اثر اندازه یک ذره مرکب بر میزان انرژی کازمیر میدان نرده‌ای در ۱+۱ بعد

مددعلی ولوئیان*

استادیار، گروه علوم پایه (فیزیک)، واحد سمنان، **دانشگاه آزاد اسلامی**، سمنان، ایران

* سمنان، صندوق پستی ۱۷۹ -۳۵۱۴۵، m-valuyan@sbu.ac.ir

چکیده

در این مقاله اثرات ناشی از در نظر گرفتن اندازه یک ذره مرکب بر انرژی کازمیر مورد بررسی قرار داده می شود. ما معتقدیم هر پارامتری که از لاگرانژی میدان کوانتومی تحت بررسی قابل استخراج نباشد را می توان بعنوان یک پارامتر خارجی درسیستم های مرتبط با نظریه میدانهای کوانتومی تلقی نمود و در راستای این تفکر اندازه ذره در یک نظریه میدان به عنوان یک پارامتر خارجی تلقی خواهد شد. لذا در این مقاله نشان خواهیم داد که چگونه «اندازه یک ذره» به عنوان یک پارامتر خارجی می تواند مودهای مجاز انرژی خلأ را محدود نموده و نتیجه‌ی این محدود سازی چه تغییراتی را بر میزان انرژی کازمیر اعمال خواهد کرد. نکته دیگر اینکه ورود یک پارامتر خارجی (به عنوان مثال اندازه ذره) در انرژی کازمیر همچنین می تواند بازه تعریفی این کمیت فیزیکی را نیز در سیستمهای متفاوت دستخوش تغییر نماید که چگونگی این تغییر نیز به تفصیل در این مقاله مورد بحث واقع خواهد شد. در ضمن برای ترسیم و نمایش بهتر این مطلب محاسبه انرژی کازمیر یک میدان نرده ای جرم دار در یک بعد فضایی بین دو نقطه با شرط مرزی دیریکله مورد هدف واقع شده است که سازگاری مناسب و منطقی بین جوابهای بدست آمده در این مقاله در مقایسه با آنچه در کتب و مقالات گذشته بدون درنظر گرفتن اندازه ذره در این مساله بدست آمده بود وجود دارد.

کلیدواژگان

انرژی کازمیر، اندازه ذره، ارتعاشات خلأ، فرکانس

The Effect of Finite Size of Composite Particles on the Casimir Energy for Scalar Field in 1+1 Dimensions

Madad Ali Valuyan*

Department of Mechanical Engineering, Semnan Branch, **Islamic Azad University**, Semnan, Iran
* P.O.B. 35145-179, Semnan, Iran, m-valuyan@sbu.ac.ir

Abstract:

In this paper we investigate the Casimir energy for systems with the finite size of composite particles. We believe that all of the scales that naturally appear in the formulation of the problem in terms of a lagrangian and the set of boundary conditions, as internal scales. We define all other scales such as the finite size of composite particles as external scales. One of the first effects of these external scales is the restrictions could be apply on the allowed modes in the zero point energy of a system. In this paper we show how these scales (for example the finite size of composite particles) produce restrictions on the allowed modes, which alter the Casimir energy. We compare our results with those reported in the literature, which are invariably devoid of such scales, and show that the difference increases when the internal scales of the problem approach the external scales. In order to describe above effects, we use the generic and simple example of a massive scalar field confined between two points with Dirichlet boundary conditions in one spatial dimension.

Keywords:

Casimir Energy, Size of Particle, Vacuum Polarization, Frequency

۱- مقدمه

بیش از ۶۰ سال پیش میزان انرژی کازمیر به عنوان یک اثر ماکروسکوپیک ناشی از ارتعاشات خلاء (قطبش خلاء)[1] توسط کازمیر[2] در سال ۱۹۴۸ میلادی مطرح گردید[۱]. مقاله کازمیر برای مدت‌های زیاد ناشناخته باقی ماند، تا زمانی که اولین تلاش برای مشاهدهٔ این پدیده توسط اسپارنای[3] در سال ۱۹۵۸ انجام گرفت[۲]. هرچند دقت آزمایش صورت گرفته توسط اسپارنای بسیار بالا نبوده است، اما اندازه گیری های دیگری پس از او و با برطرف نمودن نقایص آزمایش اسپارنای انجام پذیرفت که بر درستی پیش بینی کازمیر صحه گذاشتند. همانطور که می‌دانیم انرژی کازمیر از اختلاف بین دو انرژی خلأ در صورت حضور شرط مرزی غیر بدیهی[4] و عدم حضور شرط مرزی حاصل می‌شود. اثر کازمیر را می‌توان به عنوان یکی از جالب ترین تجلیات ویژگی‌های غیر بدیهی حالت خلاء در نظریه کوانتومی میدان[5] برشمرد که در واقع ناشی از تغییر دو قطبش خلاء توسط شرایط مرزی یا هندسه است. به عبارت دیگر این اثر نتیجه‌ای است از اعوجاج و دگرش در طیف نوسانات خلاء با محدود شدن حجم کوانتش و یا غیر بدیهی شدن توپو لوژی فضا [۳]. باز هم به بیانی دیگر و ساده تر اینکه هر گاه انرژی نقطه صفر[6] خلاء میدان الکترومغناطیس - یا هر میدان دیگری نظیر میدان اسکالر- دستخوش تغییر واقع می‌شود این اثر پدیدار می‌گردد. همانطور که می دانیم مجموع انرژی ناشی از ارتعاشات خلاء یک مقدار واگرا و بینهایت خواهد شد.

1. Vacuum polarization
2. H.B.G. Casimir
3. M. J. Sparnaay
4. Non-trivial boundary condition
5. Quantum Field Theory
6. Zero point energy

اما وقتی در همین خلاء یک شرط مرزی دلخواه را قرار می دهیم فرکانسهای مجاز تغییر خواهند کرد اما باز هم مجموع انرژی ناشی از کل این فرکانسها واگرا ست. کازمیر در سال ۱۹۴۸ نشان داد که اختلاف این دو انرژی خلاء منجر به یک کمیت مشاهده پذیر و قابل اندازه گیری و متناهی خواهد شد که بعدها به نام انرژی کازمیر شهرت یافت. البته او از روی رابطه انرژی بدست آمده به پیش بینی وجود نیرویی به نام نیروی کازمیر که بین دو صفحه رسانای بدون بار در خلا برای قطبش های ناشی از امواج میدان الکترومغناطیس پرداخت، که بعدها توسط دیگران صحت پیش بینی کازمیر در آزمایشات انجام گرفته مورد تایید واقع گردید [۴]. همانطور که گفته شد محاسبه انرژی کازمیر همیشه مستلزم کم کردن دو عبارت بینهایت از یکدیگر است که این امر همیشه به سادگی انجام نمی‌پذیرد. در واقع در راستای انجام این امر نیاز به روشهای متفاوت منظم سازی و یا بازبهنجارش می باشد[۵]. لذا لزوم محاسبه انرژی کازمیر خود بهانه ای برای تدوین روشها و تکنیکهای متفاوت منظم سازی[۱] در جهت حذف واگرایی ها گردید و به سرعت تکنیک های بسیار زیادی در این راستا معرفی شده است که از آن جمله می‌توان به تکنیک منظم سازی تابع زتا[۲][۱۶،۶]، منظم سازی تابع گرین[۳][۷]، منظم سازی بسط چند جمله ای پراکندگی[۸]، منظم سازی کم کردن جعبه ها[۴][۹] و.... اشاره نمود. در خصوص هریک از این منظم سازی ها و مزیت ها و یا معایب احتمالی آنها در کتب و مقالات گذشته مطالب فراوانی یافت می شود[۱۷،۱۵،۱۰] که خارج از بحث این مقاله می‌باشد. کاربرد انرژی کازمیر در مباحث متفاوت فیزیک و حتی غیر فیزیک نیز اهمیت فراوانی دارد. در واقع حالت خلاء و نیز انرژی آن برای هر میدان کوانتومی، چه بوزونی و چه فرمیونی، به شرایط مرزی که بر میدان اعمال می‌شود یا در حالت کلی، بر زمینه کلاسیکی که میدان با آن برهم کنش می‌کند، بستگی دارد. همین امر باعث شده است که اثر کازمیر، به صورت یک عنوان مهم تحقیقی میان رشته ای درآید و در بسیاری از شاخه‌های فیزیک کاربرد پیدا کند. این اثر، نقش مهمی در حوزه‌های متعدد فیزیک، نظیر QFT [۵]، فیزیک ماده چگال، فیزیک اتمی-ملکولی، گرانش، کیهان‌شناسی و ریاضی فیزیک ایفا می‌کند. اشاره کوتاه به بعضی از این موارد می‌تواند تا حدی نقش اثر کازمیر را در سایر شاخه‌های فیزیک روشن‌تر نماید:

- کوارک ها درون ناحیه ای مقید شده‌اند و هیچ جریان کوارکی از این ناحیه بیرون نمی‌آید، انرژی کازمیر میدان‌های کوارکی و گلوئونی[۶]، در انرژی کل کیف[۷] (نوکلئون‌ها) سهم قابل ملاحظه‌ای دارد و باید به حساب آید.
- در فیزیک ماده چگال، اثر کازمیر بر دافعه یا جاذبه بودن نیروها در فاصله بین مرزهای مادی دلالت دارد که این موضوع به هندسه و پیکر بندی و نیز به خواص مکانیکی و الکتریکی سطوح مرزی وابسته است. این اثر پاسخی است بر بعضی از ویژگی‌های فیلم‌های نازک که باید در بررسی تنش های سطحی آنها مورد توجه ویژه واقع شود. اثر کازمیر نقش مهمی در پدیده‌های بحرانی سطح و بالک[۸] بازی می‌کند.
- اثر کازمیر در گرانش، اختر فیزیک و کیهان‌شناسی، در فضا-زمانی که توپولوژی غیر بدیهی دارد، ظاهر می‌شود. قطبش خلاء ناشی از این اثر می‌تواند روند تورمی را به عقب براند. در نظریه‌ی پیدایش ساختار جهان، بخاطر نقص توپولوژیکی، قطبش کازمیر خلاء نزدیک ریسمان-های کیهانی، ممکن است نقش مهمی داشته باشد.
- در فیزیک اتمی، برهم‌کنش اثر کازمیر بلند برد، به بعضی تصحیحات در انرژی تراز های ریدبرگ[۹] منجر می شود.
- در ریاضی فیزیک، بررسی اثر کازمیر باعث توسعه تکنیک‌های قدرتمند منظم سازی[۱۰] و بازبهنجارش[۱۱] برپایه استفاده از تابع زتا[۱۲] و بسط هسته گرمایی[۱۳][۱۱] شده است.
- ....

