فصلنامه مدیریت صنعتی دانشکده علوم انسانی، دانشگاه آزاد اسلامی
واحد سنندج –سال چهاردهم/ شماره ۴۸ / تابستان ۱۳۹۸

ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری بر اساس دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه

حسین عزیزی (نویسنده مسؤول)
گروه ریاضی کاربردی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران
Email:azizhossein@gmail.com
مازیار صلاحی
استاد، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، ایران

تاریخ دریافت:۹۷/۱۰/۰۴ * تاریخ پذیرش ۹۸/۰۲/۴

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی برای سنجش عملکرد گروهی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که از ورودی‌های متعدد برای تولید خروجی‌های متعدد استفاده می‌کنند. این روش عملکرد DMUها را با مینیمم‌سازی نسبت ورودی وزنی به خروجی وزنی هر DMU، به ترتیب، مشروط به این قید که هیچ یک از کارایی‌های DMUهای دیگر کوچک‌تر از یک نباشد، اندازه‌گیری می‌کند (در حالت با ماهیت خروجی). کارایی‌هایی که به این ترتیب اندازه‌گیری می‌شوند، کارایی خوشبینانه یا بهترین کارایی نسبی نامیده می‌شوند. روش اندازه‌گیری کارایی خوشبینانه‌ی DMUها را خودارزیابی می‌نامند. در صورتی که نمره‌ی کارایی خودارزیابی یک DMU یک باشد، به آن کارای خوشبینانه می‌گویند؛ در غیر این صورت، به آن غیرکارای خوشبینانه می‌گویند. رویکرد مشابهی وجود دارد که از مفهوم مرز ناکارایی برای تعیین بدترین نمره‌ی کارایی نسبی که می‌توان به هر DMU اختصاص داد، استفاده می‌کند. DMUهای واقع روی مرز ناکارایی به‌عنوان ناکارای بدبینانه تعیین می‌شوند، و آنهایی که روی مرز ناکارا نیستند، به‌عنوان غیرناکارای بدبینانه اعلام می‌شوند. در این مقاله، این بحث مطرح می‌شود که هر دو کارایی نسبی را باید با هم در نظر گرفت، و هر رویکردی که فقط یکی از آنها را در نظر گرفته باشد، دچار سوگیری خواهد بود. برای اندازه‌گیری عملکرد کلی DMUها، پیشنهاد می‌شود که هر دو کارایی را در قالب یک بازه ادغام، و مدل‌های DEAی پیشنهادی برای اندازه‌گیری کارایی را مدل‌های کراندار می‌نامیم. به این ترتیب، بازه‌ی کارایی تمام مقادیر ممکن کارایی را که منعکس کننده‌ی دیدگاه‌های مختلف هستند، در اختیار تصمیم گیرنده قرار می‌دهد. دو مثال عددی ارائه می‌شوند که مزایای مدل‌های DEAی پیشنهادی را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها؛ کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه؛ بازه‌ی کارایی؛ مدل‌های کراندار.

۱- مقدمه

هنگام اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری[1] (DMUها)، مدل تحلیل پوششی داده‌های[2] (DEA) Charnes و همکاران، مجموعه‌ای از مطلوب‌ترین وزن‌ها را برای اینکه هر DMU بهترین نمره‌ی کارایی را به دست آورد، پیدا می‌کند و از این نمرات به‌عنوان مبنایی برای مقایسه‌ی عملکرد کارایی DMUها استفاده می‌کنند (Charnes, Cooper, & Rhodes, 1978). بنابراین، مدل DEA آنها را می‌توان روش تحلیل *بهترین کارایی نسبی* یا تحلیل *کارایی خوشبینانه* دانست. یک DMU، کارای DEA یا کارای خوشبینانه گفته می‌شود، هرگاه بهترین کارایی نسبی آن برابر با یک باشد، در غیر این صورت، غیرکارای DEA یا غیرکارای خوشبینانه است. معمولاً تصور بر این است که DMUهای کارای خوشبینانه عملکرد بهتری نسبت به DMUهای غیرکارای خوشبینانه دارند.

از طرف دیگر، عملکرد DMUها را از دیدگاه بدبینانه نیز می‌توان اندازه‌گیری کرد. کارایی اندازه‌گیری شده از دیدگاه بدبینانه را *بدترین کارایی نسبی* یا *کارایی بدبینانه* می‌نامند، و اندازه‌ی آن در ماهیت خروجی، محدود به مقادیر کوچکتر یا مساوی یک است (Entani, Maeda, & Tanaka, 2002). هرگاه مقدار بدترین کارایی نسبی یک DMU برابر یک باشد، گفته می‌شود که آن DMU ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت، غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه است. معمولاً تصور بر این است که DMUهای ناکارای بدبینانه عملکرد بدتری نسبت به DMUهای غیرناکارای بدبینانه دارند.

