

تحلیل ارتعاشی میکرولوله تحت تأثیر میدان‌های سرعت و دما با استفاده از روش عددی

بدون المان درونیابی نقطه‌ای

بهروز آریان‌نژاد^{۱*}، مه‌ران فاضلی^۱^۱ گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران**Vibrational Analysis of micropipe under the influence of Velocity and Temperature fields using the Point interpolation Meshless method**Behrooz Ariannezhad^{*1}, Mehran Fazeli¹¹Department of Mechanical Engineering, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran**Abstract**

Tubes with diameters in micro and nano dimensions with long length, while having a special manufacturing technology, have wide applications in the field of biosensors, atomic microscopes, actuators, tanks for fluid transfer in drug delivery, etc. The reason for the wide application of micropipes is their hollow geometry and very good mechanical properties. In this research, while comparing and using the classical theory of continuous medium mechanics and the non-classical theory of strain gradient based on the classical Euler-Bernoulli beam model and von-Carman nonlinear geometry, the mathematical equations are expressed in terms of three longitudinal parameters, then to investigate the vibrations of the micropipe under the influence Velocity and temperature fields are discussed. For this purpose, the frequencies and vibration amplitudes have been calculated by the integral solution of the governing differential equations using the point interpolation numerical meshless method of the displacement field, and the effect of temperature and diameter on the linear and non-linear behaviors in the micropipe has been studied. The findings of the research, while showing the effectiveness of the point interpolation numerical meshless method with base functions developed for the mentioned analysis, state that; by reducing the diameter of the micropipe, the natural frequency and critical speed increase and when the temperature increases, resulting in a decrease in the basic frequency and an increase in the amplitude and becomes the nonlinear behavior of micropipe.

Keywords: Vibration in micropipe, non-classical theory of strain gradient, point interpolation numerical meshless method, velocity and temperature field, linear and non-linear behavior of microtube

Received: 30/04/2023

Accepted: 10/06/2023

چکیده

لوله‌های با قطر در ابعاد میکرو و نانو با طول زیاد ضمن اینکه از تکنولوژی ساخت خاصی برخوردار هستند، کاربردهای وسیعی در زمینه حسگرهای زیستی، میکروسکوپ‌های اتمی، محرک‌ها، مخازن جهت انتقال سیال در دارو رسانی و... دارند. علت کاربرد فراوان میکرولوله‌ها، هندسه تو خالی و خواص مکانیکی بسیار خوب آنهاست. در این تحقیق ضمن مقایسه و بهره‌گیری تئوری کلاسیک مکانیک محیط پیوسته و تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنشی بر اساس مدل کلاسیک تیر اولربرنولی و هندسه غیرخطی وون-کارمن، معادلات ریاضی بر حسب سه پارامتر طولی بیان، آنگاه به بررسی ارتعاشات میکرولوله تحت تأثیر میدان سرعت و دما پرداخته می‌شود. برای این منظور با حل انتگرالی معادلات دیفرانسیلی حاکم به روش درونیابی نقطه‌ای میدان جابجایی، فرکانس‌ها و دامنه ارتعاشی محاسبه شد و تأثیر دما و قطر بر رفتارهای خطی و غیرخطی در میکرولوله مورد مطالعه قرار گرفته است. یافته‌های تحقیق ضمن نشان دادن کارایی روش عددی بدون المان درونیابی نقطه‌ای با توابع پایه توسعه یافت جهت تحلیل یاد شده، بیان می‌دارند که با کاهش قطر میکرولوله، فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی افزایش و افزایش دما، موجب کاهش فرکانس پایه و افزایش دامنه و رفتار غیرخطی میکرولوله‌ها می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ارتعاش در میکرولوله، تئوری غیر کلاسیک گرادیان کرنش، روش عددی بدون المان درونیابی نقطه‌ای، میدان سرعت و دما، رفتارهای خطی و غیر خطی میکرولوله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۲۰

* نویسنده مسئول: بهروز آریان‌نژاد

نشانی: اهواز، گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی

پست الکترونیکی: behrooz_ariannezhad@yahoo.com & behrooz-ariannezhad@iau.ac.ir

۱. مقدمه

فناوری نانو توانایی بکار گرفتن و کنترل ماده در مقیاس مولکولی جهت استفاده در سیستم‌های نوین و تحلیل رفتار آنها است. در واقع نانوعلم، یک فناوری با رویکرد نظری-کاربردی جدید، در تمام رشته‌ها است. مطالعات تجربی نشان می‌دهند که ویژگی‌های یک ماده خالص، مشروط بر اینکه شرایط محیطی کارکرد و بارگذاری اعمال شده خاص نباشد، می‌تواند در مطالعات ثابت فرض شوند. این امر سبب می‌شود که مواد از روی خواص‌شان شناسایی شوند. کوچک کردن ذرات، یک تغییر فیزیکی بشمار می‌رود و طبیعتاً این تغییر باید مستقل از تغییر ویژگی‌های اصلی مواد باشد. ولیکن پژوهش‌ها نشان داده‌اند که ماده در مقیاس میکرو و نانومتری ویژگی‌های متفاوتی با ذرات بزرگتر خود دارد. لذا انجام مطالعات و تحلیل‌های مهندسی، جهت ساخت قطعات و ابزارسازی در مقیاس نانو و میکرو، امری ضروری است. قابلیت بالای استفاده از میکرولوله‌ها در ساخت تجهیزات صنعتی پیشرفته، حسگرهای زیستی، محرک‌ها، مخازن جهت انتقال سیال در دارو رسانی انتقال دارو، میکروسکوپ‌های اتمی و... بر اهمیت مطالعه رفتار آنها افزوده است. به عنوان نمونه در میکروسکوپ نیروی اتمی که ابزاری قدرتمند در مهندسی سطح در زمینه تصویربرداری و شناسایی مواد در ابعاد نانو است و با تفکیک اتمی و در سه مد تماسی، غیر تماسی و کوبشی کار می‌کند، از میکرولوله‌ها به عنوان قطعه-ای مهم و کاربردی بهره می‌گیرند. چون میکرولوله‌ها قابلیت مطلوبی در ایجاد توزیع یکنواخت دما دارند از آنها به شکل وسیع در دفع گرمای ایجاد شده در تجهیزات الکترونیکی و کامپیوتری که در حجم کوچک جاسازی می‌شوند استفاده زیادی می‌شود. در برخی از مبدل‌های حرارتی پیشرفته در حال حاضر از میکرولوله‌های حرارتی استفاده می‌شود. قطر برخی از انواع میکرولوله‌های بکار رفته در این مبدل‌های حرارتی حتی به کمتر از $0.1/0.1$ اینچ ($4/54$ میکرون) می‌رسد.

