



تحلیل عملکرد و بهینه‌سازی ربات موازی ۶ درجه آزادی نوع هانت

عرفان میرشکاری^{۱*}، افشین قنبرزاده^۲

۱. گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران
۲. گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

*نویسنده مسئول: Erfan.mirshekari@gmail.com

چکیده

در کار حاضر، ربات موازی شش درجه آزادی با محرک دورانی نوع هانت بر اساس شاخص‌های عملکردی سینماتیکی-استاتیکی بهینه می‌گردد و تاثیر پارامترهای هندسی ساختاری بر این شاخص‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، ابتدا ویژگی‌های ساختاری و هندسی ربات موازی شش درجه آزادی با محرک دورانی نوع هانت معرفی می‌گردند. سپس روابط مربوط به سینماتیک معکوس برای تعیین ارتباط میان مختصات مفصلی ربات و مجری نهایی استخراج می‌شود. ماتریس ژاکوبین به عنوان ارتباط‌دهنده بردار سرعت مجری نهایی و بردار سرعت‌های زاویه‌ای مفصلی استخراج می‌گردد. شاخص‌های توانایی تردستی، ظرفیت اعمال نیرو و عدد وضعیت به عنوان شاخص‌های عملکردی مد نظر قرار می‌گیرند. پس از تعیین تابع هدف، قیود بهینه‌سازی و حدود پارامترهای هندسی با استفاده از روش بهینه‌سازی زنبور عسل چند هدفه، نمودار پارتو مربوط به پاسخ‌های نامغلوب که نشان دهنده توزیع بهترین پاسخ‌ها است به دست می‌آیند. در نهایت، ساختارهایی ارائه می‌شود که هر کدام از آن‌ها بر مبنای یکی از شاخص‌ها دارای بهترین عملکرد می‌باشد. همچنین از میان دسته مشخصات هندسی به دست آمده از نمودار پارتو، یک ساختار انتخاب می‌گردد از لحاظ هر سه مشخصه عملکردی، وضعیت مناسبی دارد. در نهایت تاثیر تغییر مکان مجری نهایی در فضای کاری بر عملکرد ربات موازی نوع هانت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: ربات موازی نوع هانت، شاخص‌های عملکردی، بهینه‌سازی چندهدفه، نمودار پارتو.

مقدمه

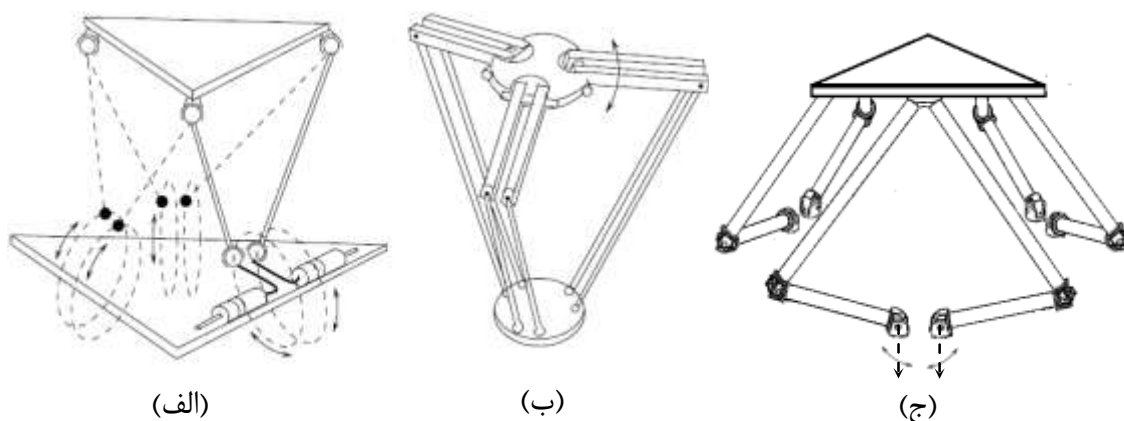
ربات‌های موازی دارای ویژگی‌های منحصر به فردی مانند دقت و سختی بالا هستند. این نوع ربات‌ها دارای صفحه متحرکی می‌باشند که به وسیله تعدادی بازو به صفحه ثابت وصل شده است. هدف اصلی در طراحی ربات موازی، مکان‌یابی و قرارگیری صحیح مجری نهایی در محل مورد نظر است. به عبارت دیگر مجری نهایی ربات بایستی در مسیر تعیین شده و با سرعت مطلوب به عملکرد نهایی مد نظر دست یابد. بدین منظور بایستی مجموعه معیارهای عملکردی سینماتیکی-استاتیکی متناسب با نیاز موجود، در نظر گرفته شود. برآورد عملکرد ربات‌های موازی بر اساس شاخص‌های عملکردی، یکی از عناوین مورد علاقه محققین می‌باشد [۱]. شاخص‌های سینماتیکی-استاتیکی ارائه شده در این زمینه را می‌توان به دو دسته‌ی شاخص‌های بر پایه عدد وضعیت^۱ و توانایی تردستی^۲ تقسیم نمود. سالیسبوری و کریگ [۲] عدد وضعیت مربوط به ماتریس ژاکوبین را معرفی کردند و انجلس [۳] از معکوس این عبارت برای مهارت سینماتیکی ربات سری استفاده نمود. گوسلین [۴] مفهوم عدد وضعیت را برای برآورد ایزوتروپی ربات موازی به کار برد. هرچه عدد وضعیت به یک نزدیک‌تر باشد ربات به وضعیت ایزوتروپ نزدیک‌تر خواهد بود. همچنین او عدد وضعیت سراسری را که مجموع این عدد در سراسر فضای کاری است معرفی نمود. یوشیکاوا [۵] شاخص توانایی تردستی را بر اساس بیضوی تردستی ارائه نمود. البته شاخص‌های ذکر شده، دارای مشکلاتی از لحاظ یکا و

