4 \phi_i(x, y) = \rho h \omega_i^2 \phi_i(x, y) \quad (7)$$

به منظور استفاده از روش گالرکین برای گسسته‌سازی رابطه‌ی (۱)، می‌توان جابجایی عرضی ورق را با استفاده از رابطه (۸) به دامنه‌ی زمان و مکان جداسازی کرد.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x, y) q_i(t) \quad (8)$$

در رابطه‌ی (۸)، $q_i(t)$ دامنه‌ی مودال وابسته به زمان برای i -امین تابع شکل $\phi_i(x, y)$ است. با جایگذاری رابطه‌ی (۸) در (۱) و همچنین با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۷)، رابطه‌ی (۹) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left(\omega_i^2 q_i(t) + \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} \right) \rho h \phi_i(x, y) \right\} \\ &= -M \sum_{i=1}^{\infty} [-g + f_{1i}(x, y) \ddot{q}_i(t) + f_{2i}(x, y, t) \dot{q}_i(t) \\ &\quad + f_{3i}(x, y, t) q_i(t)]_{x=x_0(t)} \delta(x - x_0(t)) \delta(y - y_0(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

که در رابطه‌ی (۹):

$$\begin{aligned} f_{1i}(x, y) &= \phi_i(x, y) \\ f_{2i}(x, y, t) &= 2\dot{x}_0(t) \phi_{i,x}(x, y) + 2\dot{y}_0(t) \phi_{i,y}(x, y) \\ f_{3i}(x, y, t) &= \dot{x}_0^2(t) \phi_{i,xx}(x, y) + \dot{y}_0^2(t) \phi_{i,yy}(x, y) \\ &\quad + 2\dot{x}_0(t) \dot{y}_0(t) \phi_{i,xy}(x, y) + \ddot{x}_0(t) \phi_{i,x}(x, y) \\ &\quad + \ddot{y}_0(t) \phi_{i,y}(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

با توجه به شرایط تعامد بین مدهای ارتعاشی، می‌توان رابطه‌ی (۱۱) را در نظر گرفت.

$$\iint_A \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dx dy = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (11)$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی (۹) در $\phi_j(x, y)$ و سپس انتگرال‌گیری از رابطه‌ی حاصل بر روی سطح ورق، مجموعه‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم بر مسأله در فرم ماتریسی به صورت رابطه‌ی (۱۲) حاصل می‌شود.

$$\mathbf{M}(t) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(t) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (12)$$

برای آن است و رابطه‌ی آن با $X(t)$ با استفاده از ماتریس ثابت B به صورت رابطه‌ی (۲۲) بیان می‌شود.

$$X(t+T) = X(t)B \quad (22)$$

با انتخاب $X(0) = I$ ، در لحظه‌ی $t = 0$ ماتریس پاسخ پایه به صورت رابطه‌ی (۲۳) حاصل می‌شود.

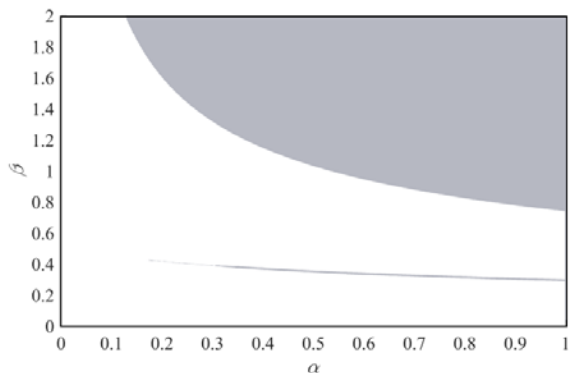
$$X(0+T) = X(0)B \Rightarrow X(T) = B \quad (23)$$

بر اساس رابطه‌ی (۲۳) واضح است که می‌توان ماتریس B را با انتگرال‌گیری عددی رابطه‌ی (۲۱) در بازه زمانی یک دوره تناوب بدست آورد. تئوری فلاکه بیان می‌کند که اگر تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس پایه‌ی B داخل یک دایره‌ی واحد به مرکز $(0,0)$ در صفحه‌ی مختلط باشند، سیستم دارای پایداری مجانبی است و در غیر اینصورت اگر خارج دایره‌ی واحد باشند سیستم ناپایدار است.

