



کنترل بهینه سیستم‌های تکه‌ای شبه خطی مقید برای خودرو بر روی شیب با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات

احمد کیاکجوری^۱، جواد مشایخی فرد^{۲*}

۱. استادیار، گروه مهندسی برق، واحد اسلامشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اسلامشهر، ایران
۲. استادیار، گروه مهندسی برق، واحد سبزوار، دانشگاه آزاد اسلامی، سبزوار، ایران

*نویسنده مسئول: mashayekhi@iaus.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۰۳

چکیده

علی‌رغم برتری‌های مبتنی بر مدل کنترل پیش‌بین مانند قابلیت اطمینان، بزرگ‌ترین مانع رشد تصاعدی تعداد مکان‌های چندوجهی، با بزرگتر شدن افق پیش‌بینی رخ می‌دهد. این امر باعث افزایش پیچیدگی محاسباتی قانون کنترل می‌شود. در این مقاله، حل مسئله کنترل بهینه سیستم‌های تکه‌ای شبه خطی مقید بر اساس روش کنترل پیش‌بین و کنترل افق پیشرو در نظر گرفته شده است. برای کاهش پیچیدگی از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات استفاده گردیده است. به بیان دیگر، در این پژوهش دو هدف دنبال می‌شود، نخست اینکه مسئله کنترل بهینه سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید فرموله و حل صریح مسئله با روش کنترل پیش‌بین و بکارگیری برنامه‌ریزی چند پارامتری به صورت قانون کنترل روی نواحی چندوجهی، بیان و سپس مشکلات مربوط به پیچیدگی حل و رشد نمایی آن به علت افزایش افق پیش‌بین ارائه می‌شود. سپس با تعریف تابع هدف جدید بر اساس کاهش چندوجهی‌های قانون کنترل، با تلفیق الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات و حل صریح بدست آمده روش کنترل پیش‌بین و تنظیم پارامترهای سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید به کاهش پیچیدگی‌های سیستم اقدام شده است، به طوری که تعداد چندوجهی‌های حاصل به حداقل برسد. برای نشان دادن کارایی روش، مدلسازی یک خودرو در حال بالا رفتن از یک تپه شیب‌دار و حفظ تعادل خود در نظر گرفته شده است. تعداد قانون کنترل چندوجهی از ۱۲۹ به ۲۵ کاهش یافته است.

کلمات کلیدی: سیستم تکه‌ای شبه خطی، کنترل بهینه مقید، بهینه‌سازی ازدحام ذرات، کاهش پیچیدگی قانون کنترل.

مقدمه

از موارد مورد مطالعه در سیستم‌های هیبریدی [۱-۲]، چارچوب تکه‌ای شبه خطی [۳ و ۴] است که با افراز بندی فضای گسترده ورودی-حالت به نواحی چند وجهی [۵-۶] و اختصاص دادن یک معادله حالت شبه خطی به هر کدام از این نواحی تعریف می‌شود. تعداد زیادی از فرآیندهای هیبریدی نظیر سوئیچ بین مدهای دینامیکی، اشباع محرک‌ها در سیستم‌های خطی و سیستم‌های کلیدزنی که رفتار دینامیکی به وسیله تعداد محدودی از مدل‌های زمان-گسسته شبه خطی بیان می‌شود را می‌توان توسط سیستم‌های تکه‌ای شبه خطی زمان-گسسته مدل نمود [۷-۹]. بسیاری از تحلیل‌گران چارچوب‌های در نظر گرفته شده خود را با کلاس چارچوب تکه‌ای شبه خطی مانند سیستم مبدل کنترل DC-DC، فرآیند چند-مخزن [۱۰ و ۱۱] و سیستم بزرگراه خودکار [۱۲] مدل کرده‌اند. ملاحظات و مشکلات متعددی در مورد بررسی قانون کنترل ایده‌آل حلقه بسته برای چارچوب تکه‌ای شبه خطی در نظر گرفته و ایجاد شده است. در دو دهه اخیر توجه زیادی به محاسبه کنترل کننده فرم-بسته بهینه برای این سیستم‌ها صورت پذیرفته است. مسئله مورد نظر به مسئله کنترل بهینه سیستم‌های مقید زمان متناهی تکه‌ای شبه خطی مقید (CFTOC) معروف گردید [۱۳]. سانتج [۵] یکی از پیشگامان این مسائل بود. در دهه ۷۰ تحقیقات بسیار وسیعی آغاز شد که هدف از این تحقیقات، پیدا کردن قانون‌های کنترلی بود به نحوی که حالت‌ها را به صورت پارامترهای مسئله

¹ Piece Wise affine(PWA)

² Automated highway systems(AHS)



بهینه‌سازی فرض کردنمود، که با تغییر آنها هم قیود و هم تابع هدف تحت تاثیر واقع شود یا به عبارتی قانون مذکور، ارتباط بین متغیرهای بهینگی و تغییرات تابع هدف بهینه را نشان دهد. گسترش این تحقیقات منجر به تحولی در برنامه‌ریزی ریاضی گردید که به برنامه‌ریزی چند پارامتری معروف شد و اکنون یک ابزار مفید برای پیدا کردن راه حل صریح مسائل کنترلی بهینه می باشد. از انواع ساده برنامه‌ریزی‌های ریاضی می توان از دو گروه معروف و پر کاربرد برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی درجه دو (غیر خطی) نام برد. در برنامه‌ریزی خطی تابع هدف و شرایط، خطی مرتبه اول و در برنامه‌ریزی درجه دو تابع هدف درجه دوم و شرایط شبه خطی می باشند. با گسترش برنامه‌ریزی چند پارامتری و کاربرد آن در کنترل بهینه، استفاده از برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی درجه دو نیز به بحث چند پارامتری تعمیم یافت و روش‌های بهینه‌ای بر مبنای استفاده از برنامه‌ریزی خطی و مرتبه دو چند پارامتری [۱۴-۱۶] و حتی برنامه‌ریزی چند پارامتری خطی و مرتبه دو عدد صحیح مختلط ارائه شد [۱۷]. متأسفانه اگر راه حل مسئله سیستم تکه ای شبه خطی مقید بدون توجه به روش کنترل افق پیشرو^۱ بدست آورده شود، تضمینی بر شدنی بودن مسئله و برآورده شدن قیودها برای تمامی زمان‌ها در سیستم حلقه- بسته وجود ندارد [۱۸]. اما اگر حل با بکارگیری استراتژی روش کنترل افق پیشرو یا روش کنترل پیش‌بین^۲ به دست آید، قانون کنترل فیدبک حالت چارچوب تکه‌ای شبه خطی متغیر با زمان، به صورت نامتغیر با زمان می شود و می تواند به عنوان یک جدول مراجعه‌ای کنترلی آنلاین مورد استفاده قرارگیرد [۱۹ و ۲۰]. اما یکی از عمده‌ترین مشکلات، افزایش پیچیدگی قانون کنترل فیدبک چارچوب تکه‌ای شبه خطی بدست آمده با بزرگتر شدن افق پیش بینی و تأثیر آن بر عملکرد سیستم است، از طرفی برای عملکرد مطلوب سیستم افزایش افق پیش‌بینی ضروری است؛ در واقع به علت ساختار و طبیعت ترکیبی مسئله بیان شده، تعداد نواحی فضای حالت که بر روی جدول مراجعه‌ای کنترل تعریف شده است، در بدترین حالت به صورت نمایی افزایش می‌یابد. از این‌رو حجم بالای محاسبات آنلاین و پیچیدگی محاسبات آنلاین، و وابستگی آن به تعداد نواحی چند وجهی‌ها و افزایش تعداد قیودها از موارد چالش برانگیز در این مسائل بوده است [۲۱]. چندین محقق، موضوع کاهش پیچیدگی و تقریب را با بهبود مسئله اصلی سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید و بازیابی یک حل زیر بهینه از مسئله و یا پس پردازش کنترل کننده بهینه محاسبه شده مرتبط نموده‌اند [۲۲ و ۲۳]. با تضمین کاهش پیچیدگی، پایداری حلقه بسته یا کاهش عملکرد نامی سیستم مورد غفلت قرار گرفته و به‌طور دقیق بررسی نمی‌گردد [۲۴]. به دلیل وجود ارتباط قوی میان پیچیدگی سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید و تعداد مناطق چندوجهی برای قانون کنترل چارچوب تکه‌ای شبه خطی، می‌توان به این مسئله به شکل یک نظریه پیچیدگی محاسباتی نگاه نمود. برای حل مسائل پیچیدگی محاسباتی، استفاده از الگوریتم‌های تقریبی بسیار مناسب هستند. الگوریتم‌های تقریبی قادر به یافتن جواب‌های تقریبی مناسب برای مسائل بهینه‌سازی سخت در زمانی کوتاه هستند. الگوریتم‌های فوق ابتکاری [۲۵]، یکی از انواع الگوریتم‌های بهینه‌سازی تقریبی هستند که دارای راهکارهای برون‌رفت از بهینه محلی می‌باشند و قابل کاربرد در طیف گسترده‌ای از مسائل هستند. الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات^۳، برای اولین بار توسط کندی و ابرهارت مطرح گردید [۲۶ و ۲۷] که یک الگوریتم محاسبه‌ای تکاملی الهام گرفته از طبیعت و براساس تکرار می‌باشد. الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات از تعداد مشخصی از ذرات تشکیل می‌شود که به طور تصادفی، مقدار اولیه می‌گیرند. برای هر ذره دو مقدار وضعیت و سرعت، تعریف می‌شود که به ترتیب با یک بردار مکان و یک بردار سرعت، مدل می‌شوند. همچنین الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات قادر به بهینه‌سازی توابع هزینه پیچیده با تعداد زیاد حداقل محلی است. بنابراین، بخش‌های مقاله به شرح زیر است: ۱- نشان دادن مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید با راهبردهای فعلی ۲- کاهش پیچیدگی محاسباتی به عنوان یک مسئله پیچیدگی محاسباتی با محاسبه پیشنهادی. ابتدا، مسئله کنترل بهینه سیستم چارچوب تکه‌ای شبه خطی مقید فرموله و حل صریح مسئله با روش کنترل پیش‌بین و بکارگیری برنامه ریزی چند پارامتری به صورت قانون کنترل سیستم تکه‌ای شبه خطی روی نواحی چندوجهی، بیان می‌گردد و سپس مشکلات مربوط به پیچیدگی حل و رشد نمایی آن به دلایلی نظیر تعداد نواحی چندوجهی و افزایش افق پیش‌بین ارائه

¹ Receding Horizon Control (RHC)

² Model Predictive Control (MPC)

³ Particle Swarm Optimization (PSO)



می‌شود؛ آنگاه با تلفیق الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات و حل صریح بدست آمده از روش کنترل پیش‌بین و تنظیم پارامترهای سیستم چارچوب تکه‌ای شبه خطی به کاهش پیچیدگی‌های سیستم اقدام نموده به طوری که تعداد چندوجهی‌های حاصل حداقل شده و کارایی سیستم بهبود یابد. سرانجام روش پیشنهادی بر روی خودرو بر روی شیب که به فرم چارچوب تکه‌ای شبه خطی مدل شده پیاده سازی می‌گردد.

کنترل بهینه زمان متناهی سیستم‌های تکه‌ای شبه خطی مقید

از آنجایی که سیستم‌های تکه‌ای شبه خطی با تعداد چارچوب‌های سیستم‌های مکمل خطی، دینامیک منطقی ترکیبی و مقیاس‌بندی بیشترین-کمترین متناسب هستند، از این رو بخش وسیعی از سیستم‌های هیبریدی خطی را تشکیل خواهند داد. سیستم‌های هیبرید خطی به صورت سیستم‌های تکه‌ای شبه خطی مقید مدل شده به صورت رابطه (۱) می‌باشند [۷].

$$x(t+1) = f_{PWA}(x(t), u(t)) := A_d x(t) + B_d u(t) + a_d \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \in D_d \quad (1)$$

جایی که $t \geq 0$ ، دامنه $D := \bigcup_{d=1}^{N_D} D_d$ از تابع $f_{PWA}(\cdot, \cdot)$ یک مجموعه غیر تهی فشرده در $\mathbb{R}^{n_x+n_u}$ ، $N_D < \infty$ تعداد دینامیک-های سیستم و $\{D_d\}_{d=1}^{N_D}$ بیانگر پارتیشن‌های چندوجهی از دامنه D خواهد بود.

یعنی $\bar{D}_d = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x+n_u} \mid D_d^x x + D_d^u u \leq D_d^0 \right\}$ برای تمامی $d \neq j$ ، $\text{int}(D_d) \cap \text{int}(D_j) = \emptyset$ می‌باشد.

$$\bar{D}_d := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x+n_u} \mid D_d^x x + D_d^u u \leq D_d^0 \right\}, \text{int}(D_d) \cap \text{int}(D_j) = \emptyset \quad \forall d \neq j \quad (2)$$

برای سیستم تکه‌ای شبه خطی از رابطه (۱)، مسئله چارچوب تکه‌ای شبه خطی مقید در قالب رابطه (۳) بیان می‌گردد [۲۸].

$$J_T^*(x(0)) := \min_{U_T} J_T(x(0), U_T) \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} x(t+1) = f_{PWA}(x(t), u(t)) \\ x(t) \in \chi^f \\ J_T(x(0), U_T) := l_T(x(T)) + \sum_{t=0}^{T-1} l(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3)$$

که $J_T(x(0), U_T)$ تابع هزینه، $l(\cdot, \cdot)$ تابع هزینه مرحله‌ای، $l_T(\cdot)$ تابع جریمه نهایی، U_T متغیر بهینه سازی که به صورت توالی ورودی $U_T := \{u(t)\}_{t=0}^{T-1}$ تعریف شده، $T < \infty$ افق پیش‌بین و χ^f مجموعه هدف پایانی (انتهاپی) در \mathbb{R}^{n_x} می‌باشند. هنگامی که مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید چندین حل دارد یا به عبارتی بهینه کننده، منحصر به فرد نیست $u_T^*(x(0)) := \{u^*(t)\}_{t=0}^{T-1}$ بیانگر یک تحقق از مجموعه بهینه کننده‌های موجود و ممکن می‌باشد. مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید به طور تلویحی، مجموعه‌ای از حالت‌های شدنی $\chi_T \subset \mathbb{R}^{n_x}$ ($x(0) \in \chi_T$) و مجموعه ورودی‌های شدنی $U_{T-t} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ ($u(t) \in U_{T-t}, t = 0, \dots, T-1$) را تعریف می‌نماید. هدف از این بخش دستیابی به یک بیان صریح با فرم بسته برای $u^*(t): \chi_T \rightarrow U_{T-t}$ و $t=0, \dots, T-1$ می‌باشد. در ادامه یک محدودیت برای مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید در نظر گرفته می‌شود [۷ و ۳]. مبدأ در فضای حالت - ورودی گسترده، یک نقطه تعادل سیستم تکه‌ای شبه خطی با رابطه (۱) است به این معنا که $0_{n_x} = f_{PWA}(0_{n_x}, 0_{n_u})$ و $0_{n_x+n_u} \in D$ ؛ این فرض خللی به کلیت موضوع وارد نمی‌کند. یعنی نتایج به دست آمده برای نقطه تعادل غیر صفر نیز صادق خواهد بود. شایان توجه است که قیدهای حالت خطی $x(t) \in \chi \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ و محدودیت‌های ورودی $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$ به فرم عمومی $C^x x + C^u u \leq C^0$ به طور طبیعی در توصیف D_d شرکت داشته‌اند. هدف از حل مسئله، یافتن بیان صریح یا فرم بسته برای مجموعه χ_T ، توابع $J_T^*: \chi_T \rightarrow \mathbb{R}$ و $u^*(t): \chi_T \rightarrow U_{T-t}$ ($t = 0, \dots, T-1$) می‌باشد. سیستم چارچوب تکه‌ای شبه خطی (۱) با تابع هزینه در رابطه (۴) بر اساس نرم ۱ و ∞ در نظر گرفته می‌شود.

$$l(x(t), u(t)) := \|Qx(t)\|_p + \|Ru(t)\|_p \\ l(x(T)) := \|Px(T)\|_p \quad (4)$$



که $\|\cdot\|_p$ با $p=\{1, \infty\}$ بیانگر نرم برداری استاندارد $1, \infty$ است. حل صریح مسئله کنترل بهینه با رابطه (۳) و مفروضات بیان شده، قانون کنترل فیدبک حالت چارچوب تکه‌ای شبه خطی متغیر با زمان تعریف شده از حالت اولیه $x(0)$ روی ناحیه چندوجهی به فرم \mathcal{P}_i if $x(0) \in \mathcal{P}_i$ $u^*(t) = \mu_{PWA}(x(0), t) = K_{T-t,i}x(0) + L_{T-t,i}$ که $t = 0, \dots, T$ می‌باشد، که به صورت $\bar{\mathcal{P}}_1 = \bigcup_{i=1}^{N_p} \mathcal{P}_i$ ، $x(0) \in \bar{\mathcal{P}}_1$ از مجموعه حالت‌های شدنی $\chi_T = \bigcup_{i=1}^{N_p} \mathcal{P}_i$ است که به صورت $\{x \in \mathbb{R}^{n_x} | \mathcal{P}_i^x \leq \mathcal{P}_i^0\}$ داده شده، می‌باشد. در موردی که سیاست کنترل افق پیشرو یا یک مدل کنترل پیش بین برای حلقه بسته استفاده گردد، کنترل به صورت قانون فیدبک حالت متغیر با زمان به فرم رابطه (۵) و برای $t \geq 0$ ، $u(t) = \mu_{RH}(x(t))$ است [۱].

$$\mu_{RH}(x(t)) := K_{T,i}x(t) + L_{T,i} \quad \text{if } x(t) \in \mathcal{P}_i \quad (5)$$

مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید را برای تمامی زمان‌های t ، شدنی می‌نامند اگر در زمان t عمل کنترل برای حالت اندازه‌گیری شده $x_t = x(0)$ موجود باشد. طوری که محدودیت‌های ورودی و حالت روی افق پیش بین مفروض T ، برآورده گردد [۲۹]. در ادامه فرض می‌گردد که پارامترهای P, Q, R ، و T, Q, R, P طوری انتخاب شوند که رابطه (۶) پایدار و برای تمامی زمان‌ها، شدنی باشد [۱۱]. تابع لیاپانف چارچوب تکه‌ای شبه خطی چندوجهی به فرم $V(x) = V_1^x + V_1^0$ است که $i=1, \dots, N_p$ و برای سیستم حلقه بسته $x(t) \in \chi_T$ موجود و ارائه شده است.

$$x(t+1) = f^{cl}(x(t)) := f_{PWA}(x(t), \mu_{RH}(x(t))) \quad (6)$$

همچنین مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید مورد نظر می‌تواند برای هر انتخابی از P, Q, R مطرح و حل شود [۷, ۳, ۳۱]. با این حال از نقطه نظر عملی برای پرهیز از عمل‌های کنترلی اضافه در هدایت حالت‌ها به نقطه تعادل، لازم است تا ماتریس‌های R, Q تمام رتبه ستونی باشند [۳۰]. در خط سیر این مقاله، تمرکز بر کاهش پیچیدگی قانون کنترل فرم بسته $\mu_{RH}(\cdot)$ می‌باشد بدون آنکه خللی بر پایداری حلقه بسته و شدنی بودن مسئله برای تمامی زمان‌ها وارد گردد.

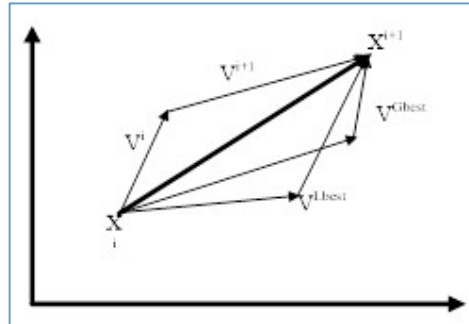
کاهش پیچیدگی

با توجه به ساختار و پارامترهای سیستم اصلی و مسئله بهینه‌سازی، یکی از اشکال‌های اساسی قوانین کنترل بهینه با فرم بسته $\mu(\cdot)$ ، افزایش و رشد نمایی تعداد نواحی N_p است. بنابراین برای اجرای واقعی حل فرم بسته $\mu(\cdot)$ ، یافتن تقریبی مناسب از کنترل کننده یا کنترل کننده‌ای با پیچیدگی کاهش یافته، بسیار ضروری به نظر می‌رسد. بعضی از محققین موضوع کاهش پیچیدگی یا تقریب کنترل کننده را با بهبود مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید با بازیابی یک حل زیر بهینه از آن یا با پس‌پردازش کنترل کننده بهینه محاسبه‌شده را بیش از پیش مورد توجه قرار داده‌اند. به عنوان نمونه هدف محققین در مراجع [۷ و ۱۱] محاسبه یک ارائه حداقلی چندوجهی از نواحی کنترل کننده اصلی به منظور کاهش پیچیدگی محاسباتی و فضای ذخیره‌سازی مورد نیاز می‌باشد؛ اگرچه در عمل، محاسبه محدود به تعداد کمی نواحی می‌باشد. از این رو بسته به آن، زمان محاسبه به صورت نمایی افزایش می‌یابد؛ طرح پیشنهادی دیگری در مراجع [۲۲, ۲۹] ارائه شده است که مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید اصلی برای سیستم‌های خطی مقید به منظور دستیابی به تقریبی برای تحلیل ساده‌تر، با بکارگیری برنامه‌ریزی چند پارامتری بهبود می‌یابد. اگرچه بسیاری از طرح‌های پیشنهادی در کاهش تعداد چندوجهی‌ها، توجه و تمرکز زیادی روی تضمین پایداری یا کاهش عملکرد نامی سیستم ندارند [۱۴]. در ادامه ابتدا به معرفی الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات پرداخته و سپس روشی بر اساس تلفیق الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات و حل صریح به دست آمده از مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید برای کاهش پیچیدگی ارائه می‌گردد که نه تنها بر کاهش پیچیدگی و زمان حل مسئله مذکور تاثیرگذار است بلکه حتی می‌توان به بهبود عملکرد نهایی سیستم و کاهش خطاهای حالت ماندگار سیستم نیز چشم داشت.



الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای حل مسئله تکه‌ای شبه خطی

روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات یکی از روش‌های تکاملی است که برای حل مسایل بهینه‌سازی بکاربرده می‌شود و تاکنون قابلیت آن برای استفاده در مسائل بهینه‌سازی باتوابع پیوسته به اثبات رسیده است [۳۰]. در این روش حرکت به سوی نقطه بهینه تابع بر اساس اطلاعات بهترین نقطه به دست آمده از هر یک عوامل موجود در جمعیت اولیه و نیز بهترین نقطه پیدا شده توسط نقاط همسایه صورت می‌گیرد. باتوجه به شکل (۱) اساس کار الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات را می‌توان چنین توضیح داد [۱۱]:



شکل ۱: اساس کار الگوریتم تکاملی بهینه‌سازی ازدحام ذرات

V^{Gbest} : سرعت در جهت بهینه سراسری، V^{Lbest} : سرعت در جهت بهینه محلی، V^{i+1} : سرعت ذره در تکرار $i+1$ ، V^i : سرعت ذره در تکرار i ، X^i : موقعیت در تکرار i ، X^{i+1} : موقعیت در تکرار $i+1$. ابتدا جمعیت اولیه به صورت تصادفی انتخاب می‌گردد.

$$V_i = [v_{1,i} \ v_{2,i} \ \dots \ v_{n,i}] \quad \text{و} \quad X_i = [x_{1,i} \ x_{2,i} \ \dots \ x_{n,i}]$$

$$V_{id}^{k+1} = \omega V_{id}^k + c_1 \times (V_{id}^{Lbest}) + c_2 \times (V_{id}^{Gbest}) \quad (7)$$

$$X_{id}^{k+1} = X_{id}^k + V_{id}^k$$

$$V_{id}^{Lbest} = pbest_{id}^k - X_{id}^k \quad (8)$$

$$V_{id}^{Gbest} = gbest_{id}^k - X_{id}^k$$

X^{Gbest} : بهینه سراسری در تکرار i ، X^{Lbest} : بهینه محلی در تکرار i ، ω : ضریب اینرسی. در نهایت هر ذره به صورت $X^{i+1} = X^i + V^{i+1}$ اصلاح می‌شود. مقادیر c_1 و c_2 مقادیری تصادفی هستند. اکنون، بر اساس اهداف این مقاله و الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات، تابع هدف تعریف شده برای این مسئله را می‌توان به صورت تعداد چند وجهی‌ها و مشخصه خروجی در نظر گرفت که مشخصه خروجی به صورت ویژگی‌های کارکردی مانند زمان نشست، فراجش و خطای حالت ماندگار تعیین می‌شود. ابتدا حل صریح مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید را که بر پایه روش کنترل پیش‌بین و بکارگیری برنامه‌ریزی چندپارامتری به دست آمده، در نظر گرفته و به عنوان تابع هدف الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات فرض می‌شود؛ آنگاه با تعریف تابع هدف جدید بر اساس تعداد چندوجهی‌های قانون کنترل، پارامترهای اصلی سیستم طوری طراحی می‌گردد تا اولاً حل سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید به تعداد چندوجهی‌های کمتر و طبیعتاً پیچیدگی کمتر منتهی شود و همچنین بهبود عملکرد واقعی سیستم با کنترل متغیرهای فیزیکی سیستم و ضرایب کنترل کننده PID حاصل شود؛ یعنی پس از بدست آوردن قانون کنترل بهینه صریح روش کنترل پیش‌بین و تعریف تابع هدف جدید به رابطه (۹) با بکارگیری الگوریتم شماره ۱ به کاهش پیچیدگی سیستم پرداخته می‌شود.

$$J_{new}^* := \text{Min}(\text{Fitness} - \text{Function}) = \text{Min}[\text{number of polyhedrals of } (\mu_{RH}(x(0))) + \text{Output Error}]$$

$$S.T. \begin{cases} u^* = \mu_{RH}(x(t)) := K_{T,i}x(t) + L_{T,i} & \text{if } x(t) \in \mathcal{P}_i \\ \text{Output} - \text{Error} \triangleq \sum \text{output characteristic} \end{cases} \quad (9)$$

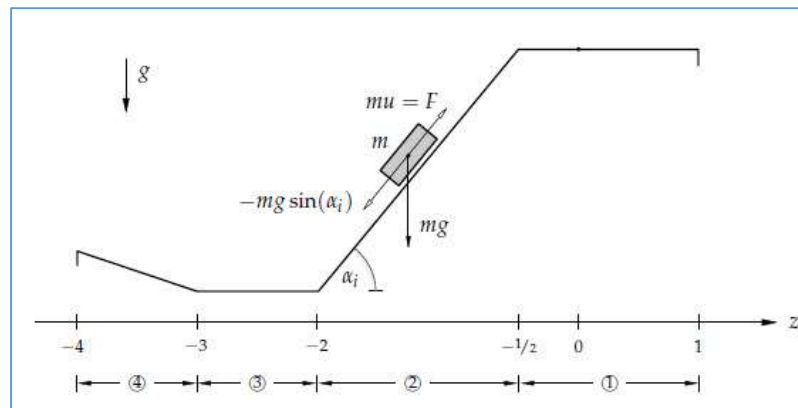
**الگوریتم ۱: حل مسئله مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات**

- ۱- داده‌های مورد نیاز مانند موقعیت، سرعت، پارامترهای الگوریتم مانند تعداد جمعیت و تعداد تکرار در نظر گرفته می‌شوند.
- ۲- جمعیت اولیه به فرم رابطه (۱۰) ایجاد می‌گردد:

$$X_i = [P_1 \ V_1 \ P_2 \ V_2 \ K_{Pi} \ K_{Vi}]$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = \text{جمعیت اولیه} \quad (10)$$

- ۳- مشخصه خروجی سیستم بر اساس پارامترهای اولیه اندازه‌گیری می‌شود سپس قانون کنترل به دست آمده توسط جعبه ابزار چند پارامتری^۱ اعمال می‌گردد و تعداد مناطق چندوجهی محاسبه می‌شوند. در نهایت تابع هدف به صورت تعداد مناطق چندوجهی و زمان نشست، فراجهش و خطای حالت ماندگار تعریف می‌شود.
- ۴- بهترین راه حل از بین کل جمعیت تعیین و جمعیت بر اساس رابطه (۹) به روزرسانی می‌شود.
- ۵- مراحل ۳ و ۴ به صورت تکراری انجام می‌شوند. شرایط همگرایی بررسی می‌گردد و در نهایت بهترین راه حل در خروجی نشان داده می‌شود.

خودرو روی شیب سیستم تکه‌ای شبه خطی

شکل ۲: خودرو روی شیب چارچوب تکه‌ای شبه خطی [۷]

همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده است، یک خودرو بدون اصطکاک را فرض گردیده که به صورت افقی روی تپه‌ای با شیب‌های مختلف حرکت می‌کند. هدف خودرو صعود به بالای یک تپه‌ی شیب‌دار و سپس حفظ موقعیت خود در بالا بدون سقوط از محیط تکه‌ای خطی است. دینامیک خودرو توسط قانون حرکت نیوتن به صورت رابطه (۱۱) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= v \\ m\dot{v} &= u - mgsina \end{aligned} \quad (11)$$

که p نشان‌دهنده موقعیت افقی، v سرعت جسم و g ثابت گرانش است. اگر $x = [p, v]^T$ ، جرم را $m = 1$ باشد، مدل زمان-گسسته توسط سیستم تکه‌ای خطی محدود و ناپیوسته به صورت رابطه (۱۲) ارائه می‌شود [۷]:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t) + a(x(t))$$

¹ Multi-parametric toolbox (MPT)

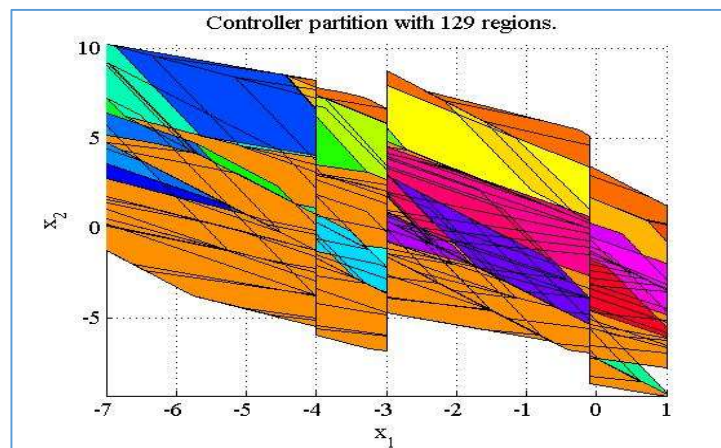


$$a(x(t)) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{if } [1 \ 0]x(t) \in [-0.5 \ 1] \\ -0.25g \sin\left(20 \frac{\pi}{180}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \text{if } [1 \ 0]x(t) \in [-2 \ -0.5] \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{if } [1 \ 0]x(t) \in [-3 \ -2] \\ -0.25g \sin\left(-5 \frac{\pi}{180}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \text{if } [1 \ 0]x(t) \in [-4 \ -3] \end{cases} \quad (12)$$

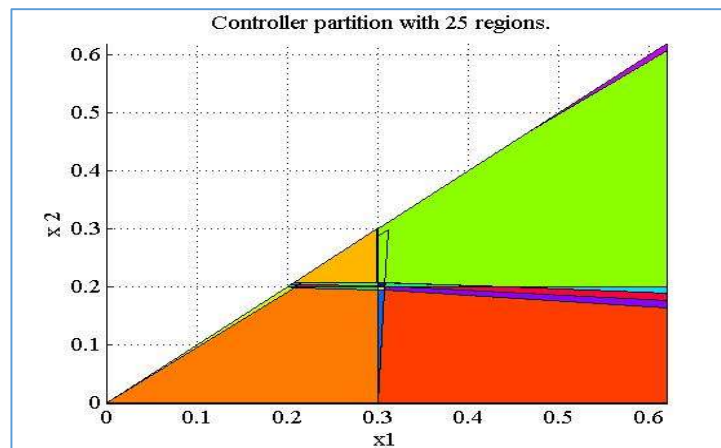
نیروی $F=mu$ ، که روی خودرو عمل می‌کند توسط $|u(t)| \leq 2$ و $|u(t+1) - u(t)| \leq 40$ محدود می‌گردد و خودرو مانع از بالا رفتن مستقیم از تپه شیب‌دار در $x_1 \in [-2, -0.5]$ می‌شود. عمل کنترل با $|u(t)| \leq 2$ ، $|u(t+1) - u(t)| \leq 40$ و $x_1 \in [-2, -0.5]$ محدود می‌گردد.