آنچه که در اینجا مورد بحث واقع خواهد شد این است که طبق تعریفی که از انرژی کازمیر ارائه گردید کلیه مقادیر فرکانسهای خلا مربوط به یک میدان خاص بدون شرایط مرزی باید از مقادیر فرکانسهای خلا مربوط به همان میدان با حضور یک شرط مرزی کاسته شود. همانطور که می دانیم طبق نظریات مطرح شده در مدل استاندارد می توان ذرات بنیادین و یا ذرات مرکب را با استفاده از معرفی میدانهای کوانتومی توضیح داد و خواص مربوط به آن را با استفاده از مدل تعریف شده در نظریه میدان کوانتومی مربوط به آن بنوعی استخراج نمود. به عنوان مثال برای ذره ای مرکب به مانند پایون (π^0) می توان از لاگرانژی کلاین-گوردون[۱۴] برای میدان نرده‌ای جرم دار[۱۵] استفاده نمود و کلیه جوانب متفاوت آنرا با استفاده از این مدل توصیف کرد. هدف اصلی این مقاله بررسی اثرات ناشی از یک پارامتر خارجی در انرژی کازمیر است. در یک لاگرانژی ممکن است پارامترهایی متفاوتی وجود داشته باشد که در اینجا این پارامتر ها را به دو دسته پارامترهای خارجی و پارامترهای داخلی تقسیم بندی خواهیم کرد. قبل از شروع جزئیات دیگر بحث لازم است به ارائه توضیحاتی بپردازیم که منظور ما را از پارامتر خارجی و داخلی روشن نماید. پارامترهایی که در لاگرانژی کلاین–گوردون وجود دارند به مانند جرم ذره و یا ثابت جفت‌شدگی و ... را اصطلاحا در این مقاله پارامترهای داخلی و طبیعی آن میدان نامگذاری خواهیم کرد و در واقع به صورت کلی در اینجا منظور از پارامترهای داخلی پارامترهایی هستند که یا در لاگرانژی میدان تحت بررسی قرار دارند و یا از ابعاد ناشی از شرایط مرزی مساله ناشی می شوند (به مانند فاصله دو صفحه موازی و ....) و منظور از پارامترهای خارجی نیز پارامترهایی هستند که شرایط فوق را دارا نبوده و در واقع پارامترهای ثانویه ای هستند مانند ابعاد ذره مرکب، طول عمر ذره ناپایدار، طول پلانک و مانند آن که به صورت غیر مستقیم در محاسبه یک کمیت فیزیکی و مشاهده پذیر ورود یافته و یا در محدوده های خاصی از انرژی (انرژی های بالا) اثرات قابل ملاحظه ای از خود نشان می دهند. در مقالاتی که به بررسی و محاسبه انرژی و نیروی کازمیر پرداخته‌اند، پارامترهای لاگرانژی در راستای انجام محاسبات برای یک میدان خاص به صورت معمول در رابطه انرژی ظاهر شده و تاثیرات ناشی از آن نیز مورد بحث واقع شده است. اما کمتر مقالاتی به بررسی تاثیرات پارامترهای خارجی در انرژی کازمیر پرداخته‌اند[۱۲]. در همین جا لازم است ذکر کنیم که بررسی

1. Regularization techniques
2. Zeta function regularization
3. Green's function regularization
4. Box subtraction scheme
5. Quantum Field Theory
6. Gluon
7. Total Bag energy
8. Bulk
9. Rydberg Energy Level
10. Regularization Technique
11. Renormalization
12. Zeta Function
13. Heat kernel expansion
14. Clein-Gordon Lagrangian
15. Massive Scalar Field