با تبدیل رابطه‌ی (۲۰) به فرم رابطه‌ی (۲۱)، ماتریس $A(\tau)$ و بردار $x(\tau)$ به صورت رابطه‌ی (۲۴) تعریف می‌شوند.

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\beta^2} - 2\alpha(1 - \cos(2\tau)) & 4\alpha \sin(2\tau) \\ \frac{Q(\tau)}{Q'(\tau)} & \frac{Q'(\tau)}{Q(\tau)} \end{pmatrix} \quad (24)$$

که $A(\tau)$ متناوب با دوره تناوب $T = \pi$ است. برنامه‌ای در نرم-افزار متلب نوشته شده است که بعد از تشکیل ماتریس پایه‌ی B به ازای پارامترهای انتخابی مسأله، مقادیر ویژه‌ی آن را محاسبه می‌کند و سپس شرایط پایداری سیستم را بررسی می‌کند. این برنامه برای 1000×2000 نقطه از صفحه‌ی پارامترهای بی‌بعد مسأله یعنی (α, β) اجرا شد و تئوری فلاکه نواحی پایدار و ناپایدار این صفحه را مشخص کرد. این نواحی در شکل ۳ نمایش داده شده است. نواحی هاشور خورده رفتار ناپایدار و همچنین



شکل ۳ نواحی پایدار و ناپایدار حاصل از تئوری فلاکه.

$$\alpha \triangleq \frac{M}{\rho h a b}, \quad \beta \triangleq \frac{\pi V}{a \omega_1}, \quad \tau \triangleq \beta \omega_1 t, \quad Q \triangleq \frac{q}{a b}, \quad \bar{g} \triangleq \frac{g}{\omega_1^2 \sqrt{a b}} \quad (17)$$

با استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای و پارامترهای بی‌بعد تعریف شده، معادله‌ی بی‌بعد به صورت رابطه‌ی (۱۸) حاصل می‌شود.

$$(1 + 4\alpha \sin^2(\tau))Q''(\tau) + 8\alpha \sin(\tau) \cos(\tau) Q'(\tau) + \left(\frac{1}{\beta^2} - 4\alpha \sin^2(\tau)\right)Q(\tau) = 2\frac{\alpha}{\beta^2} \bar{g} \sin(\tau) \quad (18)$$

که بالانویس پرایم به معنای مشتق نسبت به زمان بی بعد τ است.

رابطه‌ی (۱۸) رابطه‌ای خطی با ضرایب متغیر با زمان است. تا زمانی که جرم روی ورق حرکت می‌کند ضرایب آن با زمان تغییر می‌کنند. به محض اینکه جرم صفحه را ترک کند ضرایب متغیر با زمان رابطه‌ی (۱۸) از بین خواهند رفت و در نتیجه همه‌ی عوامل تقویت ارتعاش در سیستم حذف می‌شوند. بنابراین با در نظر گرفتن این فرض که وقتی یک جرم صفحه را ترک می‌کند بلافاصله جرم بعدی وارد صفحه شود، یک تحریک تکراری اتفاق می‌افتد و ضرایب رابطه‌ی (۱۸) متناوب با دوره تناوب $T = a/V$ می‌شوند. با انجام بسط فوریه‌ی ضرایب رابطه‌ی (۱۸)، رابطه‌ی (۱۹) نتیجه می‌شود.

$$(1 + 2\alpha(1 - \cos(2\tau)))Q''(\tau) + 4\alpha \sin(2\tau) Q'(\tau) + \left(\frac{1}{\beta^2} - 2\alpha(1 - \cos(2\tau))\right)Q(\tau) = \frac{2\alpha}{\beta^2} \bar{g} \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1 - 4k^2)} \cos(2k\tau)\right) \quad (19)$$

به منظور مطالعه‌ی پایداری دینامیکی سیستم، با صرف نظر از سمت راست رابطه‌ی (۱۹)، رابطه‌ی (۲۰) حاصل می‌شود.

$$(1 + 2\alpha(1 - \cos(2\tau)))Q''(\tau) + 4\alpha \sin(2\tau) Q'(\tau) + \left(\frac{1}{\beta^2} - 2\alpha(1 - \cos(2\tau))\right)Q(\tau) = 0 \quad (20)$$

۳- تئوری فلاکه

تئوری فلاکه یک تئوری کلی برای تحلیل پایداری سیستم‌های خطی با ضرایب پریودیک می‌باشد. این تئوری را می‌توان برای هر معادله به فرم رابطه‌ی (۲۱) به کار برد.

$$\dot{x} = A(t)x \quad (21)$$

در رابطه‌ی (۲۱)، $A(t)$ ماتریس متناوب با دوره تناوب T است. از آنجایی که $A(t)$ متناوب است، اگر $X(t)$ یک ماتریس پاسخ پایه برای رابطه‌ی (۲۱) باشد، آنگاه $X(t+T)$ نیز یک پاسخ

جواب عمومی رابطه‌ی (۳۰) به صورت رابطه‌ی (۳۳) تعریف می‌شود.

$$Q_0(\tau) = c \cos(k\tau) + d \sin(k\tau) \quad (33)$$

که اگر k زوج باشد Q_0 متناوب با دوره تناوب π و اگر فرد باشد متناوب با دوره تناوب 2π است. در ادامه پاسخ‌های پریودیک روابط (۳۰) تا (۳۲) برای مقادیر مختلف k بدست می‌آیند.

۴-۱ پاسخ‌ها به ازای $k = 0$

با جایگذاری $k = 0$ در رابطه‌ی (۳۳)، پاسخ رابطه‌ی (۳۰) برابر است با:

$$Q_0(\tau) = c \quad (34)$$

از جایگذاری رابطه‌ی (۳۴) در (۳۱)، رابطه‌ی (۳۵) نتیجه می‌شود:

$$Q_1''(\tau) = (2 - \delta_1)c - 2c \cos(2\tau) \quad (35)$$

در رابطه‌ی (۳۵) اگر مقدار δ_1 برابر ۲ انتخاب شود، عبارتی که منجر به ایجاد ترم سکولار در $Q_1(\tau)$ می‌شود، از بین می‌رود. بنابراین جواب خصوصی رابطه‌ی (۳۵) به صورت رابطه‌ی (۳۶) حاصل می‌شود.

$$Q_1(\tau) = \frac{1}{2}c \cos(2\tau) \quad (36)$$

با جایگذاری روابط (۳۴) و (۳۶) در رابطه‌ی (۳۲)، نتیجه می‌شود:

$$Q_2''(\tau) = -c \left(\frac{1}{2} + \delta_2 \right) + 4c \cos(2\tau) - \frac{9}{2}c \cos(4\tau) \quad (37)$$

برای از بین بردن ترم‌های سکولار، در رابطه‌ی (۳۷) باید $\delta_2 = -1/2$ انتخاب شود. در نتیجه جواب خصوصی رابطه‌ی (۳۷) به صورت رابطه‌ی (۳۸) حاصل می‌شود.

$$Q_2(\tau) = -c \cos(2\tau) + \frac{9}{32}c \cos(4\tau) \quad (38)$$

با جایگذاری δ_1 و δ_2 در رابطه‌ی (۲۶)، رابطه‌ی (۳۹) حاصل می‌شود.

$$\delta = 2\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (39)$$

حال می‌توان با جایگذاری رابطه‌ی (۲۷) در (۳۹) اولین منحنی گذار در امتداد پاسخ‌های پریودیک را به صورت رابطه‌ی (۴۰) بیان کرد.

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2}} \quad (40)$$

نواحی سفید رنگ، رفتار پایدار را نشان می‌دهند. در شکل ۳ می‌توان مشاهده کرد که در ناحیه‌ی پایدار صفحه‌ی پارامترها، زبانه‌ی ناپایدار بسیار باریکی ظاهر شده است که وجود این زبانه در ادامه توسط روش نیمه‌تحلیلی بررسی خواهد شد.