¹ Condition number

² Manipulability

تعبیر فیزیکی هستند [۶]. برای حل این مشکل روش‌هایی مانند تقسیم بخش‌هایی از ماتریس ژاکوبین که دارای بعد طول هستند برضرب دارای بعد طول ارائه شد. مشخصات عملکردی ربات‌های موازی، حساسیت زیادی نسبت به تغییرات اندازه اعضای آن دارند، بنابراین محققین، ساختار ربات‌های مختلف را بر اساس شاخص مختلف عملکردی بهینه نمودند [۷-۹]. ربات‌های موازی را می‌توان بر اساس درجه آزادی، تعداد بازوها، ترتیب مفاصل به کار رفته در هر بازو و نوع عملگر تقسیم‌بندی نمود. یکی از مهم‌ترین انواع آن‌ها، ربات موازی شش درجه آزادی با محرک دورانی (6-RUS) است که به ترتیب مفاصل لولایی، یونیورسال و کروی در هر بازوی آن مورد استفاده قرار گرفته است. در این نوع ربات، مفصل لولایی دارای عملگر می‌باشد. بر این اساس، مطابق شکل (۱) انواع مختلف ربات‌های 6-RUS با محرک با کاربری‌های متفاوت ارائه شده است [۱۰]. آنچه باعث تفاوت میان انواع ربات‌های 6-RUS می‌شود، نحوه قرارگیری اعضا و زوایای مفاصل عمل‌کننده است. اولین ربات 6-RUS توسط هانت [۱۱] ارائه شد. سینماتیک و دینامیک این نوع ربات توسط گیل [۱۲] بررسی شد. همچنین آگیناگا و همکاران [۱۳]، سختی استاتیکی ربات نوع هانت را توسط تکنیکی‌های معکوس بهبود دادند. همچنین انواع دیگری از ربات‌های موازی شش درجه آزادی با محرک دورانی ارائه شده است که یکی مشهورترین آن‌ها ربات هگزا می‌باشد که توسط پیرو [۱۴] بر اساس ربات سه درجه آزادی دلتا ارائه شد.

به طور کلی و با توجه به پیچیدگی تحلیل، علیرغم کاربرد گسترده، مطالعه کم‌تری بر روی ساختارهای 6-RUS نسبت به سایر انواع شش درجه آزادی مانند 6-PUS و 6-UPS (ربات شش درجه آزادی با عملگر خطی) صورت گرفته است. از میان انواع ساختارهای ربات شش درجه آزادی با محرک دورانی هم تحقیقات کمتری بر روی نوع هانت صورت گرفته است. در ادامه، ساختار ربات نوع هانت بررسی شده و پارامترهای مهم ساختاری و هندسی تعیین می‌شوند. سپس بر این اساس، معادلات مربوط به سینماتیک معکوس و ماتریس ژاکوبین استخراج می‌گردند. در نهایت شاخص‌های عملکردی توانایی تردستی، ظرفیت اعمال نیرو و عدد وضعیت محاسبه شده و پس از تعیین قیود مورد نیاز با استفاده از روش بهینه‌سازی چندهدفه زنبور عسل [۱۵]، نمودار پارتو مربوط به پاسخ‌های نامغلوب استخراج می‌گردد. هر کدام از ساختارهای ارائه شده، به لحاظ یکی از شاخص‌های عملکردی، دارای بهترین وضعیت باشد.



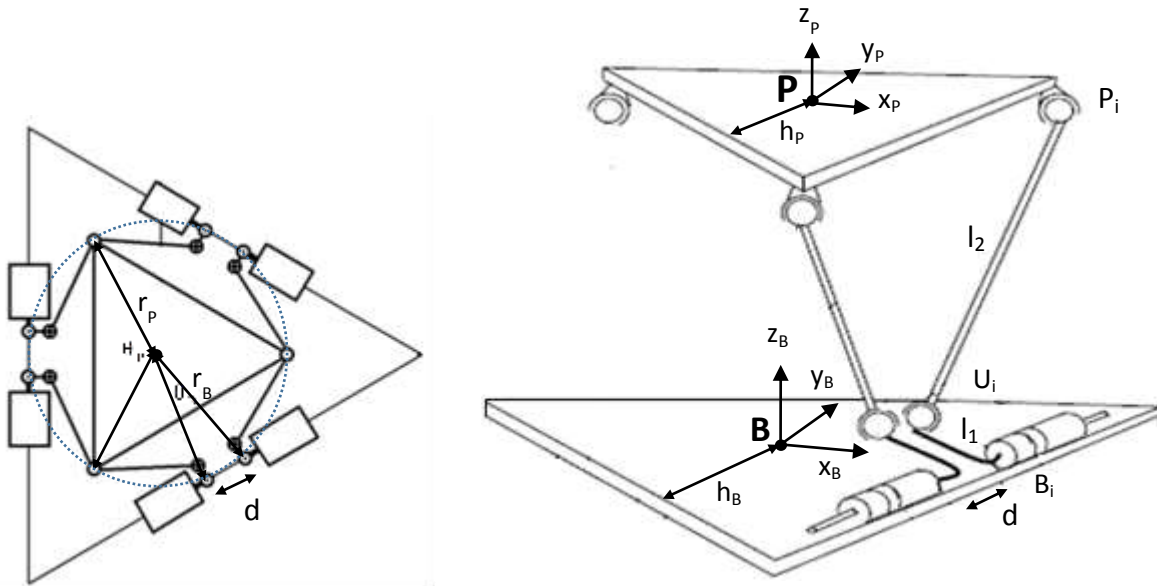
شکل (۱): انواع ربات‌های 6-RUS: (الف): هانت (ب): هگزا (ج): زمانوف [۱۰]

ربات موازی شش درجه آزادی نوع هانت

سه نمونه از پرکاربردترین انواع ربات‌های شش درجه آزادی با محرک‌های دورانی شامل انواع هگزا، هانت و زمانوف در شکل (۱) نشان داده شده است. در کار حاضر ربات شش درجه آزادی نوع هانت، مطابق شکل (۱) مدنظر قرار می‌گیرد. مشخصات هندسی و ساختاری ربات در شکل (۲-الف) ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود این ربات از دو صفحه تشکیل شده



است که با شش زنجیره به هم متصل می‌باشند و در هر زنجیره به ترتیب مفاصل لولایی، یونیورسال و کروی استفاده شده است. مطابق با این شکل، P و B به ترتیب مرکز دستگاه‌های مختصات اصل به صفحه ثابت و صفحه متحرک هستند. مفاصل لولایی، یونیورسال و کروی در زنجیره i ام به ترتیب با B_i ، U_i و P_i نشان داده می‌شود. طول بازوهای دارای عملگر I_1 و طول میله‌های اصل به صفحه متحرک I_2 می‌باشد. همچنین فاصله مرکز صفحه ثابت از خط واصل مفاصل لولایی، h_B و فاصله مرکز صفحه متحرک تا خط واصل مفاصل کروی، h_P می‌باشد.



شکل (۲): پارامترهای هندسی ربات موازی شش درجه آزادی نوع هانت

اگر نقاط قرارگیری مربوط مفاصل لولایی صفحه ثابت را بر روی یک دایره مفروض در نظر گرفته شود، شعاع دایره مذکور و زاویه کمان میان خطوط واصل به دو مفصل لولایی مجاور از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$r_B = \sqrt{h_B^2 + \frac{d^2}{4}}, \quad \theta_B = \tan\left(\frac{d}{2h_B}\right) \quad (1)$$

همچنین با توجه به اینکه محل قرارگیری مفاصل کروی مجاور بر یکدیگر منطبق است بنابراین این زاویه‌ی خطوط واصل به دو مفصل کروی مجاور ثابت است از رابطه (۲) به دست می‌آید:

$$r_P = \frac{h_P}{\cos(\theta_P)}, \quad \theta_P = 120^\circ \quad (2)$$

سینماتیک معکوس

در سینماتیک معکوس با داشتن مختصات مجری نهایی، مختصات متناظر مفاصل دارای عملگر به دست می‌آید. به بیان دیگر، هدف، به دست آوردن زوایای مفاصل عمل‌کننده‌ی لولایی (θ_i) متناظر با مختصات مجری نهایی است. به منظور استخراج سینماتیک معکوس از این نکته استفاده می‌شود که مطابق رابطه (۳) اندازه بردار واصل U_i به P_i ثابت و برابر با I_2 است.

$$\|{}^B P_i {}^B U_i\| = I_2 \quad i=1,2,\dots,6 \quad (3)$$

به ترتیب بردار موقعیت نقاط P_i و U_i نسبت به مرکز دستگاه مختصات ثابت B می‌باشند و از رابطه (۴) به دست می‌آیند:



$${}^B \mathbf{P}_i = {}^B \mathbf{x}_p + {}^B \mathbf{R}_p {}^P \mathbf{P}_i \quad (۴)$$

$${}^B \mathbf{U}_i = {}^B \mathbf{B}_i + {}^{B_i} \mathbf{U}_i$$

${}^B \mathbf{x}_p$ موقعیت مرکز صفحه متحرک نسبت مبدأ مختصات ثابت می‌باشد. همچنین ماتریس دوران صفحه متحرک نسبت به صفحه ثابت به صورت رابطه (۵) قابل بیان است.

$${}^B \mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\varphi & \cos\alpha\sin\varphi & -\sin\alpha \\ \cos\psi\sin\alpha\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\sin\alpha\sin\varphi + \sin\psi\sin\varphi & \sin\psi\cos\alpha \\ \sin\psi\sin\alpha\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\sin\alpha\sin\varphi + \cos\psi\sin\varphi & \sin\psi\cos\alpha \end{bmatrix} \quad (۵)$$

در جایی که α ، φ و ψ به ترتیب مقادیر زوایای دوران صفحه متحرک حول محورهای مختصات مرجع x ، y و z می‌باشند. c و s به ترتیب نشان‌دهنده کسینوس و سینوس زاویه می‌باشند. ${}^P \mathbf{P}_i$ مختصات P_i نسبت به مرکز دستگاه مختصات متحرک P می‌باشد و مطابق با رابطه (۶) می‌باشد.

$${}^P \mathbf{P}_i = [r_p \cos\theta_{Pi}, r_p \sin\theta_{Pi}, 0] \quad (۶)$$

در جایی که θ_{Pi} درایه‌ی نام از ماتریس θ_p است. از آنجا که محل اتصال مربوط به مفاصل کروی قرار گرفته بر صفحه متحرک ثابت است و $\theta_p = 120$ است، بنابراین:

$$\theta_p = [-60 \quad 60 \quad 60 \quad 180 \quad 180 \quad -60] \quad (۷)$$

همچنین ${}^B \mathbf{B}_i$ که مختصات نقطه‌ی B_i نسبت به مبدأ مختصات B می‌باشد. که به صورت رابطه‌ی (۸) تعریف می‌شود.

$${}^B \mathbf{B}_i = [r_B \cos\theta_{Bi}, r_B \sin\theta_{Bi}, 0] \quad (۸)$$

در جایی که θ_{Bi} درایه‌ی نام از ماتریس θ_B به این شرح است:

$$\theta_B = \left[-\frac{\theta_B}{2} \quad \frac{\theta_B}{2} \quad 120 - \frac{\theta_B}{2} \quad 120 + \frac{\theta_B}{2} \quad -120 - \frac{\theta_B}{2} \quad -120 + \frac{\theta_B}{2} \right] \quad (۹)$$

${}^{B_i} \mathbf{U}_i$ بردار موقعیت U_i نسبت به B_i بوده و با در نظر گرفتن زاویه مفصل لولایی از رابطه به دست می‌آید.

$${}^{B_i} \mathbf{U}_i = l_i \begin{bmatrix} \cos\theta_i \cos\theta_{Bi} \\ \cos\theta_i \sin\theta_{Bi} \\ \sin\theta_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,6 \quad (۱۰)$$

با تعیین بردارهای ${}^B \mathbf{P}_i$ و ${}^B \mathbf{U}_i$ و جای‌گذاری آن‌ها در رابطه (۳)، معادله (۱۱) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & ({}^B U_{ix} - (r_B \cos\theta_{Bi} + l_i \cos\theta_i \cos\theta_{Bi}))^2 + \\ & ({}^B U_{iy} - (r_B \sin\theta_{Bi} + l_i \cos\theta_i \sin\theta_{Bi}))^2 + ({}^B U_{iz} - l_i \sin\theta_i)^2 = l_2^2 \end{aligned} \quad (۱۱)$$

با ساده‌سازی معادله (۱۱)، معادله مثلثاتی (۱۲) به دست می‌آید.

$$a_i \cos\theta_i + b_i \sin\theta_i = c_i \quad (۱۲)$$

$$i=1,2,\dots,6$$



در جایی که:

$$\begin{aligned} a_i &= ({}^B P_{ix} \cos \theta_{Bi} + {}^B P_{iy} \sin \theta_{Bi} - r_B) \\ b_i &= {}^B P_{iz} \\ c_i &= \frac{({}^B P_{ix} - r_B \cos \theta_{Bi})^2 + ({}^B P_{iy} - r_B \sin \theta_{Bi})^2 + {}^B P_{iz}^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1} \end{aligned} \quad (13)$$

در نهایت با حل معادله مثلثاتی (۱۲) زوایای مفاصل عمل‌کننده با توجه مشخصات ساختاری ربات و محل قرارگیری مجری نهایی به شرح زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \theta_i &= 2 \times \tan^{-1} \left(\frac{b_i \pm \sqrt{b_i^2 - c_i^2 + a_i^2}}{a_i + c_i} \right) \\ i &= 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (14)$$

ماتریس ژاکوبین

از این ماتریس می‌توان برای بررسی خصوصیات عملکردی سیستم استفاده نمود. ماتریس ژاکوبین در ربات‌های موازی، مطابق رابطه جهت ارتباط میان بردار سرعت مجری نهایی و سرعت مفاصل دارای عملگر به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۶].

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{X}} \quad (15)$$

به منظور استخراج ماتریس ژاکوبین، طرفین معادله (۳) به توان دو رسانده می‌شود.

$$\begin{aligned} ({}^B \mathbf{P}_i - {}^B \mathbf{U}_i)^T ({}^B \mathbf{P}_i - {}^B \mathbf{U}_i) &= l_2^2 \\ i &= 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (16)$$

با جای‌گذاری (۴) در رابطه (۱۶)، رابطه (۱۷) به صورت زیر خواهد شد:

$$([\mathbf{}^B \mathbf{x}_p + {}^B \mathbf{R}_p \mathbf{}^P \mathbf{P}_i] - [{}^B \mathbf{B}_i + {}^{B_i} \mathbf{U}_i])^T ([\mathbf{}^B \mathbf{x}_p + {}^B \mathbf{R}_p \mathbf{}^P \mathbf{P}_i] - [{}^B \mathbf{B}_i + {}^{B_i} \mathbf{U}_i]) = l_2^2 \quad i=1, \dots, 6 \quad (17)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۷)، رابطه (۱۸) زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \lambda_i^T \mathbf{}^B \dot{\mathbf{x}}_p + \lambda_i^T \mathbf{}^B \dot{\mathbf{R}}_p \mathbf{}^P \mathbf{P}_i - \lambda_i^T \mathbf{}^{B_i} \dot{\mathbf{U}}_i &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (18)$$

در جایی که بردار λ_i مطابق رابطه (۱۹) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \lambda_i &= [{}^B \mathbf{x}_p + {}^B \mathbf{R}_p \mathbf{}^P \mathbf{P}_i] - [{}^B \mathbf{B}_i + {}^{B_i} \mathbf{U}_i] \\ i &= 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (19)$$

همچنین $\mathbf{}^{B_i} \dot{\mathbf{U}}_i$ و مشتق ماتریس چرخش $\mathbf{}^B \dot{\mathbf{R}}_p$ از روابط به شرح زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{}^{B_i} \dot{\mathbf{U}}_i = l_i \dot{\theta}_i \begin{bmatrix} -\sin \theta_i \cos \theta_{Bi} \\ -\sin \theta_i \sin \theta_{Bi} \\ \cos \theta_i \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (20)$$



$${}^B \dot{\mathbf{R}}_P = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} & 0 & -\dot{\psi} \\ -\dot{\phi} & \dot{\psi} & 0 \end{bmatrix} {}^B \mathbf{R}_P \quad (21)$$

با جای گذاری روابط (۲۰) و (۲۱) در رابطه (۱۸) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\lambda_i^T {}^B \dot{\mathbf{x}}_P + (({}^B \mathbf{R}_P {}^P \mathbf{P}_i) \times \lambda_i)^T \boldsymbol{\omega} = \lambda_{qi} \dot{\theta}_i \quad (22)$$

$i=1,2,\dots,6$

در جایی که:

$${}^B \dot{\mathbf{x}}_P = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \quad \& \quad \boldsymbol{\omega} = [\dot{\alpha} \ \dot{\phi} \ \dot{\psi}]^T$$

$$\lambda_{qi} = \lambda_i^T \mathbf{I}_1 \begin{bmatrix} -\sin\theta_i \cos(\theta_{Bi} + \theta_{di}) \\ -\sin\theta_i \sin(\theta_{Bi} + \theta_{di}) \\ \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

در نهایت ارتباط میان بردارهای سرعت در فضای کارترین و فضای مفصلی مطابق با رابطه (۲۴) خواهد بود.

$$\mathbf{J}_X \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_q \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (24)$$

در جایی که بردار سرعت خطی و دورانی صفحه متحرک $\dot{\mathbf{X}}$ و بردار سرعت مفاصل لولایی عمل کننده $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ مطابق رابطه (۲۵) می‌باشند.

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} {}^B \dot{\mathbf{x}}_P \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4 \ \dot{\theta}_5 \ \dot{\theta}_6]^T \quad (25)$$

همچنین ماتریس‌های \mathbf{J}_X و \mathbf{J}_q از روابط (۲۶) و (۲۷) تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{J}_X = [\mathbf{L}_1 \ \mathbf{L}_2 \ \mathbf{L}_3 \ \mathbf{L}_4 \ \mathbf{L}_5 \ \mathbf{L}_6]^T \quad (26)$$

$$\mathbf{L}_i = [\lambda_i^T \quad (({}^B \mathbf{R}_P {}^P \mathbf{P}_i) \times \lambda_i)^T]$$

$$\mathbf{J}_q = \text{diag}[\lambda_{q1} \ \lambda_{q2} \ \lambda_{q3} \ \lambda_{q4} \ \lambda_{q5} \ \lambda_{q6}] \quad (27)$$

در نهایت ماتریس ژاکوبین به شرح زیر نوشته می‌شود.

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_X \quad (28)$$

شاخص‌های عملکردی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای ماتریس ژاکوبین، استفاده جهت محاسبه شاخص‌هایی است که برای اندازه‌گیری مشخصات عملکردی ربات به کار می‌روند، که یکی از مهم‌ترین آن‌ها، شاخص مهارت^۳ سینماتیکی است. مهارت سینماتیکی، توانایی مجری نهایی در انجام خیلی دقیق و آسان جابجایی‌های اختیاری بسیار کوچک حول یک نقطه در فضای کاری است. در

³ Dexterity



حقیقت می‌توان با استفاده از ژاکوبین و شاخص‌های سینماتیکی و استاتیکی، میان خطای موجود در مفاصل و خطای مجری نهایی در فضای کاری رابطه‌ی خطی برقرار نمود. از شاخص‌های اندازه‌گیری مهارت، شاخص‌هایی مانند توانایی تردستی^۴ [۵] و عدد وضعیت^۵ [۲] معرفی شده است. شاخص توانایی تردستی یوشیکاوا، برای ربات‌ها با فرض محدود شدن خطای فضای مفصلی مطابق رابطه (۲۹) تعریف می‌شود.

$$\|\Delta q\| \leq 1 \quad (29)$$

با استفاده از ماتریس ژاکوبین و با فرض استفاده از نرم اقلیدسی رابطه (۳۰) استخراج می‌شود.

$$\Delta X^T J^T J \Delta X \leq 1 \quad (30)$$

شاخص بیانگر توانایی تردستی، مطابق رابطه (۳۱) بیان می‌شود.

$$MI = \frac{1}{\sqrt{|J^T J|}} \quad (31)$$

این شاخص توانایی ربات در اعمال سرعت و حرکت از مفاصل به مجری نهایی را در نقطه‌ای مشخص از مجری نهایی بیان می‌کند. می‌توان این شاخص را مطابق رابطه (۳۲) در فضای کاری مشخصی به صورت میانگین به دست آورد و آن را شاخص توانایی تردستی سراسری نامید.

$$GMI = \frac{\int_w \frac{1}{\sqrt{|J^T J|}} dW}{\int_w dW} \quad (32)$$

از ماتریس ژاکوبین می‌توان به عنوان ارتباط‌دهنده میان گشتاور وارد بر مفاصل دارای عملگر و نیروی وارده بر مجری نهایی نیز استفاده نمود. با فرض اینکه δq جابجایی مجازی مفاصل و δX جابجایی مجازی مجری نهایی باشد، قانون کار مجازی مطابق رابطه (۳۳) می‌باشد.

$$\tau^T \delta q = F^T \delta X \quad (33)$$

همچنین رابطه میان جابجایی‌های مجازی با استفاده از ماتریس ژاکوبین به شرح زیر است:

$$\delta q = J \delta X \quad (34)$$

از روابط (۳۳) و (۳۴)، ارتباط میان بردارگشتاور وارد بر مفاصل و بردار نیروی وارد بر مجری نهایی، مطابق رابطه (۳۵) به دست می‌آید.

$$\tau = J^T F \quad (35)$$

بر اساس روابط (۳۵) و (۳۱) شاخص ظرفیت اعمال نیرو مطابق رابطه (۳۶) ارائه می‌شود.

$$FMI = \frac{1}{\sqrt{|J^{-1} J^T|}} \quad (36)$$

⁴ Manipulability Index

⁵ Condition Number



شاخص ظرفیت اعمال نیروی سراسری در فضای کاری مشخص، از رابطه (۳۷) استخراج می‌شود.

$$GFMI = \frac{\int_w \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}^T|}} dW}{\int_w dW} \quad (37)$$

یکی دیگر از مهم‌ترین شاخص‌های مورد استفاده جهت بیان مهارت، شاخص عدد وضعیت است که به بررسی اثر خطا در فضای مفصلی (q) بر خطا در فضای کاری (X) می‌پردازد. در رابطه‌ی به دست آمده، عبارت CI، عدد وضعیت مربوط به ماتریس ژاکوبین نامیده می‌شود. در جایی که $\|\mathbf{J}\|$ بیانگر نرم ماتریس است و اگر نرم فروبینیوس مد نظر قرار گیرد به صورت رابطه‌ی زیر خواهد بود.

$$\|\mathbf{J}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (38)$$

بر حسب مقادیر تکین عدد وضعیت را می‌توان به شرح زیر نوشت:

$$CI = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{J})}{\sigma_{\min}(\mathbf{J})} \quad (39)$$

در جایی که $\sigma_{\max}(\mathbf{J})$ و $\sigma_{\min}(\mathbf{J})$ به ترتیب بیشینه و کمینه مقادیر تکین ماتریس ژاکوبین هستند. معکوس CI به عنوان شاخص اندازه‌گیری عدد وضعیت سینماتیکی منظور می‌شود. در جایی که مقدار این شاخص از صفر تا یک تغییر می‌کند. بهترین وضعیت ربات از لحاظ مهارت سینماتیکی مربوط به مقدار شاخص برابر با یک است. در چنین وضعیتی ربات از لحاظ مهارت سینماتیکی، ایزوتروپ خواهد بود. یکی از معیارهای طراحی آن است که ربات موازی در یک موقعیت یا در تمام فضای کاری ایزوتروپ باشد. اگر این شاخص به صفر نزدیک شود بدان معنا است که ربات به وضعیت تکین نزدیک شده است. بنابراین، از این شاخص می‌توان به عنوان معیاری برای اجتناب از قرارگیری ربات در موقعیت‌های تکین استفاده نمود. شاخص‌های سینماتیکی-استاتیکی به صورت ارائه شده وابسته به موقعیت ربات می‌باشند، به همین دلیل می‌توان به جای مشخص نمودن شاخص در وضعیتی مشخص، از شاخص عدد وضعیت سراسری به صورت زیر استفاده نمود.

$$GCI = \frac{\int_w \frac{1}{CI} dW}{\int_w dW} \quad (40)$$

بهینه سازی

پس از تعیین معیارهای عملکردی ربات، می‌توان پارامترهای هندسی را به نحوی بهینه نمود که ربات دارای بهترین مشخصات عملکردی باشد. بدین منظور، از روش بهینه‌سازی چند هدفه زنبور عسل [۱۵] استفاده می‌شود. مساله بهینه‌سازی چندهدفه برخاسته از روش‌های تصمیم‌گیری در دنیای واقعی است که شخص تصمیم‌گیرنده با مجموعه‌ای از اهداف و معیارهای متضاد و متعارض روبروست. در این گونه از مسائل، برخلاف مسایل بهینه‌سازی تک‌هدفه و به خاطر وجود چند هدف متعارض به جای تنها یک جواب، مجموعه‌ای از جواب‌ها حاصل می‌شود. نتیجه به دست آمده از بهینه‌سازی چندهدفه، نمودار مربوط پاسخ-های نامغلوب یا جبهه پارتو^۶ است.

⁶ Pareto frontier



در اینجا، هدف پیدا نمودن برداری از پارامترهای ساختاری بهینه $\gamma_{\text{Hunt}}^* = [r_B \ \theta_B \ l_1 \ l_2 \ r_P]$ به نحوی است که به نحوی است که شاخص‌های توانایی تردستی (GMI)، ظرفیت اعمال نیروی سراسری (GFMI) و شاخص عدد وضعیت سراسری (GCI) در محدوده‌ی یک فضای کاری از پیش تعیین شده، ماکزیمم شوند.

$$\gamma_{\text{Hunt}}^* = \arg \max \{GMI, GFMI, GCI\} \quad (41)$$

مفاصل ربات، دارای محدودیت‌هایی در حرکت هستند که بایستی در حل مسئله بهینه‌سازی منظور می‌شوند. اولین قید منظور شده، محدوده زوایای مربوط به مفاصل کروی است که به صورت زیر می‌باشد.

$$a_{i1} = \cos^{-1}(\mathbf{n}_{l_i} \cdot \mathbf{n}_p) \quad (42)$$

$$90 < |\max(a_{i1})| < 180$$

در جایی که بردار \mathbf{n}_p یک عمود بر صفحه‌ی متحرک و \mathbf{n}_{l_i} بردار یک در جهت میله‌ی واصل به صفحه متحرک می‌باشد. همچنین قیود حرکتی مشابه بر روی حرکت مفاصل یونیورسال وجود دارد.

$$a_{i2} = \cos^{-1}(\mathbf{n}_{a_i} \cdot \mathbf{n}_{l_i}) \quad (43)$$

$$30 < |\max(a_{i2})| < 180$$

\mathbf{n}_{a_i} بردار یک در جهت بازوی واصل به صفحه ثابت می‌باشد. همچنین که فاصله میان دو عضو مجاور بایستی به نحوی باشد که تداخلی در حرکت یکدیگر ایجاد نکنند بدین منظور قید زیر نیز به قیود بهینه‌سازی اضافه می‌شود.

$$d \leq D \quad (44)$$

قطر میله و D فاصله‌ی میان دو میله است.

نتایج

محدوده فضای کاری مد نظر محدوده‌ای از $z=0.2\text{m}$ تا $z=0.4\text{m}$ منظور می‌گردد. از آنجا حرکت به صورت انتقالی صورت می‌گیرد، بخش‌های حرکت انتقالی برای محاسبه شاخص‌های توانایی تردستی و ظرفیت اعمال نیرو در نظر گرفته می‌شود. محدوده تغییرات پارامترهای هندسی به شرح زیر می‌باشد:

$$0.15\text{m} \leq r_B \leq 0.3\text{m}$$

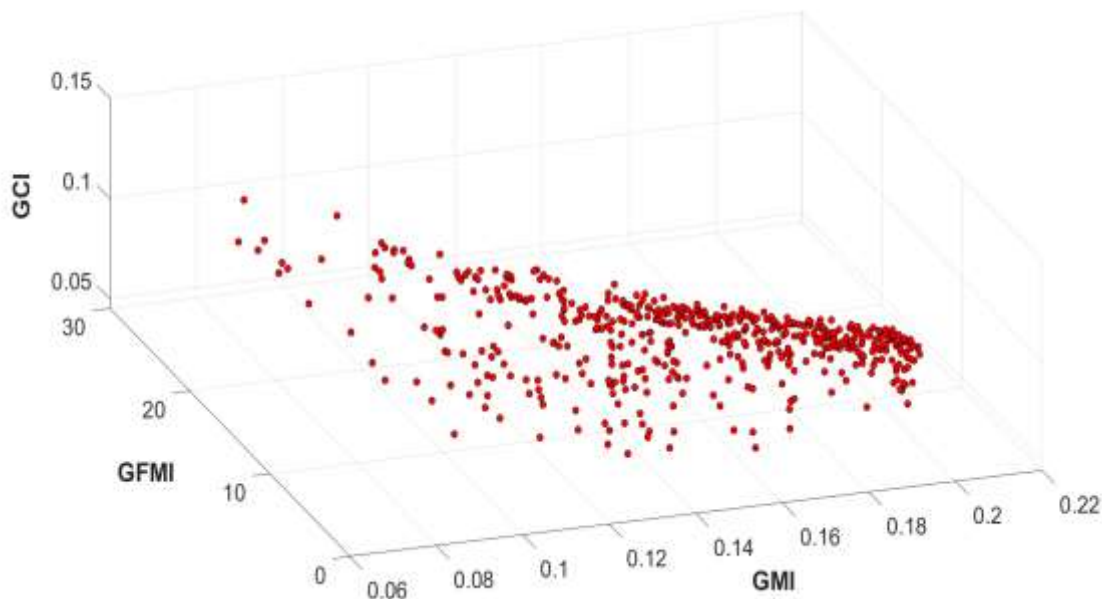
$$5^\circ \leq \theta_B \leq 120^\circ$$

$$0.2\text{m} \leq l_1 \leq 0.25\text{m} \quad (45)$$

$$0.3\text{m} \leq l_2 \leq 0.5\text{m}$$

$$0.1\text{m} \leq r_P \leq 0.2\text{m}$$

نمودار پارتو مربوط به پاسخ‌های نامغلوب به دست آمده از حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه در شکل (۳) نشان داده شده است. پاسخ‌های نامغلوب پاسخی هستند که حداقل از نظر یکی از معیارهای بهینه‌سازی از سایر پاسخ‌های بهتر باشند.



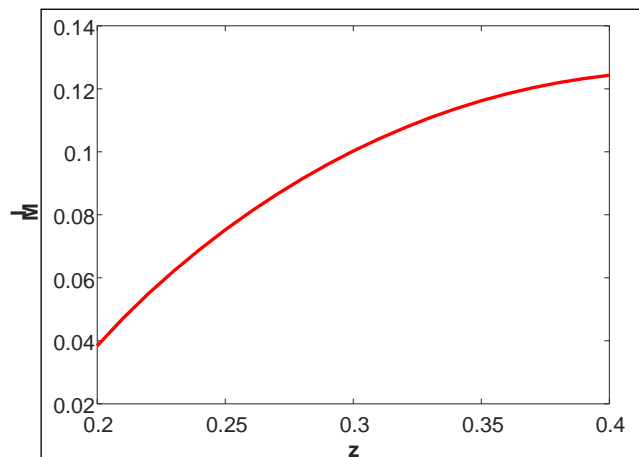
شکل (۳): نمودار پارتو استخراج شده از بهینه‌سازی چندهدفه ساختار ربات موازی هانت بر اساس شاخص‌های عملکردی.

در جدول (۱) مشخصات هندسی مربوط به چهار ساختار مختلف ربات ارائه شده است. در سه ردیف اول ساختارهایی ارائه شده است که هرکدام از لحاظ شاخص‌های عملکردی داری بهترین وضعیت هستند. ساختار اولی دارای بهترین عملکرد از لحاظ شاخص GMI است و به همین دلیل در محدوده فضای کاری مورد دارای بهترین توانایی در انتقال سرعت و حرکت از مفاصل عمل‌کننده به مجری نهایی است. ساختار دوم دارای بالاترین مقدار شاخص GFMI می‌باشد. این ربات دارای بهترین ظرفیت انتقال نیرو و گشتاور است. ساختار بیان شده در ردیف سوم از لحاظ شاخص عدد وضعیت دارای بهترین وضعیت است، لذا دارای دقت حرکت بالاتری در همه جهتها است. در نهایت از میان ساختارهای استخراج شده از جبهه پارتو ساختار چهارم به عنوان ساختاری که از لحاظ همه شاخص‌های عملکردی دارای وضعیت نسبتاً مطلوبی است، انتخاب می‌گردد.

جدول (۱): پارامترهای مربوط به نقاط منتخب از نمودار پارتو.

نوع ساختار								
r_p (m)	l_2 (m)	l_1 (m)	θ_B °	r_B (m)	GCI	GFMI	GMI	
۰/۱۹۰۸	۰/۳۶۵۲	۰/۲۴۹۱	۵۷/۸۵۵۹	۰/۲۴۵۷	۰/۰۸۷۴	۵/۰۲۵۸	۰/۲۰۱۰	GMI ماکزیمم
۰/۱۳۲۷	۰/۴۷۶۶	۰/۲۲۴۴	۳۶/۹۰۰۴	۰/۲۲۹۷	۰/۰۸۶۱	۲۵/۴۱۹۳	۰/۰۸۵۸	GFMI ماکزیمم
۰/۲۰۰۰	۰/۴۵۱۹	۰/۲۳۰۹	۷/۸۱۰۷	۰/۱۷۵۷	۰/۱۴۱۳	۱۲/۵۸۵۶	۰/۰۹۰۶	GCI ماکزیمم
۰/۱۹۸۲	۰/۴۳۸۸	۰/۲۳۶۵	۴۳/۱۵۰۰	۰/۱۸۷۵	۰/۱۳۷۴	۱۲/۲۵۰۹	۰/۰۹۲۸	ساختار انتخاب شده

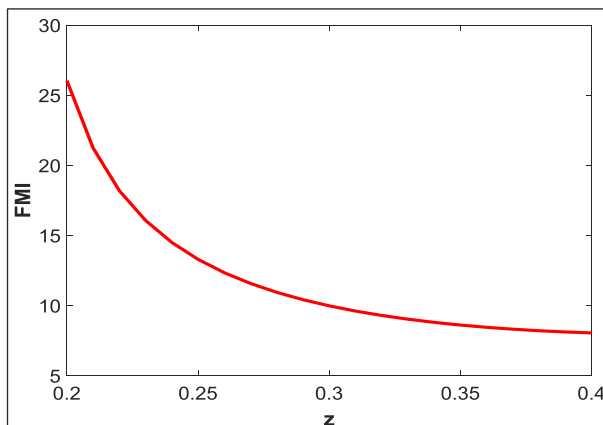
به منظور بررسی تغییرات شاخص‌های عملکردی ربات در فضای کاری تعیین شده، توزیع شاخص‌ها با تغییر مکان صفحه متحرک از $Z = 0/2$ متر تا $Z = 0/4$ متر در شکل‌های (۴) تا (۶) نشان داده شده است. با بررسی شکل (۴) ملاحظه می‌شود که با بالا رفتن صفحه متحرک اندازه شاخص محلی توانایی تردستی جهت انتقال حرکت افزایش می‌یابد. به نحوی که کمترین مقدار شاخص توانایی تردستی در $Z = 0/2$ متر می‌باشد که برابر با $0/۰۳۸۴$ می‌باشد و بیشترین مقدار در $Z = 0/4$ متر برابر با $0/۱۲۴۳$ می‌باشد که افزایش $222/6$ درصدی را نشان می‌دهد.



شکل(۴): تاثیر تغییر محل صفحه متحرک بر شاخص توانایی تردستی .

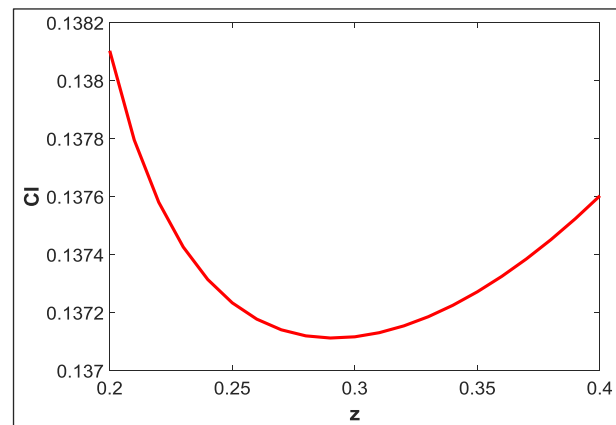
بررسی شکل (۵) ملاحظه می‌شود که با بالا رفتن صفحه متحرک اندازه‌ی شاخص محلی ظرفیت اعمال نیرو افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار شاخص ظرفیت اعمال نیرو در $Z = 0.2$ متر و برابر با $26/0401$ می‌باشد و کمترین مقدار در $Z = 0.4$ متر برابر با $8/0451$ می‌باشد که افزایش $69/2$ درصدی را نشان می‌دهد.

شکل (۶) تغییرات شاخص محلی عدد وضعیت را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که بیشترین مقدار این شاخص در پایین‌ترین نقطه مجری نهایی و در $Z = 0.2$ متر است که برابر با $0/1381$ می‌باشد. همچنین ملاحظه می‌شود که کمترین مقدار عدد وضعیت در $Z = 0.28$ متر اتفاق می‌افتد که برابر است با $0/1371$ است.



شکل(۵): تاثیر تغییر محل صفحه متحرک بر شاخص ظرفیت اعمال

نیرو .



شکل(۶): تاثیر تغییر محل صفحه متحرک بر شاخص عدد وضعیت.

نتیجه‌گیری

در این کار، ساختار ربات موازی شش درجه آزادی با محرک‌های دورانی نوع هانت بر اساس شاخص‌های عملکردی سینماتیکی-استاتیکی، بهینه شد. بدین منظور پارامترهای هندسی ساختار ربات تعیین شده و بر این اساس سینماتیک معکوس و ماتریس ژاکوبین ربات استخراج گردید. به منظور ارزیابی عملکرد ربات، شاخص‌های عملکردی توانایی تردستی، ظرفیت اعمال نیرو و عدد وضعیت مورد استفاده قرار گرفتند. ملاحظه شد که روش بهینه‌سازی چندهدفه مورد استفاده به خوبی توانست نمودار پارتو مربوط به پاسخ‌های نامغلوب را استخراج نماید. با استفاده از نمودار پارتو می‌توان پاسخ‌های متفاوتی را به دست آورد و آنها را از نظر هر کدام از شاخص‌های عملکردی با یکدیگر مقایسه و متناسب با نیاز عملکردی از یکی از دسته



مشخصات طراحی، استفاده نمود. به عنوان مثال اگر ظرفیت انتقال نیرو گشتاور میان مفاصل عمل‌کننده و مجری نهایی مدنظر باشد می‌توان از ساختاری استفاده نمود که بیشترین اندازه شاخص ظرفیت اعمال نیرو را دارد. قیدهای اعمال شده در حل مسئله بهینه‌سازی، این اطمینان را ایجاد می‌کند که ربات با پارمترهای انتخاب شده دارای مشکلی برای حرکت در فضای کاری نباشد. همچنین توزیع شاخص‌ها در فضای کاری نشان داد که با افزایش ارتفاع صفحه متحرک، مقدار شاخص توانایی تردستی افزایش و در مقابل شاخص ظرفیت اعمال نیرو کاهش می‌یابد. همچنین شاخص عدد وضعیت در فضای کاری تعریف شده ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

مراجع

- [1] Li, J., Zuo, S., Zhang, L., Dong, M., Zhang, Z., Tao, C., and Ji, R., (2020), Mechanical design and performance analysis of a novel parallel robot for ankle rehabilitation, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 12(5), pp 051007.
- [2] Salisbury, J. K. and Graig, J. J., (1982), Articulated hands:force control and kinematic issues, *he International Journal of Robotics Research*, 1, pp 4-17.
- [3] Angeles, J. and Ma, O., (1988), Dynamic simulation of n-axis serial robotic manipulators using a natural orthogonal complement, *The International Journal of Robotics Research*, 7(5), pp 32-47.
- [4] Gosselin, C., "kinematic analysis, optimization and programming of parallel robotic manipulators," Phd, mechanical Engineering, McGill University, Montreal, 1988.
- [5] Yoshikawa, T., (1985), Manipulability of Robotic Mechanisms, *The International Journal of Robotics Research*, 4, pp 3-9.
- [6] Khan, W. A. and Angeles, J., (2006), The Kinetostatic Optimization of Robotic Manipulators: The Inverse and the Direct Problems, *Journal of Mechanical Design*, 128, pp 168-178.
- [7] Lara-Molina, F. A. and Dumur, D., (2021), Robust multi-objective optimization of parallel manipulators, *Meccanica*, 56(11), pp 2843-2860.
- [8] Nabavi, S. N., Shariatee, M., Enferadi, J., and Akbarzadeh, A., (2020), Parametric design and multi-objective optimization of a general 6-PUS parallel manipulator, *Mechanism and Machine Theory*, 152, pp 103913.
- [9] Zarkandi, S., (2021), Kinematic analysis and workspace optimization of a novel 4R P SP+ PS parallel manipulator, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 49,(1), pp 131-153.
- [10] Mirshekari, E., Ghanbarzadeh, A., and Shirazi, K. H., (2016), Structure comparison and optimal design of 6-RUS parallel manipulator based on kinematic and dynamic performances, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13, pp 2414-2438.
- [11] Hunt, K., (1983), Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms, *Journal of mechanisms, transmissions and automation in design*, 105(4), pp 705-712.
- [12] Gil, J., Zabalza, I., Ros, J., Pintor, J., and Jiménez, J., "Kinematics and Dynamics of a 6-RUS Hunt-Type Parallel Manipulator by Using Natural Coordinates," in *On Advances in Robot Kinematics*: Springer, 2004, pp 329-335.
- [13] Aginaga, J., Zabalza, I., Altuzarra, O., and Jera, J., (2012), Improving static stiffness of the 6-RUS parallel manipulator using inverse singularities *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 28, pp. 451-479.
- [14] Pierrot, F., (1990), A new design of a 6-DOF parallel robot, *J. of Robotics and Mechatronics*, 2(4), pp 308-315.
- [15] Pham, D. T. and Ghanbarzadeh, A., "Multi-Objective Optimisation using the Bees Algorithm," presented at the 3rd International Virtual Conference on Intelligent Production Machines and Systems (IPROMS 2007), Whittles, Dunbeath, Scotland, 2007.
- [16] Gosselin, C. and Angeles, J., (1990), Singularity analysis of closed-loop kinematic chains, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 6, pp 281-291.