اثرات ابعاد کوچک و بنیادین به مانند «بعد پلانک» در مقاله [۱۳] در گذشته مورد بررسی قرار گرفته است که در البته در جای خود درست و ارزشمند است. اما در این مقاله می خواهیم یک قدم فراتر نهاده و به اثر اندازه ذره مرکب در انرژی کازمیر به عنوان یک پارامتر خارجی بپردازیم. در واقع در این مقاله ما عقیده داریم که تاثیرات ناشی از ابعاد ذره مرکب در یک کمیت فیزیکی به مانند انرژی کازمیر می تواند بسیار بیشتر از تاثیراتی باشد که از ابعاد کوچک و بنیادین، مثل طول پلانک، ناشی شده است. با توجه به اینکه معمولا (تقریبا همیشه) اندازه یک ذره مرکب از طول پلانک بزرگتر است بررسی اثرات ناشی از آن نیز بر انرژی کازمیر مقدم تر خواهد بود. زیرا همانطور که میدانیم طول پلانک می تواند یک مقدار قطع[1] بر مجموع فرکانسهای مجاز انرژی خلاء ایجاد نماید، حال با توجه به اینکه اندازه ذره همیشه بزرگتر از طول پلانک است مقدار قطع کوچکتری را روی جمع فرکانسها اعمال خواهد کرد و این امر منجر به کوچکتر شدن بازه تعریفی مود های مجاز فرکانسی خواهد شد لذا از این منظر بررسی اثر اندازه ذره بر انرژی کازمیر مقدم تر است و می تواند تغییرات بزرگتری را در محاسبه انرژی کازمیر ایجاد نماید. با این استدلال اصولا همه فرکانسها در محاسبه انرژی نقطه صفر چه در حالت خلا و چه در حالتی که شرایط مرزی در مساله وجود دارد نمی‌تواند مجاز شمرده شود. در واقع یک ذره مرکب در فرکانسهای بسیار بالا یکتایی خود را از دست داده و بنابراین نظریه میدان کوانتومی مرتبط با آن در انرژی های بالا تغییر می یابد. به عنوان مثال ذره ای مانند پایون در فرکانسهای بسیار بالا به مانند دو ذره کوارک مجزا از هم دیده می شود و بکار بردن لاگرانژی کلاین – گوردون و میدان نرده ای در خصوص آن بی معنا خواهد شد. لذا وجود یک مقدار قطع بر فرکانسها ضروری بنظر می‌رسد. برای انجام این امر در وهله اول لازم است نحوه ایجاد مقدار قطع را با توجه به اندازه ذره بدانیم. همانطور که در بالا نیز توضیح داده شده است در فرکانسهای بالا ذره یکتایی خود را از دست خواهد داد. به معنای دقیقتر اینکه اگر طول موج فرکانسی که مورد نظر است از اندازه ذره کوچکتر باشد در واقع ذره مرکب در قبال آن طول موج به مانند یک ذره واحد محسوب نخواهد شد و در آن صورت احتساب یک میدان کوانتومی واحد برای آن دارای اشکال است. لذا فرکانسی که طول موج آن از اندازه ذره کوچکتر باشد به دلیل آنکه یکتایی ذره مرکب را تهدید می کند نمی‌تواند فرکانسی مجاز محسوب شود. همین نکته را دستمایه ای برای ایجاد مقدار قطع بر روی انرژی خلا قرار می-دهیم. در بخش بعد به صورت کمی و دقیقتر طریقه اعمال این مقدار قطع را روی فرکانسها توضیح خواهیم داد. در بخش بعد همچنین ما به محاسبه انرژی کازمیر برای یک میدان نرده ای جرم دار دریک بعد فضایی با اعمال شرط مرزی دیریکله[2] خواهیم پرداخت و اثرات ناشی از ابعاد یک ذره مرکب را روی این انرژی مورد بررسی قرار خواهیم داد. در نهایت نیز نتایج حاصله را با نتایج انرژی کازمیر که در گذشته بدون در نظر گرفتن ابعاد مذکور بدست آمده است مقایسه خواهیم کرد.

۲- اندازه ذره در انرژی کازمیر

ابتدا سعی می شود طریقه بدست آوردن انرژی کازمیر مربوط به میدان نرده ای جرم دار در یک بعد فضایی بدون در نظر گرفتن هیچ پارامتر خارجی را یادآور شویم. همانطور که می دانیم انرژی نقطه صفر خلا برای چنین میدانی با شرایط ذکر شده و بدون در نظر گرفتن یک پارامتر خارجی را می توان از عبارت زیر بدست آورد:

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\hbar\omega_n \qquad (۱)$$

که در آن $\omega_n=c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+m^2}$ بوده و فرکانسهای مجاز را به ازاء تغییرات n بین دو نقطه که به فاصله a از هم واقع شده‌اند و شرایط مرزی اعمال شده روی دو نقطه نیز شرط مرزی دیریکله است بدست می دهد. برای بدست آوردن انرژی کازمیر با استفاده از روش منظم سازی کم کردن جعبه‌ها اقدام نموده و با استفاده از رابطه ایبل–پلانا می‌توان نشان داد که رابطه انرژی کازمیر از انتگرال زیر بدست می آید:[۱۴]

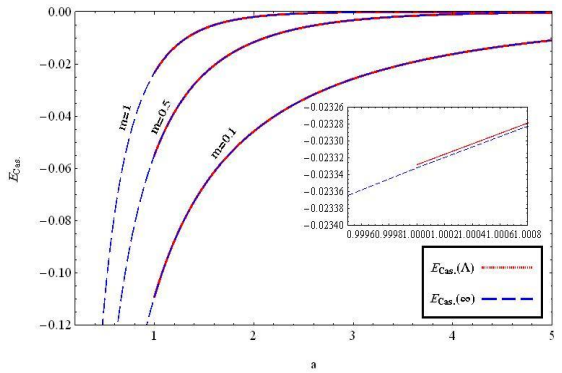
$$E_{Cas.}=-\int_{\frac{ma}{\pi}}^{\infty}\mathrm{d}t\frac{\sqrt{\left(\frac{\pi t}{a}\right)^2-m^2}}{e^{2\pi t}-1} \qquad (۲)$$

که در آن برای سادگی $\hbar=\mathrm{c}=1$ فرض شده است. خوشبختانه این انتگرال دارای پاسخی تحلیلی بوده و می‌توان جواب آن را به صورت ذیل نوشت:

$$E_{Cas.}=\frac{-m}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{K_1(2maj)}{j} \qquad (۳)$$

که البته پاسخ مذکور برای میدانهای بدون جرم و یا میدانی با جرمهایی بسیار بزرگ به عبارات زیر منتهی خواهد شد که نحوه محاسبه آن در مقالات بسیاری ذکر گردیده که در این مقاله نیاز به توضیح آن نمی‌باشد: [۱۴-۱۷]

$$E_{Cas.}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{-\pi}{24a} & as\ m\to 0\\ \dfrac{-1}{4}\sqrt{\dfrac{m}{\pi a}}e^{-2ma} & as\ \ ma\gg 1\end{cases} \qquad (۴)$$



شکل ۱ در این نمودار میزان انرژی کازمیر به ازاء جرمها ی $m=1,0.5,0.1$ در دو حالت (با در نظر گرفتن اندازه ذره و بدون در نظر گرفتن آن) بر حسب فاصله دو نقطه یعنی a رسم شده است. نمودار نقطه چین میزان انرژی کازمیر را بدون در نظر گرفتن اندازه ذره و نمودار خطی میزان انرژی کازمیر را با در نظر اندازه ذره با میـزان $R=1$ نشان می‌دهد.

حال به محاسبه و بررسی انرژی کازمیر برای میدان نرده‌ای بین دو نقطه در یک بعد فضایی با شرط مرزی دیریکله، این بار، با در نظر گرفتن اندازه ذره ای مرکب می پردازیم. آنچه که می‌دانیم این است که ذره‌ای مرکب و با اندازه‌ی محدود نمی‌تواند هر فرکانسی را در انرژی نقطه صفر به خود اختصاص دهد. در واقع باید سقفی را برای انرژی این ذرات در نظر گرفت. اگر فرض کنیم

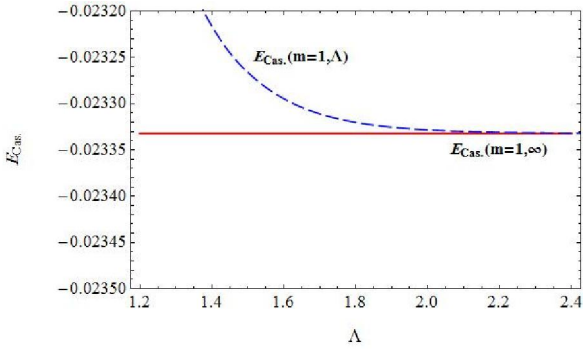
1. Cut-off
2. Dirichlet boundary condition

اندازه ذره برابر R باشد طول موج فرکانس‌های مجاز در انرژی نقطه صفر خلاء باید بیشتر از ابعاد ذره فرضی باشد لذا با استفاده از این استدلال می توان این محدود سازی را مطابق عبارات زیر انجام داد:

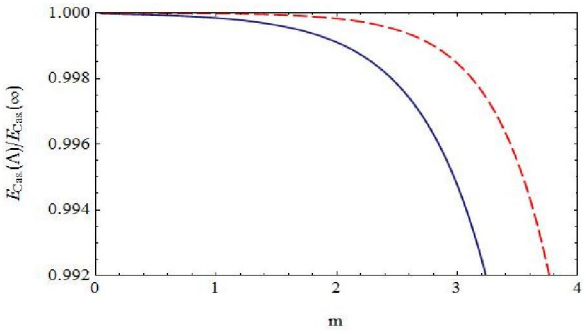
$$\lambda > R \Rightarrow \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} < \frac{2\pi}{R} \Rightarrow k < k_{\text{Max.}} = \Lambda \quad (۵)$$

که در واقع مقدار $k_{\text{Max.}}$ همان میزان قطع لازمه برای حد بالای انتگرال موجود در معادله (۲) می باشد.

لذا می‌توان این بار معادله (۲) را با جایگزین نمودن مقدار قطع Λ به جای حد بالای انتگرال دوباره محاسبه نمود. متاسفانه محاسبه تحلیلی این انتگرال به مانند آنچه که در رابطه (۳) بدست آمده است امکان پذیر نمی‌باشد لذا محاسبه انتگرال فوق را به ازاء مقادیر متفاوتی از جرم و اندازه ذره به صورت عددی محاسبه نموده ایم که می توان اثرات ناشی از این تغییرات را در نمودارهای رسم شده در شکل (۱) بحث نمود. نکته دیگری که در نمودار شکل (۱) باید مورد توجّه واقع شود بازه تعریف انرژی کازمیر است. ما اعتقاد داریم که انرژی کازمیر یک ذره با اندازه R نمی‌تواند برای فواصل کمتر از R ($a < R$) تعریف‌پذیر باشد. لذا این نکته را در نمودار شکل (۱) رعایت نموده و در واقع نمودار انرژی کازمیر وقتی با در نظر گرفتن اندازه ذره محاسبه شده است، در مقادیر کمتر از R رسم نشده است.



شکل ۲ در این نمودار میزان انرژی کازمیر به ازاء جرم $m = 1$ و $a = 1$ برحسب مقادیر قطع متفاوت رسم شده است. این نمودار به راحتی نشان می دهد که هر چقدر اندازه ذره به ابعاد شرایط مرزی نزدیکتر شود میزان تاثیر گذاری آن بر انرژی کازمیر نیز بیشتر خواهد بود.



شکل ۳ در این نمودار میزان انرژی کازمیر به ازاء دو مقدار از فاصله با مقادیر $a = 1, 1.2$ به ازاء $R = 1$ بر حسب تغییرات جرم رسم شده است. نمودار نقطه چین به ازاء $a = 1$ و نمودار خطی به ازاء $a = 1.2$ رسم شده است.