۴- روش پارامترهای فشرده

مطابق با تئوری فلاکه برای معادلات با ضرایب پریودیک، روی منحنی گذار در صفحه‌ی پارامترها بین نواحی پایدار و ناپایدار، پاسخ‌های متناوبی با دوره تناوب T و $2T$ وجود دارد. در این بخش، با استفاده از روش اغتشاشی پارامترهای فشرده، پاسخ‌های پریودیک و منحنی گذار در امتداد این پاسخ‌ها در صفحه‌ی $\alpha - \beta$ بدست می‌آیند.

بر اساس روش پارامترهای فشرده، پاسخ سیستم را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۲۵) بیان کرد [۱۰].

$$Q(\tau) = Q_0(\tau) + \epsilon Q_1(\tau) + \epsilon^2 Q_2(\tau) + \dots \quad (25)$$

در رابطه‌ی (۲۵)، ϵ پارامتر اغتشاش کوچک است. به طور مشابه فرض می‌شود که δ به صورت رابطه‌ی (۲۶) تعریف می‌شود.

$$\delta = k^2 + \epsilon\delta_1 + \epsilon^2\delta_2 + \dots \quad (26)$$

در رابطه‌ی (۲۶)، $k \geq 0$ و δ_i ها پارامترهایی هستند که برای جلوگیری از ظاهر شدن ترم‌های سکولار انتخاب می‌شوند. با بازگشت به رابطه‌ی (۲۰)، می‌توان رابطه‌ی (۲۷) را تعریف کرد.

$$\delta \triangleq \frac{1}{\beta^2}, \quad \epsilon \triangleq \alpha \quad (27)$$

بر اساس رابطه‌ی (۲۷)، رابطه‌ی (۲۰) به صورت رابطه‌ی (۲۸) بازنویسی می‌شود.

$$(1 + 2\epsilon(1 - \cos(2\tau)))Q''(\tau) + 4\epsilon \sin(2\tau)Q'(\tau) + (\delta - 2\epsilon(1 - \cos(2\tau)))Q(\tau) = 0 \quad (28)$$

از جایگذاری روابط (۲۵) و (۲۶) در (۲۸)، نتیجه می‌شود:

$$(1 + 2\epsilon(1 - \cos(2\tau)))(Q_0''(\tau) + \epsilon Q_1''(\tau) + \dots) + 4\epsilon \sin(2\tau)(Q_0'(\tau) + \epsilon Q_1'(\tau) + \epsilon^2 Q_2'(\tau) + \dots) + ((k^2 + \epsilon\delta_1 + \epsilon^2\delta_2 + \dots) - 2\epsilon(1 - \cos(2\tau)))(Q_0(\tau) + \epsilon Q_1(\tau) + \epsilon^2 Q_2(\tau) + \dots) = 0 \quad (29)$$

با مساوی صفر قرار دادن مجموع ضرایب عبارات هم توان ϵ ، روابط (۳۰) تا (۳۲) بدست می‌آیند.

$$\epsilon^0: Q_0''(\tau) + n^2 Q_0(\tau) = 0 \quad (30)$$

$$\epsilon^1: Q_1''(\tau) + n^2 Q_1(\tau) = 2(\cos(2\tau) - 1)Q_0''(\tau) - 4\sin(2\tau)Q_0'(\tau) - (\delta_1 - 2 + 2\cos(2\tau))Q_0(\tau) \quad (31)$$

$$\epsilon^2: Q_2''(\tau) + n^2 Q_2(\tau) = 2(\cos(2\tau) - 1)Q_1''(\tau) - 4\sin(2\tau)Q_1'(\tau) - (\delta_1 - 2 + 2\cos(2\tau))Q_1(\tau) - \delta_2 Q_0(\tau) \quad (32)$$

برای حذف ترم‌های سکولار در پاسخ رابطه‌ی (۴۹)، مقدار δ_1 برابر ۴ انتخاب می‌شود و به دنبال آن منحنی گذار از پاسخ‌های پریودیک به صورت روابط (۵۰) و (۵۱) حاصل می‌شود.

$$\delta = 1 + 4\epsilon - 2\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (50)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1 + 4\alpha - 2\alpha^2}} \quad (51)$$