برای اینکه یک سنجش کلی از عملکرد هر DMU داشته باشیم باید هر دو کارایی خوشبینانه و بدبینانه را همزمان در نظر بگیریم. Entani و همکاران عملکرد DMUها را از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه مورد بررسی قرار دادند (Entani et al., 2002). در مدل‌های آنها، با استفاده از کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه، یک بازه تشکیل می‌شود. ایده‌ی آنها این بود که کارایی یک DMU، بازه‌ی بین مقادیر بدبینانه و خوشبینانه است. ولی مدل آنها در حالت ماهیت خروجی برای محاسبه‌ی کارایی خوشبینانه‌ی هر DMU، دارای یک عیب اساسی است و آن این است که برخی اطلاعات ورودی و خروجی را در نظر نمی‌گیرد، زیرا عملاً فقط داده‌های یک ورودی و یک خروجی از DMUی مورد ارزیابی استفاده می‌شوند و بقیه‌ی داده‌های ورودی و خروجی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. به علاوه، مدل آنها نمی‌تواند DMUهایی را که کارای خوشبینانه هستند، به‌صورت مُکفی شناسایی کند. عزیزی نارسایی‌های مدل‌های DEAی بازه‌ای Entani و همکاران را در ماهیت ورودی بهبود داده است (Entani et al., 2002Azizi, 2011;). Wang و Yang یک زوج مدل کراندار را برای اندازه‌گیری عملکرد کلی هر DMU پیشنهاد کردند (Wang & Yang, 2007). مدل‌های کراندار، بیشترین استفاده را از همه‌ی اطلاعات ورودی و خروجی به عمل می‌آورند و کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی هر DMU را اندازه‌گیری می‌کنند. Foroughi و Aouni برای تعیین کران پایین بازه‌ی کارایی هر DMU، یک مدل برنامه‌ی خطی صحیح مختلط را پیشنهاد کردند (Foroughi & Aouni, 2012). مدل پیشنهادی آنها قادر به شناسایی تمام DMUهای ناکارای بدبینانه نیست. Entani و Tanaka بازه‌ی کارایی یک DMU را با تعدیل ورودی‌ها و خروجی‌های داده شده‌ی آن بهبود دادند (Entani & Tanaka, 2006). همچنین، امیرتیموری و همکاران بازه‌ی کارایی هزینه‌ی یک DMU را با تعدیل ورودی‌ها و خروجی‌های مشاهده شده‌ی آن بهبود دادند (Amirteimoori, Kordrostami, & Rezaitabar, 2006).

Wang و Luo مسئله‌ی ارزیابی کارایی را به‌صورت متفاوتی بررسی کردند (Wang & Luo, 2006). آنها دو DMU مجازی یعنی DMU ایده‌آل (IDMU) و DMU آنتی‌ایده‌آل (ADMU) را وارد مدل‌های DEA کردند. دو DMU مجازی، IDMU و ADMU، برای ساخت دو مدل DEA به ترتیب برای محاسبه‌ی کارایی خوشبینانه و کارایی بدبینانه استفاده می‌شدند. این دو کارایی متمایز با استفاده از رویکرد مشهور روش ترجیح ترتیب بر اساس شباهت به جواب ایده‌آل (TOPSIS) در تصمیم‌گیری چندشاخصی تلفیق می‌شدند تا یک شاخص مرکب به نام نزدیکی نسبی به IDMU به دست آید. شاخص نزدیکی نسبی به‌عنوان مبنایی برای رتبه‌بندی DMUها استفاده می‌شد، و بر اساس آن یک رتبه‌بندی کلی برای DMUها

---

[1]Decision-making units (DMUs)
[2]Data envelopment analysis (DEA)

ایجاد می‌شد. ولی در اکثر موارد، مدل‌های آنها برای تمام DMUها از وزن‌های ثابتی استفاده می‌کنند. این رویکرد توسط محققین متعددی از جمله Wu (۲۰۰۶)، Chen (۲۰۱۲)، Xu و همکاران، Hatami-Marbini و همکاران و Mirhedayatian و همکاران بسط داده شده است (Hatami-Marbini, Saati, & Tavana, 2010; Chen, 2012 ; