تحلیل ارتعاشات آزاد و رفتار استاتیکی قطاع پوسته کروی مرکب کم‌عمق به کمک روش هم هندسی

علی حسین‌زاده[۱]*، محمدرضا فروزان [۱]، یونس علیزاده [۲]

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.
۲. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

*نویسنده مسئول : ali.hosseinzadeh@me.iut.ac.ir
تاریخ دریافت:۱۴۰۱/۰۶/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۲۷

چکیده

با وجود کارایی مناسبی که روش المان محدود مرسوم در حل مسائل مهندسی دارد، این روش با محدودیت‌هایی مثل ضعف در مدل‌سازی دقیق شکل‌های هندسی، مرتبه پیوستگی پایین بین المان‌ها و صرف هزینه‌های محاسباتی بالا در سازه های بزرگ و پیچیده مواجه است. بنابراین استفاده از تکنیک‌های جایگزین که بتواند ضعف‌های بیان شده را برطرف نماید منطقی به منظر می‌رسد. بدین منظور یکی از روش‌های مورد توجه، روش هم‌هندسی بر پایه توابع نربز می‌باشد. در پژوهش حاضر رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد قطاع پوسته کروی مرکب چندلایه ساخته شده با پارچه الیاف تک جهته، به کمک روش هم‌هندسی مورد بررسی گرفته است. همچنین معادلات حاکم با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و به کمک اصل حداقل انرژی پتانسیل به دست آمده است. با اعمال مدل ساختاری، به‌کار گیری روش هم‌هندسی و حل معادلات مربوطه، نتایج رفتار پوسته کروی مرکب با و بدون در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی تحت بار استاتیکی و هم‌چنین فرکانس‌های طبیعی سازه استخراج شده است. به منظور اعتبار سنجی شبیه‌سازی‌های انجام شده، رفتار استاتیکی و فرکانس طبیعی دست آمده از مدل ارائه شده در شرایط مختلف، با نتایج حاصل از روش المان محدود مرسوم و آزمون‌های تجربی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند به کارگیری این روش در تحلیل پوسته‌های کروی، علاوه بر داشتن دقت مناسب، موجب کاهش قابل ملاحظه درجات آزادی مورد نیاز و هزینه های محاسباتی می‌گردد.

کلمات کلیدی: پوسته کروی، المان محدود، هم‌هندسی، توابع نربز، فرکانس طبیعی.

مقدمه

امروزه از پوسته‌های مرکب به دلیل استحکام مناسب و مقاومت ویژه بالا به طور گسترده در زمینه‌های مختلف از جمله در هوا فضا، صنایع دریایی و خودروسازی استفاده می‌شود. از این رو در سال‌های اخیر توسعه مدل‌سازی این قطعات به منظور پیش بینی رفتار مکانیکی به طوری که دقت خوبی با مدل فیزیکی داشته باشد، مورد توجه قرارگرفته است. همچنین از قطاع پوسته های کروی در سازه های زیادی مانند فضاپیماها، مخازن تحت فشار و زیردریایی‌ها استفاده می‌شود که تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی مختلفی قرار می‌گیرند. از این رو دانستن خواص مکانیکی قطاع پوسته کروی مرکب از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. تاکنون تحقیقات گسترده‌ای درباره رفتار پوسته های کروی انجام شده است[۱و۲].

در تحلیل‌های مهندسی، معمولا از روش عددی المان محدود بهره برده می‌شود. با وجود مزایایی که روش المان‌محدود در حل مسائل مهندسی دارد، این روش با ضعف هایی مواجه است. از جمله اشکالات روش المان محدود می‌توان به ضعف آن در مدل‌سازی دقیق شکل‌های هندسی به دلیل استفاده از توابع شکل چند جمله‌ای مرتبه پایین اشاره کرد. همچنین هنگام مواجه با گرادیان زیاد متغیرهای میدان در سازه، برای دستیابی به دقت مناسبی از جواب باید مرتبه یا تعداد المان‌ها را افزایش داد، که موجب افزایش درجات آزادی و به دنبال آن افزایش هزینه‌های محاسباتی و زمان حل می‌شود.

برای غلبه بر نقاط ضعف روش المان محدود، استفاده از توابع پایه بی‌اسپلاین به جای توابع شکل، اولین بار در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ توسط کاگان و همکاران[۳] و هولیگ و همکاران[۴] معرفی گردید. سپس این ایده با استفاده از توابع پایه نربز[۱] توسط هیوز و همکاران[۵] تکامل یافت و روش تحلیل هم‌هندسی[۲] نام گرفت. هیوز با ایده یکپارچه‌سازی مدل‌هندسی و محیط تحلیل، ضمن استفاده از خواص توابع پایه نربز در رسم شکل، از این توابع برای تقریب متغیرهای میدان نیز استفاده نمود. همچنین آن‌ها نشان دادند که این روش مزایایی به همراه دارد که عبارتند از: ۱) از بین بردن خلا بین مدل‌های هندسی و تحلیلی ۲) کاهش زمان آماده‌سازی مدل تحلیلی با از بین بردن مرحله شبکه‌بندی۳) بهره‌گیری از مزیت توابع نربز در رسم دقیق شکل ۴) افزایش مرتبه پیوستگی جواب بین المان‌ها که موجب بهبود دقت نتایج و سازگاری بهتر با فیزیک مسائل مهندسی می‌شود.

با شناخته شدن مزایای روش تحلیل هم‌هندسی، استفاده از این روش در حل مسائل مهندسی مختلف از جمله بهینه‌سازی شکل[۶] و مکانیک تماس[۷] موردتوجه قرار گرفت. به دلیل ویژگی‌های هموار بودن و پیوستگی بالای توابع نربز، به‌کارگیری روش هم‌هندسی در تحلیل ورق‌ها و پوسته‌ها بسیار کارا می‌باشد و تا کنون مراجع مختلفی به بیان آن پرداخته‌اند[۸-۹]. با این حال، استفاده از روش هم‌هندسی برای تحلیل پوسته‌های کروی مرکب به خصوص پوسته‌های تقویت شده با الیاف تک‌جهته، کمتر مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین، در پژوهش حاضر رفتار استاتیکی و ارتعاشات پوسته‌ای که این‌گونه تولید می‌شود، به کمک روش هم‌هندسی، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

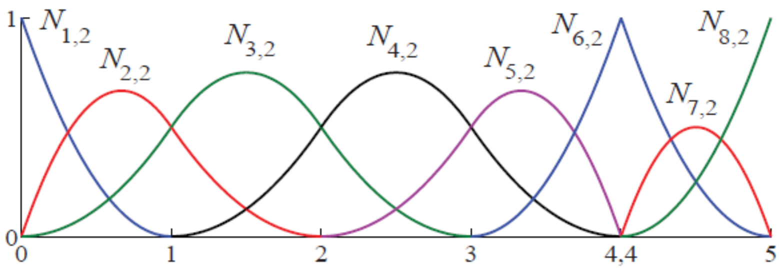
توابع بی اسپلاین و نربز

توابع نربز جزء توابع پارامتری می‌باشند و در تعریف آن‌ها از یک پارامتر واسط که معمولا با ξ نمایش داده می‌شود، استفاده می‌گردد. این توابع کاربرد وسیعی در طراحی‌های گرافیکی و ترسیم سطوح پیچیده دارند. یک منحنی بی‌اسپلاین را می‌توان با تعیین مرتبه[۳]، بردار گرهی[۴]، نقاط کنترلی[۵] و وزن نقاط کنترلی معرفی نمود[۵]. بردارگرهی دستگاه مختصات غیر نزولی در فضای پارامتری است که به صورت مجموعه $E=\{\xi_1,\xi_2,\ \dots,\xi_{n+p+1}\}$ نوشته می‌شود. در توابع نربز تعداد اعضای بردار گرهی به صورت $n+p+1$ تعریف می‌شوند که p مرتبه چند جمله‌ای و n تعداد توابع پایه‌ای است که در ساخت منحنی نربز مورد استفاده قرار می‌گیرد. گره‌ها فضای پارامتری را به المان‌ها تقسیم می‌کنند و مرزهای المان در فضای فیزیکی تصاویر خطوط گرهی تحت نگاشت نربز می‌باشند[۵]. با در دست داشتن یک بردار گرهی توابع پایه مربوطه بر اساس الگوریتم بازگشتی دی-بور به کمک روابط زیر تعیین می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&N_{i,0}=\begin{cases}1 & \xi_i\le\xi<\xi_{i+1}\\ 0 & otherwise\end{cases}\\
&N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi)
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

یکی از ویژگی‌های مهم توابع بی‌اسپلاین، انعطاف‌پذیری آن‌ها در تغییر مرتبه پیوستگی بین المان‌ها است. به‌طور کلی توابع پایه از مرتبه p در گره ξ_i دارای پیوستگی C^{p-m} می‌باشد به طوری که m تعداد تکرار مقدار ξ_i در بردار گرهی می‌باشد[۵]. این ویژگی‌مهم توابع نربز موجب می‌شود بتوان با افزایش مرتبه توابع پایه، مرتبه پیوستگی بین المان‌ها را نیز افزایش داد که در بهبود دقت نتایج حل تاثیرگذار است. به عنوان مثال در شکل (۱) توابع پایه مربوط به بردار گره $E=\{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ نشان‌داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، توابع پایه این بردار گرهی در نقاط در گره میانی $\xi_i=4$ پیوستگی C^0 پیدا می‌کند. در صورتی که در دیگر گره‌های میانی $\xi_i=1,2,3$ پیوستگی C^1 حاکم می باشد.

[1] Nurbs
[2] Isogeometric
[3] Order
[4] Knot vector
[5] Control points



شکل (۱): توابع پایه مرتبه دوم بردار گرهی {0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5}

در نهایت با در نظر گرفتن یک شبکه نقاط کنترلی C_i با مختصات مشخص ونسبت دادن وزن w_i به هریک از نقاط کنترلی، منحنی و سطوح نربز مطابق روابط زیر بدست می‌آید:

$$L(\xi)=\sum_{i=1}^{n}R_{i,p}(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_{i,p}(\xi)w_i\,C_i}{\sum_{i'=1}^{n}N_{i',p}(\xi)w_i} \tag{۲}$$

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}\,C_{i,j}}{\sum_{i'=1}^{n}\sum_{j'=1}^{m}N_{i',p}(\xi)M_{j',q}(\eta)w_{i',j'}} \tag{۳}$$

در این روابط، $N_{i,p}(\xi)$ و $M_{j,q}(\eta)$ توابع پایه تک‌متغیره نربز مربوط به بردارهای گرهی E و $H=\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\dots,\eta_{m+q+1}\}$ می‌باشند که به کمک رابطه (۱) بدست می‌آیند. همچنین $R_{i,p}$ توابع پایه نربز با در نظر گرفتن وزن نقاط کنترلی هستند.

روش هم‌هندسی برپایه توابه نربز

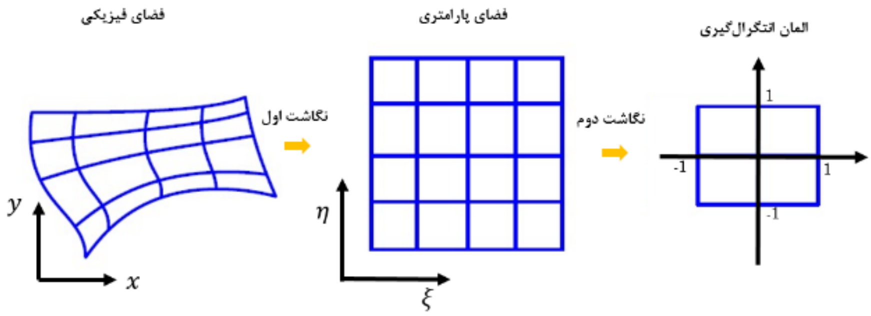
در روش هم‌هندسی، از توابع نربز به منظور رسم شکل هندسی استفاده می‌شود. سپس همان بردار گرهی و توابع پایه برای تخمین متغیرهای میدان به کار برده می‌شوند[۵]. براین اساس متغیر میدان (U) و موقعیت هندسی یک نقطه (X) با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شوند:

$$X(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{i,j}(\xi,\eta)X_{i,j} \tag{۴}$$

$$U(\xi,\eta)\approx\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{i,j}(\xi,\eta)U_{i,j} \tag{۵}$$

به‌طوریکه، $U_{i,j}$ بیانگر متغیرهای کنترلی و $X_{i,j}$ مختصات نقاط کنترلی در نمایش ماتریسی می‌باشند. همچنین ضرایب ترکیب خطی $U_{i,j}$ بیانگر توابع پایه مورد استفاده در روش هم‌هندسی بوده و همان نقشی را ایفا می‌کنند که توابع شکل در روش المان‌محدود ایزوپارامتریک دارند که به صورت $R_{i,j}$ نمایش داده می‌شوند. در روش هم‌هندسی تنوع مقادیری که گره‌ها در بردار گرهی دارند نشان دهنده تعداد المان‌ها می‌باشند. به عنوان مثال برای بردار گرهی $E=\{0,0,0,0.5,1,1,1\}$ ، فضای حل به دو المان $0\le\xi<0.5$ و $0.5\le\xi\le1$ تقسیم می‌شود. ضمن آن که هر تابع پایه $N_{i,p}$ در محدوده‌ی ξ_i تا ξ_{i+p+1} غیر صفر می‌باشد.

مطابق شکل (۲) در تحلیل هم‌هندسی سه فضای مختلف وجود دارد. ابتدا به کمک رابطه (۵)، هندسه موردنظر در مختصات فیزیکی، به یک فضای منظم که فضای پارامتری نامیده می‌شود، انتقال می‌یابد. توابع پایه نیز بر حسب مختصات پارامتری تعریف می‌شوند. سپس برای انتگرال‌گیری عددی، هر المان به کمک یک نگاشت خطی به یک مختصات سومی که بین ۱- و ۱ است انتقال می‌یابد و با محاسبه انتگرال‌های مربوطه، ماتریس سختی و بردار نیرو در هر المان محاسبه می‌گردد.



شکل (۲): فضاهای کاری در روش هم هندسی

معادلات حاکم

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی در پوسته به صورت زیر می‌باشد[۱۰]:

$$\begin{aligned}
U_{\varphi}(\varphi,\theta,\xi) &= u_{\varphi}(\varphi,\theta)+\xi\beta_{\varphi}(\varphi,\theta)\\
U_{\theta}(\varphi,\theta,\xi) &= u_{\theta}(\varphi,\theta)+\xi\beta_{\theta}(\varphi,\theta)\\
W(\varphi,\theta,\xi) &= w(\varphi,\theta)
\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن u_{φ}و u_{θ} و w جابجایی سطح میانی پوسته در جهت φ، θ، r و β_{φ} و β_{θ} دوران خطوط عمود بر سطح میانی در راستای φ و θ بوده که جابجایی‌های تعمیم یافته نامیده می‌شوند. بر این اساس روابط کرنش– تغییر مکان برای پوسته متقارن محوری به‌صورت زیر خواهد بود[۱۰]:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\varphi}^{0}=\frac{1}{R_{\varphi}}\left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\varphi}+w\right),\quad \varepsilon_{\theta}^{0}=\frac{1}{R_{0}}\left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\theta}+u_{\varphi}\cos(\varphi)+w\sin(\varphi)\right)\\
&\gamma_{\theta\varphi}^{0}=\frac{1}{R_{\varphi}}\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R_{0}}\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\theta}-\frac{u_{\varphi}\cos(\varphi)}{R_{0}},\quad \kappa_{\varphi}=\frac{1}{R_{\varphi}}\frac{\partial\beta_{\varphi}}{\partial\varphi}\\
&\kappa_{\theta}=\frac{1}{R_{0}}\left(\frac{\partial\beta_{\theta}}{\partial\theta}+\beta_{\varphi}\cos(\varphi)\right)\\
&\kappa_{\theta\varphi}=\frac{1}{R_{\varphi}}\frac{\partial\beta_{\theta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R_{0}}\left(\frac{\partial\beta_{\varphi}}{\partial\theta}+\beta_{\theta}\cos(\varphi)\right)\\
&\gamma_{\varphi\xi}=\frac{1}{R_{\varphi}}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}-u_{\varphi}\right)+\beta_{\varphi},\quad \gamma_{\theta\xi}=\frac{1}{R_{0}}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{u_{\theta}\sin(\varphi)}{R_{0}}+\beta_{\theta}
\end{aligned} \tag{۷}$$

که R_{φ} و R_{θ} شعاع انحنای پوسته می‌باشند. با در نظر گرفتن R_{φ}و R_{0}مساوی با R و $R\sin(\varphi)$ هندسه پوسته کروی حاصل می شود که R شعاع انحنای کره می باشد. بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، برای هر گره روی پوسته، ۵ درجه آزادی به صورت $U^{T}=\{u_{\varphi},u_{\theta},w,\beta_{\varphi},\beta_{\theta}\}$ در نظر گرفته می‌شود که به کمک روش هم‌هندسی، درجات آزادی در هر المان به صورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$U_{I}\approx\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}\,U^{I}{}_{i,j}}{\sum_{i'=1}^{n}\sum_{j'=1}^{m}N_{i',p}(\xi)M_{j',q}(\eta)w_{i',j'}} \tag{۸}$$

که U_{I} هریک از درجات آزادی بردار U می‌باشد. با اعمال اصل حداقل انرژی پتانسیل به معادلات ساختاری حاکم بر پوسته کروی، ماتریس سختی K و بردار نیرو F بدست می‌آید[۶]. در نهایت به کمک نگاشت‌های نشان‌داده شده در شکل (۲)، ماتریس سختی و بردار نیرو برای هر المان هم‌هندسی محاسبه می‌گردد.

اعمال روش هم‌هندسی به پوسته کروی

در پژوهش حاضر، به منظور تحلیل پوسته کروی، ابتدا هندسه پوسته کروی مورد نظر در دستگاه مختصات کروی تعریف می‌گردد. بدین منظور دو بردار گرهی مرتبه ۲ متعامد E و H متناظر با مختصات φ و θ تعریف گردید که با ضرب یک به یک توابع پایه مربوطه، توابع پایه برای سطح کروی محاسبه می‌گردد.

$$E=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+p+1}\} \tag{۹}$$

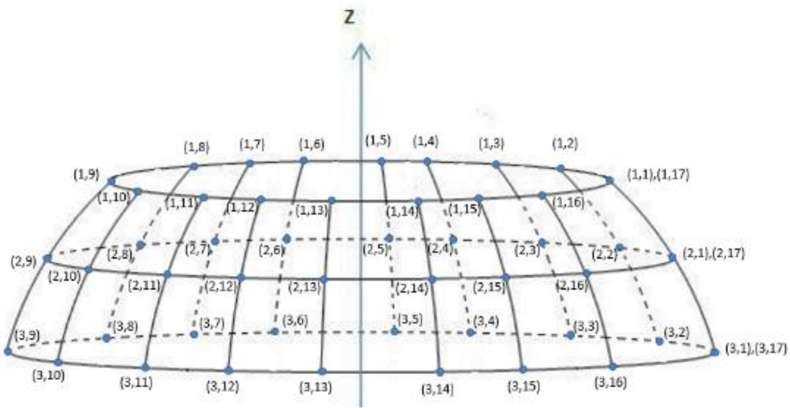
$$\mathrm{H}=\{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{m+q+1}\} \tag{۱۰}$$

با توجه به بسته بودن هندسه در جهت θ، از قید برابر بودن گره ابتدا و انتها استفاده گردید.

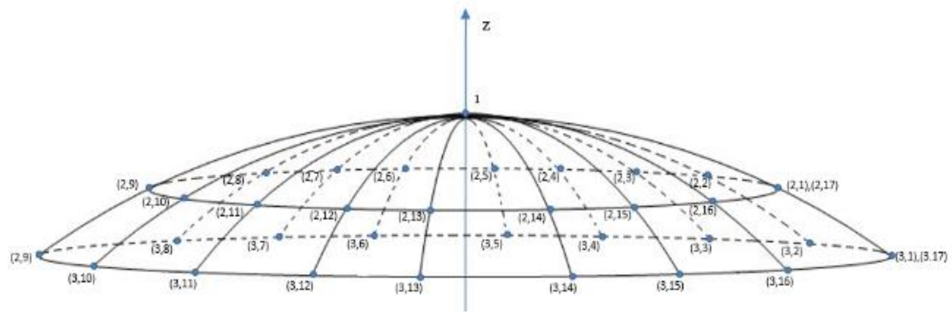
$$U_{i,1}=U_{i,m} \tag{۱۱}$$

در این پژوهش وزن نقاط کنترلی برابر یک در نظر گرفته می‌شود. با توجه به شکل هندسی پوسته، دو نوع شبکه مختلف برای قطاع کروی تعریف می‌گردد که تصویر آن‌ها در شکل‌های (۳) و (۴) قابل مشاهده است. در صورتی که پوسته دارای سوراخ میانی باشد و محور دوران پوسته را قطع نکند، تعداد n×m گره روی پوسته کروی قرار می‌گیرد. برای پوسته شامل قطب نیز مطابق شکل (۴) بر روی قطب یک گره قرار می‌گیرد. در نتیجه تعداد گره‌ها در این حالت از رابطه 1+n×(m-1) تبعیت می‌کند، همچنین توابع پایه مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\begin{cases} N_{i,p}(\xi) & i=1 \\ N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\xi) & i=2:n;\ j=1:m \end{cases} \tag{۱۲}$$



شکل (۳): محل قرارگیری نقاط کنترلی در هندسه قطاع کروی بدون قطب



شکل (۴): محل قرارگیری نقاط کنترلی در هندسه قطاع کروی دارای قطب

نتایج و بحث

در ابتدا خمش قطاع پوسته کروی مرکب چند لایه تقویت شده با پارچه الیاف بافته شده بررسی گردید. بدین منظور رفتار پوسته کروی تحت بار متمرکز با شرایط تکیه‌گاهی گیردار به کمک روش هم‌هندسی شبیه‌سازی شد. خواص در نظر گرفته شده برای ماده مرکب اپوکسی الیاف شیشه مطابق جدول (۱) می‌باشد. همچنین شبیه‌سازی‌های انجام شده یک بار با فرض کرنش‌های

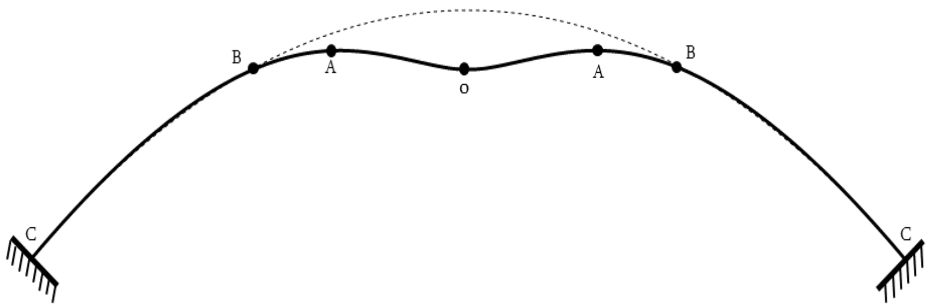
کوچک و صرف نظر کردن از جملات غیرخطی روابط کرنش تغییر مکان، و یک بار با در نظر گرفتن جملات غیرخطی صورت پذیرفت.

جدول (۱): خواص مکانیکی استفاده شده برای ماده مرکب اپوکسی/الیاف شیشه

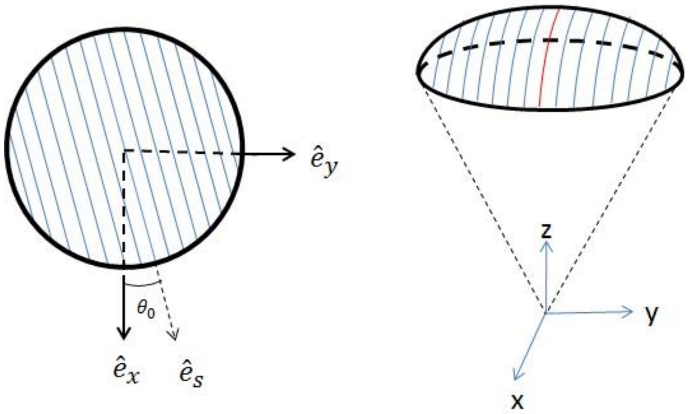
خواص ماده	مقدار	واحد
E1	۱۷۸۰۰	*MPa*
E2	۱۹۵۰	*MPa*
G12	۱۰۲۵	*MPa*
G13	۱۰۲۵	*MPa*
G23	۹۰۰	*MPa*
υ_{12}	۰/۲۷	-

شکل (۵) جابجایی یک پوسته کروی تحت بار متمرکز در مرکز با لبه‌های گیردار را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل نیز نشان داده شده است، جابجایی‌های ایجاد شده در پوسته را می‌توان به سه ناحیه OA، AB و B تقسیم نمود. اوکین[۱] و اشول[۲] برای پوسته‌های کروی ایزوتروپ و همچنین پوسته‌های ارتوتروپی که جهت‌گیری الیاف در راستای محیطی می‌باشند، گزارش کرده‌اند که با اعمال بار متمرکز فشاری، یک گودی در ناحیه OA به صورت موضعی شکل می‌گیرد. در این حالت انحنایی‌که در این محل به وجود می‌آید به صورت تقریبی برابر شعاع انحنای کره و در جهت عکس آن می‌باشد. این شرایط حاکی از آن است که پوسته با شرایط تغییر شکل کاملاً خمشی و مستقل از تغییرات غشائی روبه‌رو بوده که به تولید محدوده‌ی کوچک OA در همسایگی محل اعمال بار منجر می‌شود.

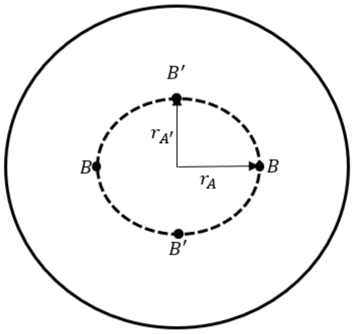
در مقابل در ناحیه BC، تنش‌ها، کرنش‌ها و تغییرمکان‌های ایجاد شده نسبت به ناحیه OA ناچیز می‌باشد. نتایج بدست آمده برای پوسته کروی مرکبی که جهت‌گیری الیاف در آن به‌صورت شکل (۶) می‌باشد نیز مشابه حالتی است که برای پوسته ارتوتروپ بیان می‌شود. در این شرایط در محدوده OA کرنش‌های غشایی در مقایسه با کرنش‌های ناشی از تغییرات انحنا ناچیز می‌باشد. اما تفاوتی که پوسته مذکور با نمونه ایزوتروپ و ارتوتروپ آن دارد این است که تصویرمحدوده OA برای پوسته‌های کروی ایزوتروپ و ارتوتروپی که خواص آن‌ها دارای تقارن محوری است به صورت دایره می‌باشد اما در پوسته مذکور، تصویر مورد نظر در محدوده OA تقریبا شکلی به صورت بیضی دارد. هرچند که نتایج نشان می‌دهد میزان بیضی شدگی این ناحیه، اندک می‌باشد. شکل (۷) نمایی از بالای پوسته و ناحیه OA را نشان می‌دهد. همچنین یک ناحیه AB در پوسته مشاهده شده است که در این قسمت تغییر رفتار از حالت OA به BC رخ می‌دهد. همچنین درناحیه BC ،تغییر مکان شعاعی پوسته در این ناحیه در جهت خارج کره می‌باشد.