توانایی تحمل فشار بسیار بالا در داخل لوله‌ها، انعطاف-پذیری بالا با وجود توانایی تحمل آسیب‌های ناشی از رسوب، توانایی چیدمان دقیق، افزایش انتقال حرارت به دلیل افزایش سطح انتقال حرارت نسبت به لوله معمولی در حجم برابر اشاره نمود. میکرولوله‌ها در فرآیند میکروفیوژها در میکرو سانتی‌فیوژهای مورد استفاده در آزمایشگاه‌های تشخیص طبی پیشرفته جهت رسوب‌دهی، تهیه پلاسما، افزایش غلظت در سلول‌ها از طریق ایجاد رسوب، جداسازی پروتئین، امور مرتبط با PCR ملکولی و ژنتیکی همچون RNA و DNA در نمونه‌های مورد آزمایش بیماران روز به روز افزایش می‌یابد. ساخت میکرولوله‌های دارای قطری در ابعاد میکرو با طول زیادتر از تکنولوژی خاص و فرآیند دشواری برخوردار است. روش ماشینکاری میکرو تخلیه‌ی الکتریکی^۱ برای ایجاد سوراخ‌هایی با عمق ۱۰ برابر قطر و برای سوراخ‌های $0.3/0.3$ میلیمتر از روش بکارگیری الکترودهای تو خالی و یا الکترودهای لوله‌ای استفاده می‌شود [۱]. پژوهش‌های تجربی، رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه‌ها را در ابعاد میکرو و نانو، وابسته به سایز که خود تابعی از جنس ماده است، بیان می‌دارند [۲-۵]. تئوری‌های کلاسیک و رایج در مکانیک محیط‌های پیوسته نمی‌توانند این وابستگی به سایز در رفتارهای مکانیکی را پیش‌بینی نمایند. لذا تئوری‌هایی نظیر، تئوری تنش کوپل^۲ تئوری گرادیان کرنش^۳، تئوری اثر سطح^۴ و تئوری غیر موضعی^۵ جهت لحاظ اثر اندازه معرفی گردیده‌اند [۶-۸]. تاکنون تحقیقات تکمیلی و زیادی برای مطالعه رفتار میکرو تیرها، میکرو میله‌ها، میکرو محورها و میکرو لوله‌ها و میکرو ورق-ها با استفاده از تئوری تنش کوپل انجام شده است که طی آنها محققان سعی نموده‌اند تئوری‌های رایج جهت تحلیل نظیر تئوری کلاسیک تیر تیموشنکو و اولر برنولی را جهت بکارگیری در مقیاس میکرو و نانو بهینه‌سازی یا تعمیم دهند و یا به اصلاح و کاهش تعداد پارامترهای طول یا موثر در تحلیل بپردازند [۹-۱۵]. در بحث تحلیل ارتعاشی

⁴ Surface effect

⁵ Nonlocal

¹ Micro electrodischarge machining

² Couple Stress

³ Strain gradient

همکاران [۳۴]، به ارائه یک فرمول‌بندی جدید برای بررسی میکرو تیرهای حافظه‌دار، تحت بارگذاری دینامیکی خمشی پرداختند. آنها برای رسیدن به هدف خود تئوری‌های تئوری-های نوین سینوسی را با تئوری‌های کلاسیک مقایسه، اصلاح نموده و محدوده کاربرد آنها را بر حسب ویژگی‌های طولی در میکرو تیر مشخص کردند. تای و همکاران [۳۵]، بر مبنای تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده به تحلیل خمشی استاتیکی، ارتعاش آزاد در میکرو ورق‌های حافظه‌دار پرداختند. معادلات حاکم را از اصل کار مجازی استخراج نموده و نشان دادند که، با در نظر گرفتن شیب منحنی کرنش می‌توان به میزان سفتی، کاهش یا افزایش جابجایی‌ها و فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی کماتش را با یک مدل سه پارامتری تفسیر نمود. ژانگ یو تی و همکاران [۳۶]، به ارائه یک مدل دو جهته برای تحلیل ارتعاش خمشی میکرو تیرها با استفاده از روش هم‌هندسی مبتنی بر نرزه‌ها پرداخته و اثرا اندازه در جهت محوری و ضخامت را تبیین نمودند. هیو اچ و همکاران [۳۷]، به بررسی محاسباتی استفاده از تلفیق روش هم‌هندسی و تئوری گرادیان کرنشی در تحلیل ارتعاشی میکرو سازه‌ها پرداختند. آنها بیان نمودند که اثرات مقیاس کوچک منجر به افزایش سفتی و کاهش انحراف و افزایش فرکانس می‌شود. دایناچاندرا و آلنکر [۳۸]، به فرمول‌بندی تئوری گرادیان اصلاح شده بر اساس تئوری اور برنولی در تیرها و تلفیق آن با روش هم‌هندسی جهت تحلیل استاتیکی و دینامیکی و مدلسازی ریز سازه‌های حافظه‌دار پرداختند. در این تحقیق رفتار ارتعاشی غیرخطی میکرولوله‌ها بر اساس تئوری گرادیان کرنش تحت میدان سرعت و دمای سیال درون آن مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین ضمن ارزیابی کارایی روش عددی بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای در انجام محاسبات عددی معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر تحلیل میکرو لوله‌ها به بررسی اثر قطر بر رفتار خطی و غیرخطی ارتعاش و میزان فرکانس نیز پرداخته خواهد شد.

میکرولوله‌های حاوی جریان، وانگ [۱۶] و زا و وانگ [۱۷]، همچنین آهنگر و همکاران [۱۸]، از تئوری‌های اولر برنولی و تیموشنکو در کنار تئوری تنش کوپل بهره بردند و بیان نمودند که فرکانس ناشی از ارتعاشات خطی وابسته به اندازه است. در ادامه این پژوهش، یانگ و همکاران [۱۹]، ارتعاشات غیرخطی میکرولوله‌ی حاوی جریان را با تئوری تنش کوپل بررسی کردند. تئوری گرادیان کرنشی که توسط میدلین [۲۰] ارائه گردید، حالت عمومی تئوری تنش کوپل بوده که هم بخش متقارن و هم بخش پادمقارن تغییرات کرنش مرتبه بالا را شامل می‌شود. فلک و هوتچینسون [۲۲]، [۲۱] این تئوری را تکمیل کردند. در تئوری گرادیان کرنش، تانسور گرادین کرنش به دو تانسور گرادیان اتساع و گرادیان چرخش تجزیه می‌شود که تئوری تنش کوپل فاقد این دو است. این تئوری دارای ۵ ثابت اضافی طول و ۲ پارامتر کلاسیک ماده برای مواد الاستیک همگن است. بعدها این تئوری بهبود با به کار بردن معادلات تعادل جدید بهبود و تعداد پارامترهای طولی آن از ۵ به ۳ کاهش پیدا کرد. بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیرها با تئوری‌های خطی و غیرخطی کلاسیک تیر اولر برنولی و تئوری تیموشنکو با بهره‌گیری از تئوری گرادیان کرنش و در نظر گرفتن انرژی سطح به صورت غیرخطی از جمله مطالعات انجام شده بر روی میکرو تیرها هستند [۲۸-۲۳]. قایش و همکاران [۲۹]، ارتعاشات اجباری غیرخطی میکرو تیرها را با استفاده از تئوری گرادیان کرنش بررسی کرده و وابستگی به اندازه در رفتار مکانیکی بودن را ارائه نمودند. یین و همکارانش [۳۲] سپس فرشیدفر و سمدی [۳۳]، رفتار دینامیکی میکرولوله‌های حاوی جریان را با بهره‌گیری از تئوری‌های تیر اولر-برنولی و تیموشنکو بر اساس تئوری مرتبه بالا گرادیان کرنش تحلیل عددی نموده و فرکانس طبیعی در سرعت‌های مختلف میکرولوله‌ها را محاسبه نمودند چون رفتار مکانیکی در ابعاد میکرو و نانو اساساً غیرخطی است، از طرفی، با توجه به حضور میکرولوله‌ها در محیط‌های مختلف، دما یکی از پارامترهای تأثیرگذار در طراحی سیستم‌های میکروسیالی است. باسیونی و