هر چقدر فاصله دو نقطه ای که شرایط مرزی را بر آن اعمال نموده ایم به اندازه ذره نزدیکتر شود براساس رابطه (۵) مقدار قطع کوچکتری را ایجاد خواهد نمود، بنابراین تغییرات بیشتری بر انرژی کازمیر لحاظ می کند و در واقع اینطور بنظر می رسد که تعداد مود های بیشتری از جمع مودهایی که انرژی نقطه صفر را می سازند، خارج شده است. لذا تغییرات بزرگتری را در اندازه انرژی کازمیر موجب می شود. این مطلب را می توان از نمودار شکل (۲) براحتی استنتاج نمود. در نمودار شکل (۳) اثرات مقدار قطع را با توجه به تغییرات جرم نیز مورد بررسی قرار داده ایم. این نمودار نشان می دهد هر چقدر جرم ذره سنگین تر باشد اثرگذاری اندازه ذره بر میزان انرژی کازمیر مربوط به آن کاهش می یابد. در واقع برای دو ذره هم اندازه در یک شرط مرزی یکسان همانطور که در شکل (۳) نیز پیدا است میزان و سرعت انحراف اعمال شده روی میزان انرژی کازمیر برای ذره سبک تر بیشتر بوده است. این نکته نشان می دهد برای میدانهای بدون جرم بررسی اثر سایز ذره می تواند از اهمیت بیشتری برخوردار باشد. گسترش این ایده در بررسی مدل‌های با ابعاد بالاتر توسط نویسنده در حال انجام است و انتظار می رود نتایجی که در این مقاله برای یک مساله یک بعدی حاصل شده است برای مدل‌های با ابعاد بالاتر هم صادق باشد. از آنجا که بررسی اثر کازمیر در بعد های زوج فضایی همراه با دشواری های زیادی همراه است این مساله می تواند برای بعد های بالاتر (خصوصا در ابعاد زوج فضایی) به عنوان یک مساله باز[1] باقی بماند.

۳- تقدیر و تشکر

بدینوسیله از جناب آقای دکتر سیامک سادات گوشه نیز بابت راهنمایی-های روشنگرانه و هدایت اینجانب در جهت هدایت دقیق موضوع مذکور جهت وصول نتیجه صمیمانه تشکر می نمایم.

۴- مراجع

[1] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet., vol. 51, p. 793, 1948 .
[2] M. J. Sparnaay, *Measurements of attractive forces between flat plates*, Physica, vol. 24, p. 751, 1958 .
[3] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, and U. Mohideen, *Advances in the Casimir effect*, 1st Ed. ed., New York: Oxford Univ. Press Inc., 2009 .
[4] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, world Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001 .
[5] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *New Developments in the Casimir Effect*, Phys. rep., vol. 353, p. 1, 2001 .
[6] V. V. Nesterenko and I. G. Pirozhenko, *Spectral Zeta Functions for a Cylinder and a Circle*, J. Math. Phys., vol. 41, p. 4521, 2000 .
[7] K. A. Milton, L. L. Deraad and S. J., *Casimir self-stress on a perfectly conducting spherical shell*, Ann. Phys. (N.Y.), vol. 115, p. 388, 1978 .
[8] R. Balian, and B. Duplantier, *Electromagnetic waves near perfect conductors. II. Casimir effect*, Ann. Phys. (N.Y.), vol. 112, p. 165, 1978 .
[9] M. A. Valuyan, R. Moazzemi, and S. S. Gousheh, *A direct approach to the electromagnetic Casimir energy in a rectangular waveguide*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., vol. 41, p. 145502, 2008 .
[10] S.S. Gousheh, R. Moazzemi, M.A. Valuyan, Radiative correction to the Dirichlet Casimir energy for λφ4 theory in two spatial dimensions, Phys. Lett. B, vol. 681, p. 477–483, 2009 .
[11] B. S. DeWitt, Phys. Rep., vol. 19, p. 297, 1975 .
[12] K. Nouicer, *Casimir effect in the presence of minimal lengths*, Journal of Physics A Mathematical General, vol. 38, p. 10027, 2005 .
[13] K. Poppenhaeger, S. Hossenfelder, S. Hofmann, and M. Bleicher, *The Casimir Effect in the Presence of a Minimal Length*, Phys. Lett. B, vol. 632, p. 379, 2006 .
[14] Reza Moazzemi; Siamak S. Gousheh, A new renormalization approach to the Dirichlet Casimir effect for φ4 theory in 1+1 dimensions, Phys. Lett. B, vol. 658, pp. 255-265, 2008 .
[15] F. A. Barone, R. M. Cavalcanti and C. Farina, hep-th/0306011 .
[16] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytesenko and S. Zebrini, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, Singapore: World Scientific, 1994 .

1. Open Problem

[17] B. S. DeWitt, Phys. Rep., vol. 19, p. 297, 1975.