شکل (۵): نمای جانبی از جابجایی ایجاد شده در پوسته تحت بار متمرکز



شکل (۶): نحوه قرار گیری الیاف روی پوسته کروی ساخته شده با پارچه الیاف تک‌جهته

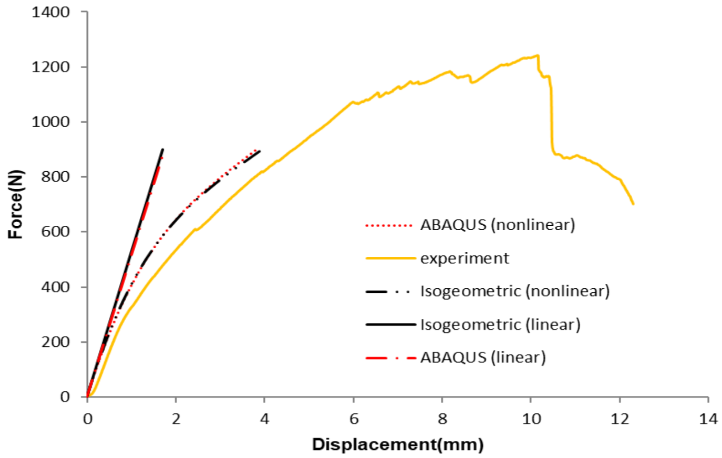


شکل (۷): نمای از بالای پوسته کروی و ناحیه به وجود آمده در اطراف محل اعمال بار

به منظور ارزیابی بهتر نتایج، پوسته کروی مرکب با شعاع R=۱۲۰ mm، ضخامت t = ۱/۶۴ mm، اندازه دهانه a= ۵۰ mm و هم‌چنین زوایای لایه‌چینی [۰/۹۰/۹۰/۰] =θ_0 مطابق شکل (۶) ساخته شد. سپس پوسته مورد نظر تحت بار متمرکز و شرایط لبه‌ای گیردار مورد آزمایش قرار گرفت و جابجایی ایجاد شده در محل اعمال بار اندازه‌گیری شد. نمونه‌ای از پوسته تولید شده و اعمال بار متمرکز بر آن در شکل (۸) قابل مشاهده است.

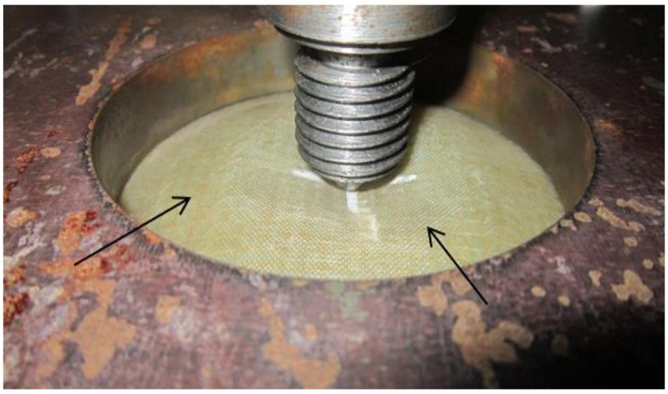
شکل (۸): نمونه پوسته کروی ساخته شده و نحوه اعمال بار متمرکز در آزمون تجربی

نتایج بدست آمده از روش تحلیل هم‌هندسی، با و بدون لحاظ نمودن اثرات غیرخطی هندسی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس و نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردید، که براساس شکل (۹) مطابقت خوبی بین نتایج بدست آمده مشاهده گردید.



شکل (۹):مقایسه منحنی نیرو-جابه‌جایی به دست آمده از آزمون تجربی و شبیه‌سازی عددی

مطابق شکل(۱۰)، در آزمون تجربی نیز ناحیه گودی توصیف شده در اطراف محل اعمال بار به خوبی قابل مشاهده بود. همچنین در هنگام انجام آزمون، با افزایش بار وارده در وسط پوسته، ترک‌های بزرگ مشاهده شد که با بیشتر شدن نیرو در راستای الیاف رشد می‌کند و به همین دلیل در منحنی نیرو- تغییر مکان، خطا در این ناحیه از پوسته که دچار ترک شده است، افزایش می‌یابد. همچنین نتایج آزمون تجربی مطابقت خوبی با نتایج به دست آمده از تحلیل هم‌هندسی با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی دارد که علت آن به بزرگ بودن مقادیر جابه‌جایی نسبت به ضخامت پوسته می‌باشد.



شکل (۱۰): ناحیه به وجود آمده در اطراف محل اعمال بار در هنگام آزمایش تجربی

با اطمینان از صحت نتایج بدست آمده از مدل هم‌هندسی ارائه شده، فرکانس‌های طبیعی بدست آمده برای پوسته مورد نظر به کمک روش هم‌هندسی و نرم‌افزار آباکوس مقایسه گردید. نتایج حاکی از انطباق خوب فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از تحلیل هم‌هندسی با نتایج نرم‌افزار آباکوس می‌باشد. در جدول (۲)، چهار فرکانس طبیعی اول محاسبه شده برای پوسته کروی مورد نظر برای سه نوع لایه چینی مختلف آورده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در پوسته کروی مرکب که با پارچه الیاف تک‌جهته ساخته شده است، زوایای لایه‌چینی تاثیر زیادی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته دارد. به گونه‌ای که با تغییر زاویه الیاف از θ_0= [۰/۰/۰/۰] به θ_0= [۰/۹۰/+۴۵/-۴۵]، فرکانس طبیعی اول افزایش ۴۵ درصدی را نشان می‌دهد.