۲. تئوری پژوهش

۲.۱. تئوری گرادیان کرنش

بر اساس تئوری گرادیان کرنش، چگالی انرژی جنبشی تابعی از تانسور کرنش متقارن، بردار گرادیان تأخیر^۱، تانسور گرادیان انحراف اتساع^۲ و تانسور گرادیان چرخش متقارن است. مدل محیط پیوسته انرژی کرنشی برای مواد ایزوتروپیک الاستیک خطی در ناحیه Ω با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های کوچک به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۱و۴]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij} \chi_{ij}) dv \quad (۱)$$

که در آن ε_{ij} تانسور کرنش وون-کارمن، γ_i بردار گرادیان تأخیر، $\eta_{ijk}^{(1)}$ تانسور انحراف طولی و χ_{ij} تانسور متقارن چرخش بوده که به ترتیب عبارتند از:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \frac{1}{2} (\partial_i u_m \partial_j u_m) \quad (۲)$$

$$\gamma_i = \partial_i \varepsilon_{mm} \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} \eta_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{3} (\partial_i \varepsilon_{jk} + \partial_j \varepsilon_{ki} + \partial_k \varepsilon_{ij}) \\ &- \frac{1}{15} [\delta_{ij} (\partial_k \varepsilon_{mm} + 2 \partial_m \varepsilon_{mk}) \\ &+ \delta_{jk} (\partial_i \varepsilon_{mm} + 2 \partial_m \varepsilon_{mi}) + \delta_{ki} (\partial_j \varepsilon_{mm} \\ &+ 2 \partial_m \varepsilon_{mj})] \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ipq} \partial_p \varepsilon_{qj} + e_{jqp} \partial_p \varepsilon_{qi}) \quad (۵)$$

برای یک ماده ایزوتروپیک الاستیک خطی، تانسور کلاسیک تنش σ_{ij} ، کار مزدوج تانسور کرنش ε_{ij} ، محسوب می‌شود. لذا تنش‌های مرتبه بالای p_i ، $\tau_{ijk}^{(1)}$ و m_{ij} به ترتیب کارهای مزدوج γ_i ، $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij} محسوب شده که عبارتند از:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (۶)$$

$$p_i = 2l_0^2 G \gamma_i \quad (۷)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2l_1^2 G \eta_{ijk}^{(1)} \quad (۸)$$

$$m_{ij} = 2l_2^2 G \chi_{ij} \quad (۹)$$

در این معادلات λ و G ضرایب کلاسیک لمه و مدول برشی و d_0 ، l_1 و l_2 پارامترهای مستقل طولی که به ترتیب مربوط به گرادیان تأخیر، گرادیان انحراف طولی و گرادیان چرخش می‌شوند [۲۳].

۲.۲. روش عددی بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای

روش عددی بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای را می‌توان برای حل انتگرالی معادلات دیفرانسیل حاکم بر تحلیل مسایل مکانیک جامدات بکار گرفت. در این روش عددی، تابع تقریب مورد استفاده برای میدان‌های جابجایی، تنش و کرنش مطابق رابطه (۱۰) است. در این تحقیق جهت دستیابی به پاسخ‌های دقیق‌تر با اضافه کردن تابع پایه چند رُبعی روش توسعه داده می‌شود [۴۳].

$$u^h(X) = \sum_{j=1}^m P_j(X) b_j + \sum_{i=1}^n R_i(X) a_i \quad (۱۰)$$

که در آن $P_j(X)$ توابع پایه چند جمله‌ای مبتنی بر هرم خیام-پاسکال و $R_i(X)$ تابع پایه چند رُبعی^۳ به صورت زیر خواهند بود:

$$P^T(X) = [1 \ x \ y \ z], \quad R_i(x, y, z) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q \quad (۱۱)$$

m, n تعداد جملات توابع پایه چند جمله‌ای و چند رُبعی، b_j و a_i ضرایب مجهول توابع پایه بوده که بر مبنای تعداد نقاط گره‌ای در دامنه پشتیبان محلی با حل $m+n$ معادله دارای $m+n$ بدست می‌آیند. α_c و q دو پارامتر شکل مثبت فرض شده که توسط تحلیلگر با مقدار بهینه یا استاندارد تعیین می‌گردند. d_c بُعد دامنه پشتیبان و r_i فاصله شعاعی بین نقطه مورد بررسی تا نقطه گره‌ای در مختصات دکارتی می‌باشند. با یافت شدن ضرایب مجهول، توابع شکل جهت تقریب میدان جابجایی برابر است با:

$$\Phi(X)_{(1*n)} = \{R^T \ P^T\} G^{-1} \quad (۱۲)$$

که در آن G ، ماتریس درون‌یاب کلی است. توابع شکل رابطه (۱۲) همه مثبت و یکنواخت با خواص تابع دلتای درایک بوده و مجموع آنها برابر واحد است. می‌توان میدان جابجایی

³ Multi-Quadratics

¹. dilation gradient vector

². deviatoric stretch gradient tensor

بنابراین تنها مؤلفه غیر صفر کرنش غیرخطی وون-کامن عبارت است از:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (16)$$

با توجه به روابط (۸) و (۱۶) می‌توان بیان نمود:

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (17)$$

ترکیب روابط (۹) و (۱۶) مؤلفه‌های تانسور انحراف طولی برابرند با [۳۲]:

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)}$$

$$= \eta_{331}^{(1)} = \frac{1}{5} \left(z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (18)$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{2}{5} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \eta_{333}^{(1)}$$

$$= \frac{1}{5} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

در نتیجه تنها مؤلفه‌های غیرصفر تانسور متقارن چرخش به صورت زیر خواهند بود:

$$\chi_{12} = \chi_{21} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (19)$$

با ساده‌سازی اثرات درجه دوم در ضریب پواسون برای تیر-های باریک و بلند با نسبت منظر بالا [۳۲]، تنها تنش نرمال غیرصفر طبق رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$\sigma_{11} = E \epsilon_{11} = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (20)$$

با جایگذاری گرادیان‌های کرنش غیر صفر برای تیر اولر-برنولی، جملات غیر صفر تنش‌های مرتبه بالا نیز عبارتند از:

نقاط مختلف را بر حسب توابع شکل درون‌یابی نقطه‌ای با رابطه (۱۳) تقریب زد:

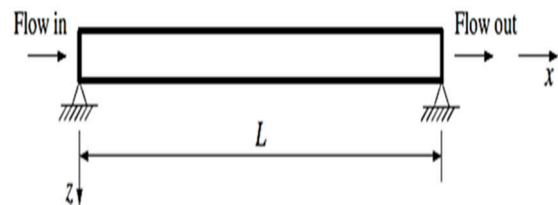
$$u(X, t) = \begin{Bmatrix} u(X, t) \\ v(X, t) \\ w(X, t) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \phi_i(X) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_i(X) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_i(X) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \\ w_i(t) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$= \phi(X) u(t)$$

که $u(t)$ بردار جابجایی نقاط گره‌ای در لحظه t است.

۳. مدل‌سازی ریاضی و استخراج روابط

ابتدا میکرولوله‌ای به طول L با سطح مقطع A ، قطر خارجی D ، قطر داخلی d ، با چگالی ρ_p و جرم واحد طول m_p را که بر روی دو تکیه‌گاه ساده قرار دارد نظیر شکل (۱) در نظر گیرید. چگالی سیال درون لوله ρ_f و جرم بر واحد طول آن m_f فرض شده که با سرعت متوسط V درون لوله حرکت می‌کند. جریان درون میکرولوله غیرقابل تراکم با سرعت ثابت در نظر گرفته شده و محور x منطبق بر محور مرکزی لوله است.



شکل ۱- میکرولوله حاوی جریان بر روی دو تکیه‌گاه ساده

بر اساس تئوری کلاسیک تیر اولر-برنولی میدان جابجایی به صورت زیر بیان می‌شود [۳۲]:

$$u_1 = u(x, t) - z \psi(x, t), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x, t) \quad (14)$$

در این معادله u_1, u_2, u_3 مؤلفه‌های جابجایی در راستای-های x, y, z بوده و زاویه‌ی چرخش $\psi(x, t)$ به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N_0}{A} \left(\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dA \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L N_0 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx
 \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن N_0 نیروی محوری اولیه بوده و سایر پارامترهای اولیه عبارتند از:

$$S = EI + GA \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \quad (24)$$

$$K = GI \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \quad (25)$$

انرژی جنبشی ذرات همچنین سیال درون میکرولوله به ترتیب عبارتند از [۳۴]:

$$\begin{aligned}
 T_p &= \frac{m_p}{2} \int_0^L \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right) dx
 \end{aligned} \quad (26)$$

$$T_f = \frac{m_f}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + v^2 \right] dx \quad (27)$$

با توجه به بی حرکت بودن تکیه گاه‌ها در راستای محوری در میکرولوله مدل شده، می توان اثر تغییر دما را به صورت یک نیروی خارجی نشان داد. با استفاده از اصول ترموالاستیک این نیرو که به بار حرارتی معروف است، به فرم زیر بیان می شود [۴۰]:

$$\bar{N}_{th} = -\frac{EA}{1-2\nu} \alpha_{th} \Delta T \quad (28)$$

که E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون، α_{th} ضریب انبساط طولی و ΔT تغییر دمای میکرولوله است. از طرفی کار یک نیروی خارجی که بر میکرولوله وارد می شود برابر است با [۴۱]:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 2l_0^2 G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad P_3 \\
 &= -2l_0^2 G z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 \tau_{113}^{(1)} &= \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = -\frac{8}{15} l_1^2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
 \tau_{122}^{(1)} &= \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} \\
 &= \frac{2}{5} l_1^2 G \left(z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 \tau_{223}^{(1)} &= \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} l_1^2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \tau_{133}^{(1)} \\
 &= \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} \\
 &= \frac{2}{5} l_1^2 G \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
 \tau_{333}^{(1)} &= \frac{2}{5} l_1^2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \tau_{111}^{(1)} \\
 &= \frac{4}{5} l_1^2 G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 m_{12} &= m_{21} = -l_2^2 G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}
 \end{aligned} \quad (21)$$

با استفاده از روابط (۲۱) و جایگذاری آنها در رابطه (۶) انرژی کرنشی محاسبه خواهد شد. U_1 انرژی کرنشی ناشی از تغییرات تنش های کلاسیک و مرتبه بالا نسبت به وضعیت اولیه و U_2 انرژی کرنشی ناشی از توالی کششی می باشد [۳۹].

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left\{ \left[E z^2 + G \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + G z^2 \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + G \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + GA \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx
 \end{aligned} \quad (22)$$

به دلیل نبود نیروهای حجمی، N_0 مستقل از x است. اگر در رابطه‌ی (۳۳)، از اینرسی طولی $\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ صرف نظر شود [۳۷]، منتجه‌ی نیروی محوری حاصل از مؤلفه‌ی تنش کلاسیک در راستای محوری لوله از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_A \sigma_{11} dA = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) = C_1(t) \quad (35)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین می‌توان نوشت:

$$EA \left(u + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) = x C_1(t) + C_2(t) \quad (36)$$

که در آن $C_1(t)$ و $C_2(t)$ توابع مجهول هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_1(t) = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad C_2(t) = 0 \quad (37)$$

لذا معادله دیفرانسیلی غیرخطی میکرولوله‌ی حاوی جریان به فرم زیر خواهد بود:

$$S \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - K \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_f V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (38)$$

که در آن

$$N = N_0 + \bar{N}_{th} + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (39)$$

با صرفنظر از تغییر طول صفحه‌ی میانی $\bar{N} = 0$ معادله دیفرانسل غیرخطی تبدیل به معادله خطی با تغییر شکل‌های کوچک می‌شود. فرم بی‌بعد معادله (۳۸) نیز با معرفی پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در رابطه‌های (۴۰)، در معادله (۴۱) باز نویسی شده است:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \varphi = \left[\frac{EI}{m_p + m_f} \right]^{1/2} \frac{t}{L^2}, \quad \beta = \frac{m_f}{m_p + m_f}$$

$$\mu = \left[\frac{m_f}{EI} \right]^{1/2} LV, \quad \chi = \frac{4l^2}{(1 + \alpha^2) D^2}, \quad \bar{N}_{th} = \frac{\bar{N}_{th} L^2}{EA}$$

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^L F(x, t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (29)$$

بنابراین کار نیروی خارجی تغییر دمای میکرولوله عبارت است از:

$$W_{ext} = -\frac{1}{2} \bar{N}_{th} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (30)$$

فرم کلی اصل همیلتون در لوله‌های حاوی جریان به شکل زیر ارائه شده است [۴۲]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_p + T_f + W_{ext} - U - MV^2 u_L) dt - \int_{t_1}^{t_2} MV \left(\frac{\partial w_L}{\partial t} + V \frac{\partial w_L}{\partial x} \right) \delta w_L dt = 0 \quad (31)$$

عملگر لاگرانژین در سیستم بسته $l = T_p + T_f + W_{ext} - U$ است. چون میکرولوله دو سر ثابت فرض شده (چون نسبت طول به قطر بسیار زیاد است) آنگاه شرایط مرزی عبارتند از $u_L = w_L = 0$ و لذا معادله (۳۱) به شکل زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_p + T_f + W_{ext} - U_1 - U_2) dt = 0 \quad (32)$$

با استفاده از حساب تغییرات و انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[N_0 + EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - GA \left(2I_0^2 + \frac{4}{5} I_1^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (33)$$

از طرفی شرایط مرزی غیرکلاسیک نیز عبارتند از:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right|_{x=0,L} = 0, \quad S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Big|_{x=0,L} = 0, \quad K \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0,L} = 0 \quad (34)$$

معادلات انتگرالی یافت شده را با استفاده از روش تریبیعی گاوسی برای یافتن میدان جابجایی در هر نقطه گره‌ای، توسط روش درون‌یابی نقطه‌ای حل نموده برای این کار، ابتدا دامنه محلی در یک محدوده تریبیعی از مختصات دکارتی به مختصات قطبی تبدیل می‌گردد. سپس این محدوده به فضای استاندارد تریبیعی گاوسی نگاشت شده با برهم‌گذاری ماتریس‌های سختی، جرم و نیرو سپس تعیین ماتریس‌های کلی، مقادیر جابجایی، فرکانس و سایر پارامترهای مورد نیاز محاسبه می‌شوند. مراحل مختلف اعمال روش در شکل (۲) آورده شده است.