واضح است که منحنی گذار از پاسخ‌های کسینوسی و سینوسی با هم برابر هستند. این تساوی بیان‌گر وجود پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان است که نتیجه‌ی آن منطبق شدن دو منحنی گذار و تشکیل یک زبانه‌ی ناپایدار و بسته در صفحه‌ی $\alpha - \beta$ می‌باشد. لازم به ذکر است که ایجاد تغییراتی در سیستم می‌تواند منجر به باز شدن این ناحیه‌ی به ظاهر پایدار و به دنبال آن ایجاد یک ناحیه‌ی ناپایدار گردد ازین رو این پدیده در زمینه‌ی طراحی مهندسی حائز اهمیت است. لازم به ذکر است که تئوری فلاکه بدلیل استفاده از روش عددی قادر به بیان پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان نمی‌باشد.

با تکرار مراحل انجام شده در قسمت ۴-۲ برای پاسخ‌ها به ازای $k = 2$ منحنی‌های گذار به صورت روابط (۵۲) و (۵۳) و همچنین برای $k = 3$ به صورت روابط (۵۴) و (۵۵) بدست می‌آیند.

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{4 + 10\alpha - \frac{25}{4}\alpha^2}} \quad (52)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{4 + 10\alpha - \frac{27}{4}\alpha^2}} \quad (53)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{9 + 20\alpha - 14\alpha^2}} \quad (54)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{9 + 20\alpha - 14\alpha^2}} \quad (55)$$

شکل ۴ منحنی‌های گذار بدست آمده با روش پارامترهای فشرده را نشان می‌دهد. منحنی‌هایی که با خط چین نمایش داده شده‌اند بیانگر وجود پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان هستند. با مقایسه‌ی منحنی‌های (۵۲) و (۵۳) واضح است که این دو منحنی دارای تفاوتی جزئی هستند. بنابراین در این حالت پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان اتفاق نمی‌افتد زیرا در این پدیده دو منحنی تشکیل دهنده‌ی یک زبانه‌ی ناپایدار باید دقیقاً با یکدیگر برابر باشند. این دو منحنی که از نقطه‌ی $(\alpha = 0, \beta = 0.5)$ شروع می‌شوند، یک زبانه‌ی ناپایدار بسیار باریکی را در صفحه‌ی

۴-۲ پاسخ‌ها به ازای $k = 1$

با جایگذاری $k = 1$ در رابطه‌ی (۳۳)، پاسخ رابطه‌ی (۳۰) به صورت رابطه‌ی (۴۱) حاصل می‌شود.

$$Q_0(\tau) = c \cos(\tau) + d \sin(\tau) \quad (41)$$

از جایگذاری رابطه‌ی (۴۱) در (۳۱)، رابطه‌ی (۴۲) نتیجه می‌شود.

$$Q_1''(\tau) + Q_1(\tau) = (4c - c\delta_1) \cos(\tau) + (4d - d\delta_1) \sin(\tau) - 4c \cos(3\tau) - 4d \sin(3\tau) \quad (42)$$

با بررسی رابطه‌ی (۴۲) واضح است که پاسخ سیستم شامل جملاتی سینوسی و کسینوسی است. بنابراین می‌توان پاسخ‌های سینوسی و کسینوسی را به طور مجزا تحلیل کرد و منحنی‌های گذار از این پاسخ‌ها را بدست آورد.

با در نظر گرفتن جملات کسینوسی، رابطه‌ی (۴۲) به صورت رابطه‌ی (۴۳) بازنویسی می‌شود.

$$Q_1''(\tau) + Q_1(\tau) = (4c - c\delta_1) \cos(\tau) - 4c \cos(3\tau) \quad (43)$$

به منظور حذف ترم‌های سکولار، $\delta_1 = 4$ انتخاب می‌شود. بنابراین جواب خصوصی رابطه‌ی (۴۳) برابر می‌شود با:

$$Q_1(\tau) = \frac{1}{2}c \cos(3\tau) \quad (44)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۴۴) و (۴۴) در رابطه‌ی (۳۲)، نتیجه می‌شود:

$$Q_2''(\tau) + Q_2(\tau) = -(2c + c\delta_2) \cos(\tau) + 8c \cos(3\tau) - 8c \cos(5\tau) \quad (45)$$

با انتخاب $\delta_2 = -2$ ، ترم‌های سکولار حذف می‌شوند و پاسخ رابطه‌ی (۴۵) بصورت رابطه‌ی (۴۶) حاصل می‌شود.

$$Q_2(\tau) = -c \cos(3\tau) + \frac{1}{3}c \cos(5\tau) \quad (46)$$

با جایگذاری δ_1 و δ_2 در رابطه‌ی (۲۶)، رابطه‌ی (۴۷) بدست می‌آید.

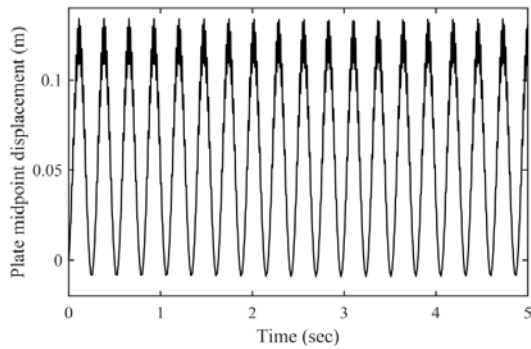
$$\delta = 1 + 4\epsilon - 2\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (47)$$

حال با جایگذاری رابطه‌ی (۲۷) در (۴۷)، منحنی گذار در امتداد پاسخ‌های پریودیک کسینوسی به صورت رابطه‌ی (۴۸) بیان می‌شود.

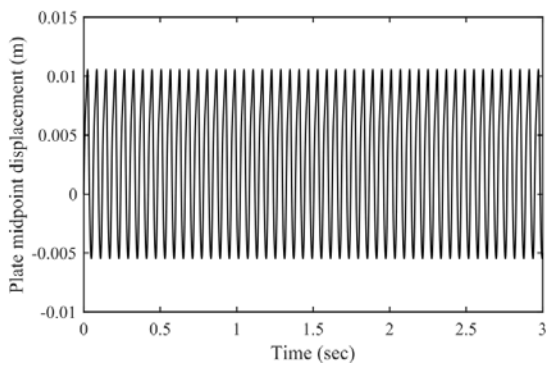
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1 + 4\alpha - 2\alpha^2}} \quad (48)$$

رابطه‌ی (۴۲) را با در نظر گرفتن جملات سینوسی می‌توان به صورت رابطه‌ی (۴۹) بازنویسی کرد.

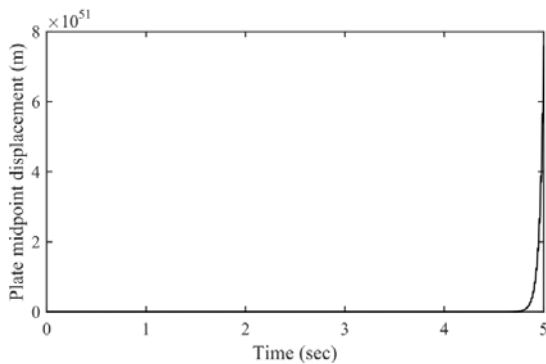
$$Q_1''(\tau) + Q_1(\tau) = (4d - d\delta_1) \sin(\tau) - 4d \sin(3\tau) \quad (49)$$



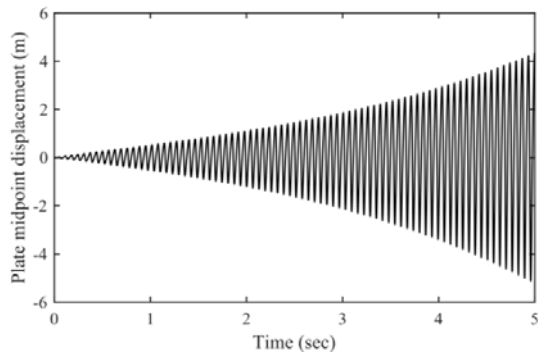
(الف)