نتایج و بحث

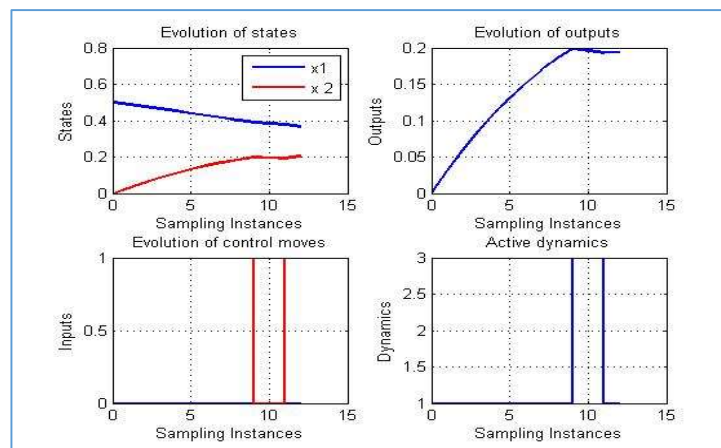
مسئله به فرم رابطه (۱۲) با $Q=\text{diag}([100,1]')$ و $R=5$ و $p=1$ حل می‌شود. حل سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید با قانون کنترل $u(t) = \mu_{RH}^*(t)$ توسط جعبه ابزار چندپارامتری که در شکل (۳) با ۱۲۹ منطقه چندوجهی نشان داده شده است انجام می‌گردد. راه حل بسته بهینه روش کنترل افق پیشرو با ۲۰۸۳ منطقه فضای حالت چندوجهی، سپس حذف ۱۰۶۱ منطقه از ۲۰۸۳ منطقه در مرجع [۷] ارائه شده است، که کاهش قابل توجه ۵۰ درصدی را به همراه دارد. با این که امکان ساده‌سازی بیشتری وجود دارد، محاسبات پس از ۱۶ ساعت خاتمه یافت. در این تحقیق با توجه به شکل (۴) از تاثیر الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات بر قانون کنترل با فیدبک برای کاهش تعداد مناطق چندوجهی آن با تنظیم پارامترهای سودمند سیستم با رویکرد اصلاح عملکرد با ۲۵ منطقه‌ی چندوجهی استفاده شده است. با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات تعداد چندوجهی به حداقل می‌رسد و پیچیدگی مسئله سیستم تکه‌ای شبه خطی مقید به آن بستگی دارد، با تنظیم جزئیات، طبق شکل (۵) این وابستگی کاهش می‌یابد و عمل «بالا رفتن» از شیب انجام می‌شود. روش کنترل ایده‌آل برای حالت‌های شروع بین ۲ تا ۴ با سرعت اولیه صفر، خودرو را به سمت ۴ شیب سربالایی می‌برد تا سرعت کافی برای مدیریت ۲ شیب سرازیری را به دست آورد.



شکل ۳: نواحی کنترل کننده روش کنترل پیش‌بین



شکل ۴: نواحی کنترل کننده حاصل از جعبه ابزار چند پارامتری



شکل ۵: متغیرهای حالت و خروجی خوردو روی شیب

بعد از اعمال الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات، پارامترهای بهینه سیستم برای رسیدن به هدف بیان شده و همچنین تعداد چند وجهی‌ها به دست می‌آید؛ از آنجا که برای رسیدن به هدف بیان شده، پارامترهای سیستم دستخوش تغییرات می‌گردد و تحت تأثیر این تغییرات عملکرد سیستم نامطلوب و باعث ایجاد خطای حالت ماندگار می‌گردد از اینرو کنترل کننده PID طراحی که ضرایب آن بر اساس الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات و حداقل سازی خطای بین خروجی واقعی و خروجی مطلوب محاسبه می‌شود.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، دو هدف مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا، مسئله کنترل بهینه سیستم چارچوب تکه‌ای شبه خطی مقید (CFTOC) فرموله و حل صریح مسئله با روش کنترل پیش‌بین و بکارگیری برنامه ریزی چند پارامتری به صورت قانون کنترل چارچوب تکه‌ای شبه خطی روی نواحی چندوجهی، بیان و سپس مشکلات مربوط به پیچیدگی حل و رشد نمایی آن به دلایلی نظیر تعداد نواحی چندوجهی و افزایش افق پیش‌بین ارائه گردید. آنگاه با تعریف تابع هدف جدید بر اساس کاهش چندوجهی‌های قانون کنترل، با تلفیق الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات و حل صریح بدست آمده از روش کنترل پیش‌بین و تنظیم پارامترهای سیستم چارچوب تکه‌ای شبه خطی به کاهش پیچیدگی‌های سیستم اقدام شده است به طوری که تعداد چندوجهی‌های حاصل به حداقل رسیده و به همراه آن کارایی سیستم بهبود یابد. سرانجام روش پیشنهادی بر روی خوردو بر روی شیب که به فرم چارچوب تکه‌ای شبه خطی مدل شده پیاده سازی گردید و همچنین با طراحی و اجرای یک کنترل کننده PID خطای حالت



ماندگار بین خروجی واقعی و مطلوب به مقداری بسیار ناچیز میل نمود. با مشاهده نتایج شبیه سازی ارائه شده، صحت ادعاها در خصوص کاهش چندوجهی‌ها به همراه بهبود حداکثر فراجش، زمان نشست، خطای حالت ماندگار و پایداری سیستم نمایان گردید.