جدول (۲): فرکانس طبیعی بی بعد شده پوسته کروی مرکب برحسب زوایای لایه‌چینی مختلف ($\Omega_i = \omega_i \sqrt{\rho / E_2}$)

لایه‌چینی	روش حل	Ω 1	Ω 2	Ω 3	Ω 4
[۰/۰/۰/۰]	هم‌هندسی	۱/۳۶۴	۱/۴۰۱	۱/۵۵۶	۱/۶۴۳
	آباکوس	۱/۳۷۴	۱/۴۰۸	۱/۵۶۲	۱/۶۵۰
[۰/۹۰/۹۰/۰]	هم‌هندسی	۱/۷۵۰	۱/۸۳۱	۱/۹۰۴	۱/۹۳۶
	آباکوس	۱/۷۵۹	۱/۸۳۶	۱/۹۱۰	۱/۹۴۴
[۰/۹۰/۴۵/-۴۵]	هم‌هندسی	۱/۹۹۶	۲/۰۷۱	۲/۱۶۳	۲/۲۱۶
	آباکوس	۲/۰۰۱	۲/۰۷۴	۲/۱۷۴	۲/۲۱۹

نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، رفتار خمشی و ارتعاشات آزاد پوسته کروی مرکب تقویت شده با پارچه الیاف تک‌جهته با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به کمک روش هم‌هندسی مورد ارزیابی قرار گرفت. بر اساس روش هم‌هندسی، ابتدا هندسه پوسته کروی با تعریف بردارهای گرهی و توابع پایه درجه دوم تعریف شد و سپس با استفاده از همان توابع پایه برای تخمین میدان جابه‌جایی، ماتریس سختی و بردار نیرو استخراج گردید و با حل دستگاه معادلات بدست آمده، نتایج تحلیل استاتیکی برای پوسته کروی با لبه‌های گیردار و تحت بار متمرکز به دست آمد. همچنین ۴ فرکانس طبیعی اول پوسته مورد نظر با زوایای لایه‌چینی مختلف محاسبه گردید. برای اطمینان از صحت شبیه‌سازی انجام شده، نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس مقایسه گردید، که تطابق خوبی میان نتایج بدست آمده مشاهده شد. همچنین به منظور بررسی تجربی، با ساخت یک نمونه پوسته کروی مرکب و اعمال بار متمرکز، نتایج بدست آمده با نتایج شبیه‌سازی عددی مقایسه گردید و مشاهده شد که با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی، مطابقت خوبی میان مشاهدات تجربی و نتایج شبیه‌سازی عددی وجود دارد.

مراجع

[1] Evkin, A. Y., (2005) ,Large deflections of deep orthotropic spherical shells under radial concentrated load: asymptotic solution, International Journal of Solids and Structures, 42(3-4), pp. 1173-1186.

[2] Ashwell, D., (1959), On the large deflection of a spherical shell with an inward point load, in Proceedings of IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, pp. 43-63.

[3] Kagan, P., Fischer, A. and Bar-Yoseph, P. Z., (1998), New B-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 41(3), pp. 435-458.

[4] Höllig, K., Reif, U. and Wipper, J., (2001), Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems, SIAM Journal on Numerical Analysis, 39(2), pp. 442-462.

[5] Hughes, T. J., Cottrell, J. A. and Bazilevs, Y., (2005), Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer methods in applied mechanics and engineering, 194(39-41), pp. 4135-4195.

[6] López, J., Anitescu, C. and Rabczuk, T., (2021), Isogeometric structural shape optimization using automatic sensitivity analysis, Applied Mathematical Modelling, 89, pp. 1004-1024,.

[7] De Lorenzis, L., Temizer, İ., Wriggers, P. and Zavarise, G., (2011), A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 87(13), pp. 1278-1300,.

[8] Benson, D., Hartmann, S., Bazilevs, Y., Hsu, M.-C. and Hughes, T., (2013), Blended isogeometric shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 255, pp. 133-146,.

[9] Guo, Y., Do, H. and Ruess, M., (2019), Isogeometric stability analysis of thin shells: From simple geometries to engineering models, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 118(8), pp. 433-458.

[10] Shamloofard, M., Hosseinzadeh, A. and Movahhedy, M. R. (2021), Development of a shell superelement for large deformation and free vibration analysis of composite spherical shells, Engineering with Computers, 37, pp. 3551-3567.