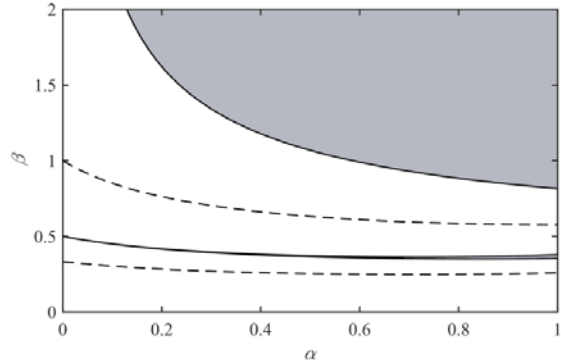
(ب)



(ج)



(د)



شکل ۴ نواحی پایدار و ناپایدار حاصل از روش پارامترهای فشرده.

پارامترها تشکیل می‌دهند که در شکل ۳ نیز توسط تئوری فلاکه وجود آن گزارش شده است.

۵- صحت سنجی

با حل عددی معادله‌ی حاکم بر مسأله (معادله‌ی (۱۶)) به ازای پارامترهای متعلق به نواحی پایدار و ناپایدار، دقت و صحت این نواحی بررسی شده است. در این شبیه‌سازی‌ها یک ورق مستطیلی شکل فولادی با ابعاد $10(m) \times 5(m) \times 20(cm)$ ، جرم واحد حجم $\rho = 7850 \text{ kgm}^{-3}$ ، ضریب پواسون $\nu = 0.3$ و مدول یانگ $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$ در نظر گرفته شده است. اولین نقطه $(\alpha = 0.3, \beta = 1.3)$ از ناحیه‌ی پایدار در مجاورت مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار، دومین نقطه $(\alpha = 0.3, \beta = 0.692)$ از پارامترهای متعلق به منحنی پاسخ هم‌زمان، سومین نقطه $(\alpha = 0.3, \beta = 1.4)$ در مجاورت مرز از ناحیه‌ی ناپایدار و همچنین چهارمین نقطه $(\alpha = 0.7, \beta = 0.324)$ از زبانه‌ی باریک ناپایدار انتخاب شده است. نتایج شبیه‌سازی‌ها در شکل ۵ نمایش داده شده است. در شکل ۵-الف دامنه‌ی ارتعاش سیستم با گذشت زمان محدود می‌باشد این بدین معناست که ورق به ازای پارامترهای انتخابی رفتاری پایدار از خود نشان می‌دهد. در شکل ۵-ب رفتار سیستم برای پارامترهای انتخابی از منحنی پاسخ هم‌زمان به صورت محدود و پریودیک است. همچنین در شکل‌های ۵-ج و ۵-د، دامنه‌ی ارتعاش سیستم با گذشت زمان به طور مستمر افزایش می‌یابد و این پاسخ نامحدود بیان‌گر وقوع ناپایداری در ارتعاشات ورق به ازای پارامترهای انتخابی از نواحی ناپایدار و زبانه‌ی ناپایداری می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش، پایداری ارتعاشات عرضی ورق مستطیلی شکل نازک با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده که تحت عبور متناوب

جرم بی بعد بارهای عبوری	α
سرعت بی بعد بارهای عبوری	β
پارامتر اغتشاش کوچک	ϵ
ضریب پواسون	ν
جرم واحد حجم ورق (kg.m^{-3})	ρ
تابع شکل ورق	ϕ
فرکانس طبیعی ورق	ω

شکل ۵ شبیه‌سازی عددی برای پارامترهای الف) $\alpha = 0.3, \beta = 1.3$ (ب) $\alpha = 0.3, \beta = 0.692$ (ج) $\alpha = 0.3, \beta = 1.4$ (د) $\alpha = 0.7, \beta = 0.324$