مراجع

- [1] Sharifi, E., Damaren, C.J., (2020), A Numerical Approach to Hybrid Nonlinear Optimal Control, *International Journal of Control*, pp 3349-3362, 2020, <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1763471>.
- [2] Borrelli, F., Baotic, M., Bemporad, A., Morari, M., (2005), Constrained Optimal Control of Discrete-Time Linear Hybrid Systems, *Automatica* 41(10), pp 1709-1721, <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.04.017>.
- [3] Christophersen, F.J., (2007), Optimal control of constrained piecewise affine systems, Heidelberg: Springer, pp 43-91, <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72701-9>.
- [4] Nunez, A., Saez, D., Cortés, C. E., (2012), Hybrid Predictive Control, Hybrid Predictive Control for Dynamic Transport Problems, pp 21-42, <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4351-2>.
- [5] Sontag, E., (1981), Nonlinear regulation: The piecewise linear approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* 26, pp 346-358, <https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102596>.
- [6] Orłowski, P., (2018), Optimal PWA approximation for a nonlinear car on the hill system and properties of the hybrid MPC constrained time-optimal controller, 23rd International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics, <https://doi.org/10.1109/MMAR.2018.8486004>.
- [7] Christophersen, F.J., Zeilinger, M. N., Jones, C. N., Morari, M., (2007), Controller complexity reduction for piecewise affine systems through safe region elimination, 46th IEEE Conference on Decision and Control, <https://doi.org/10.1109/CDC.2007.4434694>.
- [8] Zhong, Z., Guan, M., Liu, X., Zheng, H., (2017), Piecewise affine modeling and explicit model predictive control for non-inverting buck-boost DC-DC converter, *Acta Technica* 62, pp 109-122.
- [9] Leon, J., Palacios, C., Salgado, C., Perez, E., Garcia, E., (2021), Particle Swarm Optimization, Genetic Algorithm and Grey Wolf Optimizer Algorithms Performance Comparative for a DC-DC Boost Converter PID Controller, *Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal* 6, pp 619-625, <https://doi.org/10.25046/aj060167>.
- [10] Saidi, E., Hammi, Y., Douik, A., (2020), Modeling and Explicit Model-Predictive Control of a Two-Tank System by PWA Approach, *Systems, Automation, and Control*, Berlin, Boston: De Gruyter, pp 123-138, <https://doi.org/10.1515/9783110591729-007>.
- [11] Kia-Kojouri, A., MashayekhiFard, J., (2022), An efficient application of particle swarm optimization in model predictive control of constrained two-tank system, *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 12(4) :pp 3540-3550, <http://doi.org/10.11591/ijece.v12i4>.
- [12] Horowitz, R., Varaiya, P., (2000), Control design of an automated highway system, *Proceedings of the IEEE* 88(7), pp 913-925, <http://doi.org/10.1109/5.871301>.
- [13] Baric, M., Grieder, P., Baotic, M., Morari, M., (2007), An efficient algorithm for optimal control of PWA systems with polyhedral performance indices, *Automatica* 44, pp 296-301, <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.05.005>.
- [14] Bemporad, A., Filippi, C., (2003), Suboptimal explicit receding horizon control via approximate multi-parametric quadratic programming, *Journal of optimization theory and applications* 117, pp 9-38, <https://doi.org/10.1023/A:1023696221899>.
- [15] Dua, V., Pistikopoulos, E.N., (2000), An algorithm for the solution of multi-parametric mixed integer linear programming problems, *Annals of operations research* 99, pp 123-139, <https://doi.org/10.1023/A:1019241000636>.
- [16] Kvasnica, M., Grieder, P., Baotic, M., Morari, M., (2004), Multi-parametric toolbox (MPT), Springer, Berlin, Heidelberg, pp 448-462, https://doi.org/10.1007/978-3-540-24743-2_30.
- [17] Kvasnica, M., (2008), Efficient Software Tools for Control and Analysis of Hybrid Systems, Phd Thesis, Slovak University of Technology in Bratislava, <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005645117>.



- [18] Mayne, D.Q., Rakovic, S., (2003), Model predictive control of constrained piecewise affine discrete-time systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 13, pp 261-279, <https://doi.org/10.1002/rnc.817>.
- [19] Tan, Y., Cao, Q., Li, L., Hu, T., Su, M., (2021), A chance-constrained stochastic model predictive control problem with disturbance feedback, *Journal of Industrial & Management Optimization* 17, pp 67-79, <https://doi.org/10.3934/jimo.2019099>.
- [20] Petsagkourakis, P., Heath, W., Theodoropoulos, C., (2020), Stability Analysis of Piecewise Affine Systems with Multi-model Model Predictive Control, *Automatica* 111, <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108539>.
- [21] Bemporad, A., Morari, M., Dua, V., Pistikopoulos, E.N., (2002), The explicit linear quadratic regulator for constrained systems, *Automatica* 38, pp 3-20, [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(01\)00174-1](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(01)00174-1).
- [22] Geyer, T., Torrisi, F.D., Morari, M., (2004), Optimal complexity reduction of piecewise affine models based on hyperplane arrangements, *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pp 1190-1195, <https://doi.org/10.23919/ACC.2004.1386734>.
- [23] Thomas, J., (2011), Complexity reduction of Robust Model Predictive Controller for uncertain Piecewise Affine Systems, *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pp 857-862, <https://doi.org/10.1109/ACC.2011.5991337>.
- [24] Grieder, P., Kvasnica, M., Baotic, M., Morari, M., (2004), Low complexity control of piecewise affine systems with stability guarantee, *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pp 1196-1201, <https://doi.org/10.23919/ACC.2004.1386735>.
- [25] Heemels, W., De Schutter, B., Bemporad, A., (2001), Equivalence of hybrid dynamical models, *Automatica* 37, pp 1085-1091, [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(01\)00059-0](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(01)00059-0).
- [26] Kennedy, J., Eberhart, R., (1995), Particle swarm optimization, *Proceedings of International Conference on Neural Networks*, pp 1942-1948, <https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>.
- [27] Kunalkumar, B., Gupta, R.A., Gupta, N., (2018), Optimized Design Parameters for the Bidirectional Isolated Boost DC-DC Converter Using Particle Swarm Optimization, *Soft Computing for Problem Solving Advances in Intelligent Systems and Computing* 817, Springer, Singapore, pp 531-543, https://doi.org/10.1007/978-981-13-1595-4_43.
- [28] Lee, D., (2017), Predictive Control of Uncertain Systems based on Motion Prediction, Phd Thesis, University of California, Berkeley.
- [29] Geyer, T., Torrisi, E.D., Morari, M., (2003), Efficient Mode Enumeration of Compositional Hybrid Systems, *Hybrid Systems: Computation and Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp 216-232, https://doi.org/10.1007/3-540-36580-X_18.
- [30] Maruta, I., Sugie, T., Kim, T., (2011), Identification of multiple mode models via Distributed Particle Swarm Optimization, *IFAC Proceedings* 44, pp 7743-7748, <https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.02438>.
- [31] Nikolakopoulos, G., Roussos, N.J., Alexis, K., (2010), A constrained finite time optimal controller for the diving and steering problem of an autonomous underwater vehicle, *Proceedings of the 7th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, pp 260-267, <https://doi.org/10.5220/0002948202600267>.