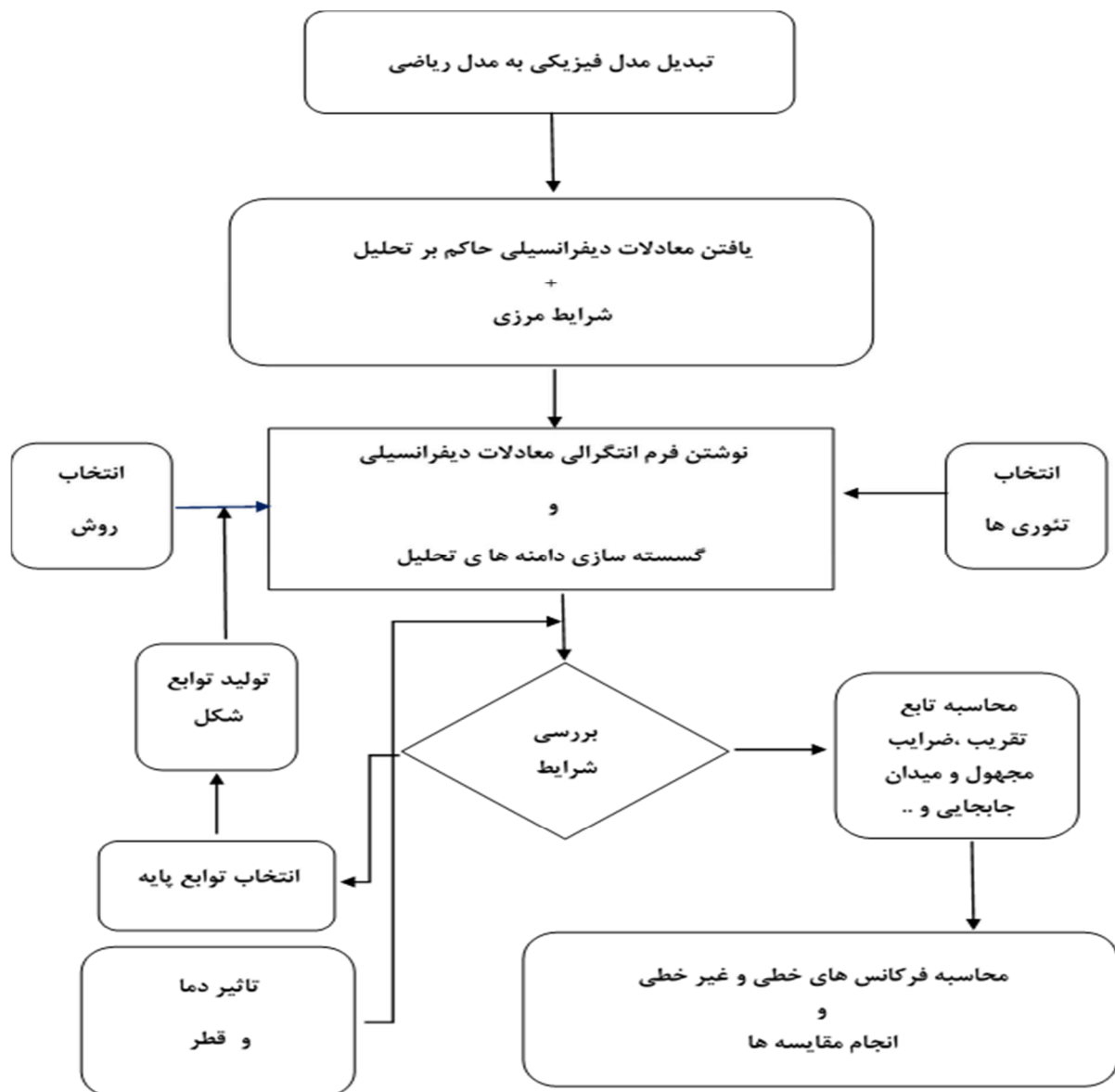
$$r_0 = \frac{l_0}{l_2}, r_1 = \frac{l_1}{l_2}, \gamma = \frac{D}{l_2}, \psi = \frac{L}{l_2}$$

$$\kappa = \frac{r_0^2 + 2r_1^2/5}{(1+\nu)\psi^2}, \lambda$$

$$= \frac{8(2r_0^2 + 8r_1^2/15 + 1)}{(1+\nu)(1+\alpha^2)\gamma^2}$$

$$(1+\lambda) \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} - \kappa \frac{\partial^6 \eta}{\partial \xi^6} - \chi \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)^2 d\xi$$

$$- \bar{N}_{th} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{1}{2} \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} = 0$$

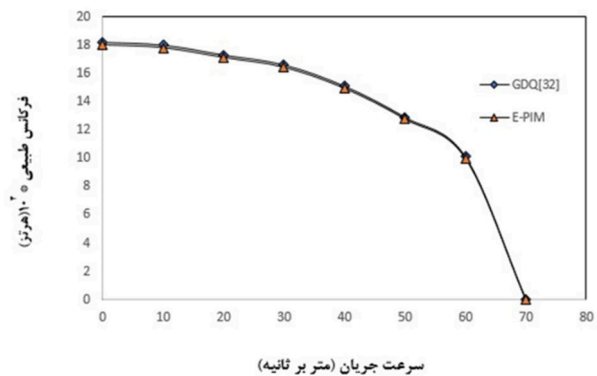
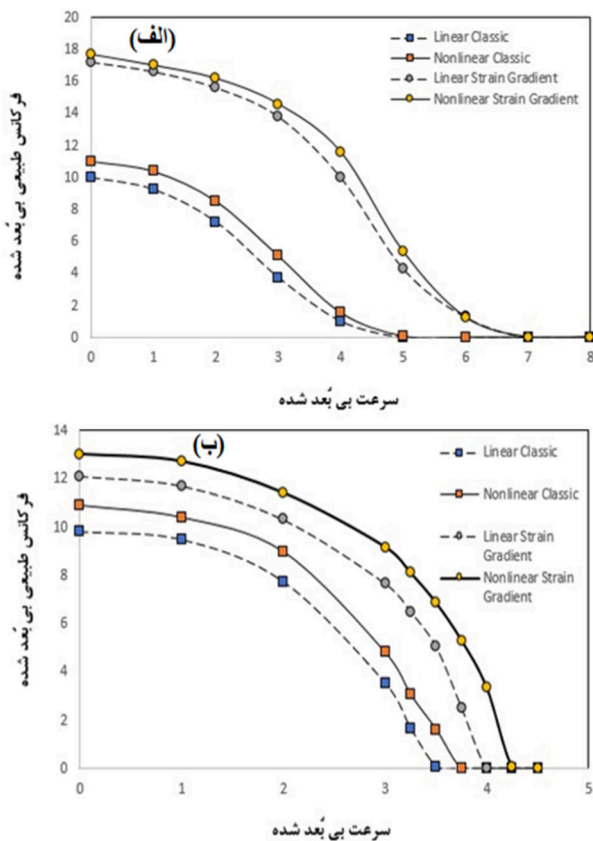


شکل ۲- فلوجارت نحوه اعمال روش عددی بر دامنه تحلیل

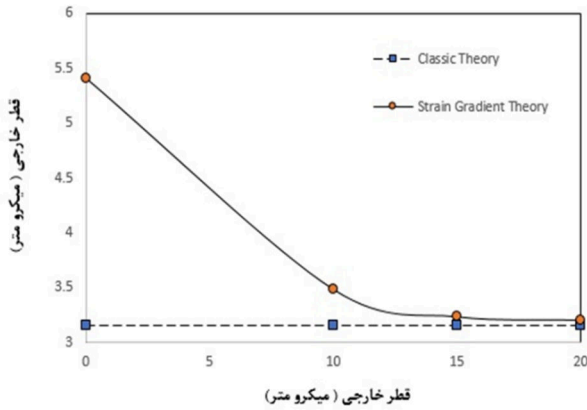
۴. یافته‌های ناشی از تحلیل عددی

بنابراین با استفاده از روش عددی بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای توسعه یافته، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده برای میکرولوله‌ی حاوی جریان بر حسب تغییرات سرعت بی‌بعد شده سیال، در دو حالت خطی و غیر خطی مطابق نمودارهای ترسیم شده در شکل (۴) هستند. این نمودارها نشان می‌دهند که تئوری گرادیان کرنش همواره فرکانس طبیعی بیشتری را نسبت به تئوری کلاسیک مکانیک پیوسته پیش‌بینی می‌نماید. این امر به دلیل ۳ پارامتر طولی غیرکلاسیک به کار رفته در این تئوری است. هر چه قطر میکرولوله کوچکتر و نزدیک به اندازه‌ی پارامتر طولی باشد، اختلاف تئوری گرادیان کرنش و تئوری کلاسیک مکانیک پیوسته بیشتر است و تئوری‌های غیرکلاسیک مرتبه بالا مقادیر بیشتری را برای فرکانس طبیعی، نسبت به تئوری کلاسیک پیش‌بینی می‌نمایند (شکل ۴-الف). با افزایش قطر میکرولوله اختلاف بین دو تئوری کم‌رنگ شده و در قطر ۲۰ میکرو متر هر دو تئوری تقریباً مقدار یکسانی را برای فرکانس طبیعی پیش‌بینی می‌نمایند، که نشان دهنده از بین رفتن اثرات اندازه در این قطر از میکرولوله است (شکل ۴-د).

میکرولوله‌ای که جهت محاسبات عددی مدل‌سازی شده، از جنس آلومینیوم با مدول الاستیسیته ۸۰ گیگا پاسکال، نسبت پواسون ۰/۲۳ و چگالی ۲۷۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب در نظر گرفته شده است. چگالی سیال داخل میکرولوله برابر با ۱۲۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب بوده و براساس نتایج تجربی پارامتر طولی برای مواد از جنس آلومینیوم خالص برابر با $l = 1/5 \mu m$ است. ابتدا برای اعتبارسنجی و صحت مدل‌سازی انجام شده توسط تحلیل عددی از طریق مقایسه نتایج با مراجع معتبر، میکرولوله‌ای از جنس اپوکسی پلیمر با مدول الاستیسیته ۱/۴۴ گیگا پاسکال، نسبت پواسون ۰/۳۸ و چگالی ۱۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب که حاوی سیالی با چگالی ۱۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب، مورد تحلیل قرار می‌گیرد. برای این منظور پارامتر طولی یافت شده از آزمایشات تجربی معادل $17/6$ میکرومتر و با فرض $l_0 = l_1 = l_2 = l$ در نظر گرفته می‌شود [۴] و [۳۲]. تحت چنین شرایطی، فرکانس طبیعی خطی با استفاده از روش گرادیان کرنش بر حسب سرعت سیال گذرنده از داخل میکرولوله برای قطر خارجی ۰/۵ میکرومتر با دو روش حل عددی بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای توسعه یافته و روش دیفرانسیل کوادراچر مطابق نمودارهای ترسیم شده در شکل (۳) خواهد بود. نتایج و صحت مدل‌سازی دارند.

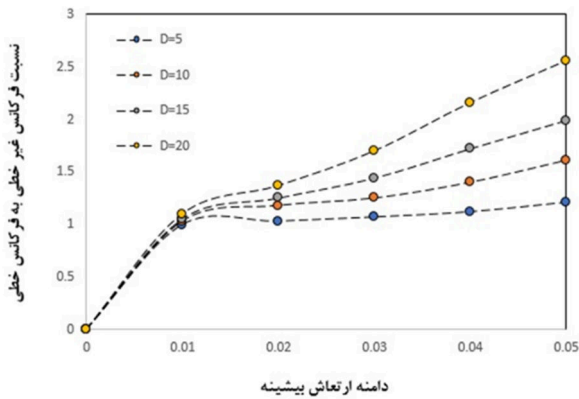


شکل ۳- فرکانس طبیعی خطی میکرولوله حاوی جریان بر حسب سرعت جریان مبتنی بر تئوری گرادیان کرنش از روش کوادراچر و روش بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای توسعه یافته



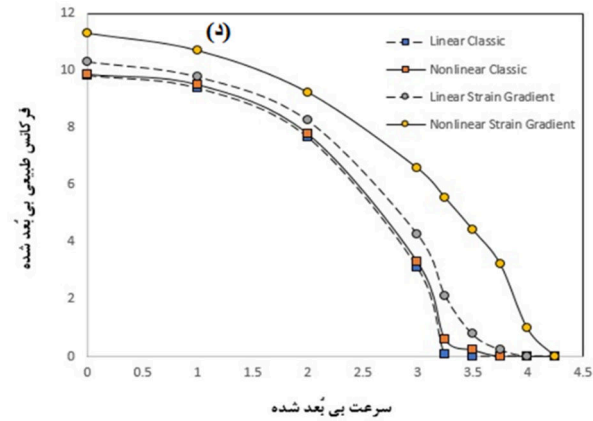
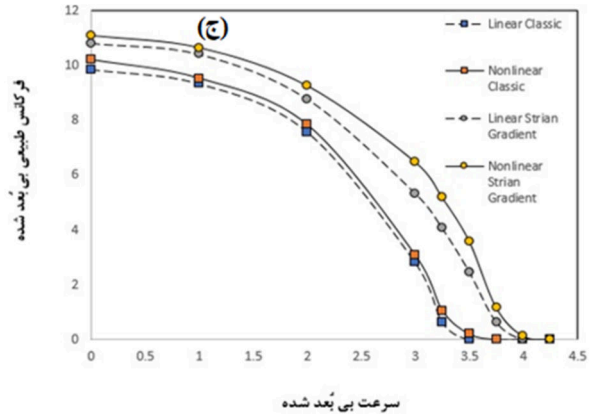
شکل ۵- نمودار تغییرات سرعت بحرانی بی بعد شده بر حسب تغییرات قطر خارجی میکرولوله

بر اساس تئوری‌های غیرخطی گرادپان کرنش و مکانیک کلاسیک می‌توان از شکل (۵) دریافت که، با کاهش قطر خارجی میکرولوله سرعت بحرانی افزایش می‌یابد و تئوری کلاسیک مکانیک پیوسته را در تخمین درست سرعت بحرانی در میکرولوله‌ها ناتوان است. نسبت فرکانس غیر-خطی به فرکانس خطی بر حسب ماکزیمم دامنه‌ی ارتعاشی میکرولوله‌ی حاوی جریان در سرعت بی‌بعد سیال با توجه به همگرایی به عدد ۳ (شکل ۵) را ببینید)، برای قطرهای خارجی مختلف میکرولوله در شکل (۶) رسم شده‌اند.



شکل ۶- تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی بر حسب دامنه ارتعاش بیشینه میکرولوله حاوی جریان با سرعت بحرانی ۳ و قطر خارجی مختلف

با توجه به نمودارهای شکل (۶) می‌توان دریافت که، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی وابسته به اندازه بوده و با کاهش قطر میکرولوله این نسبت کاهش یافته، به عبارت بهتر در قطرهای کوچک، میکرولوله رفتار خطی دارد و می‌توان از معادلات خطی جهت تحلیل آن بهره برد. جهت بررسی



شکل ۴- نحوه تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده میکرولوله‌ی حاوی جریان بر حسب سرعت بی‌بعد جریان سیال بر اساس تئوری گرادپان کرنش و تئوری کلاسیک مکانیک پیوسته در قطرهای خارجی مختلف. الف) قطر ۵ میکرو متر، ب) قطر ۱۰ میکرو متر، ج) قطر ۱۵ میکرو متر، د) قطر ۲۰ میکرو متر

همچنین همانطور که در نمودارهای شکل (۴) مشاهده می‌شود، هر دو تئوری در حالت غیرخطی فرکانس طبیعی بیشتری را نسبت به تئوری‌های خطی پیش‌بینی می‌کنند. مضاف اینکه نمودار فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب سرعت بی‌بعد سیال نزولی است. با کاهش سفتی میکرولوله، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. هنگامی که فرکانس طبیعی به صفر می‌رسد میکرولوله سفتی خود را به کلی از دست داده و شروع به کمانش می‌کند. سرعتی از جریان سیال که در آن میکرولوله ناپایدار شده و کمانش در آن آغاز می‌گردد، سرعت بحرانی نامیده می‌شود. نمودار تغییرات سرعت بحرانی بی‌بعد سیال گذرنده از داخل میکرولوله که با دو تئوری گرادپان کرنش و تئوری کلاسیک مکانیک پیوسته در حالت غیر خطی در شکل (۵) ارائه شده است.

۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق به تحلیل ارتعاش میکرولوله‌ها با بهره‌گیری از روش عددی درون‌یابی نقطه‌ای با توابع پایه توسعه یافته بر-اساس مدل کلاسیک تیر اولر برنولی و تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش با سه پارامتر طول پرداخته شده است. با توجه به حضور میکرولوله‌ها در شرایط مختلف محیطی، دما یکی از پارامترهای تأثیرگذار در طراحی دستگاه‌های میکروسیالی است. بنابراین اثر دما بر ارتعاشات آزاد غیرخطی در کنار میدان سرعت نیز مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشی میکرولوله‌ها تحت تأثیر همزمان دو میدان سرعت و دما نشان می‌دهد که، تئوری گرادیان کرنش همواره فرکانس بیشتری را نسبت به تئوری مکانیک کلاسیک پیش‌بینی می‌نماید. این امر به دلیل ۳ پارامتر طولی غیرکلاسیک بکار رفته در تئوری غیرکلاسیک است. با کاهش قطر میکرولوله، فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی افزایش می‌یابد. بنابراین در قطرهای کوچک، باید تحلیل میکرولوله با یک تئوری غیرکلاسیک نظیر گرادیان کرنش، انجام شود. افزایش دما، موجب کاهش فرکانس پایه و افزایش دامنه و رفتار غیرخطی میکرولوله‌ها می‌شود. با مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل عددی کوادراچور با روش عددی درون‌یابی نقطه‌ای توسعه یافته جهت حل انتگرالی معادلات دیفرانسیل حاکم بر تحلیل ارتعاشی دقت خوبی برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی دارد.

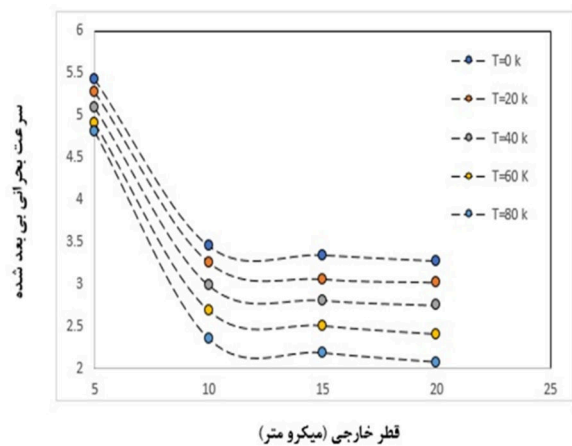
سپاسگزاری

نویسندگان از همکاری موثر و ارزشمند مرکز محاسبات پیشرفته دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز جهت استفاده از امکانات مرکز به منظور انجام تحلیل‌های عددی و تکمیل مطالعه انجام شده که مستخرج از پایان نامه دانشجوی مهدی فاضلی است، مراتب تشکر و قدردانی خود را ابراز می‌دارند.

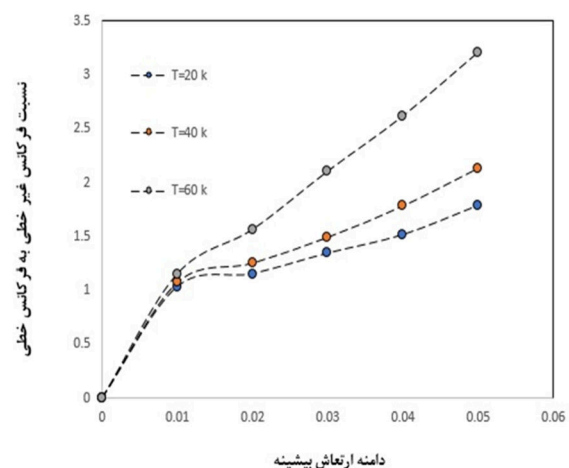
مرجع‌ها

- [1] C.-L. Kuo, T. Masuzawa, M. Fujino, A micropipe fabrication process, in: Micro Electro Mechanical Systems, 1991, MEMS'91, Proceedings. An Investigation of Micro Structures, Sensors, Actuators, Machines and Robots. *IEEE*, (1991) 80-85.
- [2] N. Fleck, G. Muller, M. Ashby, J. Hutchinson, Strain gradient plasticity: theory and experiment, *Acta Metallurgica et Materialia*, **42** (1994) 475-487.

اثر دما بر سرعت بحرانی سیال گذرنده از داخل میکرولوله بر حسب قطر خارجی نمودارهای شکل (۷) رسم می‌گردند. می‌توان مشاهده کرد که، با کاهش قطر میکرولوله، تأثیر دما بر سرعت بحرانی کاهش یافته به نحوی که در قطرهای خیلی کوچک می‌توان از اثر دما صرف‌نظر کرد. به‌عنوان نمونه نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی بر حسب ماکزیمم دامنه ارتعاش میکرولوله حاوی جریان با در نظر گرفتن اثر دما برای قطر خارجی ۱۰ میکرون در شکل (۸) ارائه داده شده است. با افزایش دما، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی در میکرولوله‌ی بیشتر و در نتیجه میکرو-لوله رفتار غیرخطی بیشتری از خود نشان دهد.



شکل ۷- تغییرات سرعت بحرانی بی بعد شده بر حسب قطر خارجی میکرولوله با در نظر گرفتن اثر دما



شکل ۸- نحوه تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی بر حسب ماکزیمم دامنه ارتعاش در میکرولوله با قطر خارجی ۱۰ میکرون تحت تأثیر دما

- [24] M. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, M. Ahmadian, A nonlinear strain gradient beam formulation, *International Journal of Engineering Science*, **49** (2011) 1256-1267.
- [25] M. Asghari, M. Kahrobaiyan, M. Nikfar, M. Ahmadian, A size-dependent nonlinear Timoshenko microbeam model based on the strain gradient theory, *Acta Mechanica*, **223** (2012) 1233-1249.
- [26] J. Zhao, S. Zhou, B. Wang, X. Wang, Nonlinear microbeam model based on strain gradient theory, *Applied Mathematical Modelling*, **36** (2012) 2674-2686.
- [27] S. Ramezani, A micro scale geometrically non-linear Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **47**, (2012) 873-863.
- [28] F. Rajabi, S. Ramezani, A nonlinear microbeam model based on strain gradient elasticity theory with surface energy, *Archive of Applied Mechanics*, **82** (2012) 363-376.
- [29] M.H. Ghayesh, M. Amabili, H. Farokhi, Nonlinear forced vibrations of a microbeam based on the strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, **63** (2013) 52-60.
- [30] B. Wang, S. Zhou, J. Zhao, X. Chen, A size-dependent Kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **30** (2011) 517-524.
- [31] S. Ramezani, A shear deformation micro-plate model based on the most general form of strain gradient elasticity, *International Journal of Mechanical Sciences*, **57** (2012) 34-42.
- [32] L. Yin, Q. Qian, L. Wang, Strain gradient beam model for dynamics of microscale pipes conveying fluid, *Applied Mathematical Modelling*, **35** (2011) 2864-2873.
- [33] Farshidianfar A, Samadi F. A microstructure-dependent Timoshenko beam model for vibration analysis of micropipes conveying fluid based on strain gradient theory. In 19th *International Congress on Sound and Vibration*, (2012).
- [34] Al-Basyouni KS, Tounsi A, Mahmoud SR. Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position. *Composite Structures*. **125**(2015)621-30.
- [35] Thai CH, Ferreira AJ, Nguyen-Xuan H. Isogeometric analysis of size-dependent isotropic and sandwich functionally graded microplates based on modified strain gradient elasticity theory. *Composite Structures*. **192**(2018)274-88.
- [36] Yu T, Zhang J, Hu H, Bui TQ. A novel size-dependent quasi-3D isogeometric beam model for two-directional FG microbeams analysis. *Composite Structures*. **211**(2019)76-88.
- [37] Hu H, Yu T, Bui TQ. Functionally graded curved Timoshenko microbeams: A numerical study using IGA and modified couple stress theory. *Composite Structures*. **254**(2020)112841.
- [38] Dinachandra M, Alankar A. Static and dynamic modeling of functionally graded Euler–Bernoulli microbeams based on reformulated strain gradient elasticity theory using isogeometric analysis. *Composite Structures*. **280**(2022)114923.
- [39] M. Paidoussis, F.S. Interactions, Slender Structures and Axial Flow, vol. in, 1 Academic Press, London, 1998.
- [40] Y. Zhang, X. Liu, J. Zhao, Influence of temperature change on column buckling of multiwalled carbon nanotubes, *Physics Letters A*, **372** (2008) 1676-1681.
- [41] T.B. Benjamin, Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid. II. Experiments, Proceedings of the Royal Society of London. Series A *Mathematical and Physical Sciences*, **261** (1961) 487-499.
- [42] A. Nayfeh, D. Mook, Nonlinear oscillations. 1979, John Wiley and Sons, New York.
- [43] Liu, G.R. and Gu, Y.T. An introduction to meshfree methods and their programming. (2005) Springer Science & Business Media
- [3] J. Stölken, A. Evans, A microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Materialia*, **46** (1998) 5109-5115.
- [4] D. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **51** (2003) 1477-1508.
- [5] A.W. McFarland, J.S. Colton, Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **15** (2005) 1060.
- [6] R. Mindlin, H. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **11** 415-448 (1962).
- [7] R. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **11** (1962) 385-414.
- [8] W. Koiter, Couple stresses in the theory of elasticity, I and II, in: *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. B.*(1964) 17-29.
- [9] S. Zhou, Z. Li, Length scales in the static and dynamic torsion of a circular cylindrical micro-bar, *Journal of Shandong university of technology*, **31** (2001) 401-407.
- [10] X. Kang, Z. Xi, Size effect on the dynamic characteristic of a micro beam based on cosserat theory, *Journal of Mechanical Strength*, **29** (2007) 1-4.
- [11] F. Yang, A. Chong, D. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, **39** (2002) 2731-2743.
- [12] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams, *International Journal of Engineering Science*, **46** (2008) 427-437.
- [13] H. Ma, X.-L. Gao, J. Reddy, A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **56** (2008) 3379-3391.
- [14] M. Asghari, M. Kahrobaiyan, M. Ahmadian, A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, **48** (2010) 1749-1761.
- [15] E. Jomehzadeh, H. Noori, A. Saidi, The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, **43** (2011) 877-883.
- [16] L. Wang, Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes, *Journal of Fluids and Structures*, **26** (2010) 675-684.
- [17] W. Xia, L. Wang, Microfluid-induced vibration and stability of structures modeled as microscale pipes conveying fluid based on non-classical Timoshenko beam theory, *Microfluidics and nanofluidics*, **9** (2010) 955-962.
- [18] S. Ahangar, G. Rezazadeh, R. Shabani, G. Ahmadi, A. Toloei, On the stability of a microbeam conveying fluid considering modified couple stress theory, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, **7** (2011) 327-342.
- [19] T.-Z. Yang, S. Ji, X.-D. Yang, B. Fang, Microfluid-induced nonlinear free vibration of microtubes, *International Journal of Engineering Science*, **76** (2014) 47-55.
- [20] R.D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, **1** (1965) 417-438.
- [21] N. Fleck, J. Hutchinson, A reformulation of strain gradient plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **49** (2001) 2245-2271.
- [22] N. Fleck, J. Hutchinson, Strain gradient plasticity, *Advances in applied mechanics*, **33** (1997) 295-361.
- [23] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, **47** (2009) 487-498.