جرم‌های متحرک یکسان قرار دارد، تحلیل شد. ابتدا معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر ارتعاشات عرضی ورق بیان گردید و سپس بارگذاری جرم متحرک با در نظر گرفتن همه‌ی ترم‌های اینرسی به عنوان ترم تحریک خارجی، در معادله جایگذاری شد. معادله‌ی حاصل با بکارگیری روش گالرکین به همراه توابع شکل مثلثاتی به یک مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل گردید. حرکت جرم‌های عبوری روی یک مسیر مستقیم موازی با لبه‌های طولی ورق در نظر گرفته شد و سپس پایداری سیستم با استفاده از تئوری فلاکه تحلیل شد. روش پارامترهای فشرده برای مشخص کردن منحنی‌های مرزی جداکننده‌ی نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترها بکار گرفته شد که این نواحی به خوبی با نتایج تئوری فلاکه هم‌خوانی داشت. نتایج بدست آمده با روش پارامترهای فشرده بیانگر وجود پدیده‌ی پاسخ هم‌زمان در سیستم ورق-جرم متحرک بود. صحت نواحی پایدار و ناپایدار بدست آمده با دو روش تحلیلی به کار گرفته شده، با استفاده از شبیه‌سازی‌های عددی تایید شد. نتایج شبیه‌سازی‌های عددی حاکی از دقت بالای دو روش در تحلیل پایداری سیستم بود.

۷- فهرست علائم

a	طول ورق (m)
b	عرض ورق (m)
D	سختی خمشی ورق (N.m)
E	مدول یانگ (Pa)
g	شتاب گرانش (m.s^{-2})
h	ضخامت ورق (m)
\bar{J}	عدد موهمومی
M	جرم بارهای عبوری (kg)
m	مود ارتعاشی سیستم
n	مود ارتعاشی سیستم
q	دامنه‌ی مودال سیستم
T	دوره تناوب سیستم (s)
t	زمان (s)
V	سرعت بارهای عبوری (m.s^{-1})
w	جابجایی عرضی ورق (m)

علائم یونانی

- [1] R. Willis, *Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures*, H. M. Stationary Office, London, 1849.
- [2] G. G. Stokes, Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges, *Trans. Camb. Philos. Soc.*, Vol. 8, pp. 707-735, 1849.
- [3] H. D. Nelson and R. A. Conover, Dynamic stability of a beam carrying moving masses, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 38, no. 4, pp. 1003-1006, 1971.
- [4] O. J. Aldraihem and A. Baz, Dynamic stability of stepped beams under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 250, no. 5, pp. 835-848, 2002.
- [5] S. Mackertich, Dynamic stability of a beam excited by a sequence of moving mass particles, *Acoustical Society of America*, vol. 115, no. 4, pp. 1416-1419, 2004.
- [6] M. Pirmoradian, M. Keshmiri, and H. Karimpour, Instability and resonance analysis of a beam subjected to moving mass loading via incremental harmonic balance method, *Vibroengineering*, vol. 16, no. 6, pp. 2779-2789, 2014.
- [7] M. Pirmoradian, M. Keshmiri, and H. Karimpour, On the parametric excitation of a Timoshenko beam due to intermittent passage of moving masses: instability and resonance analysis, *Acta Mechanica*, vol. 226, no. 4, pp. 1241-1253, 2015.
- [8] G. Nakhaie Jazzar, Stability chart of parametric vibrating systems using energy-rate method, *Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 39, No. 8, pp. 1317-1331, 2004.
- [9] H. Karimpour, M. Pirmoradian, and M. Keshmiri, Instance of hidden instability traps in intermittent transition of moving masses along a flexible beam, *Acta Mechanica*, vol. 227, no. 4, pp. 1213-1224, 2016.
- [10] D. Younesian, E. Esmailzadeh, R. Sedaghati, Asymptotic solutions and stability analysis for generalized non-homogeneous Mathieu equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 12, No. 1, pp. 58-71, 2007.
- [11] M. Ghomeshi Bozorg, M. Keshmiri, Stability Analysis of Nonlinear Time Varying System of Beam-moving Mass Considering Friction Interaction, *Indian journal of Science and Technology*, Vol. 6, No. 11, pp. 5459-5468, 2013.
- [12] J. N. Reddy, *Theory and analysis of elastic Plates and Shells*, Second Edition, pp. 95-123, New York: CRC Press, 2007.
- [13] S. Chakraverty, *Vibration of Plates.*, pp. 96-101, New York: CRC Press, 2008.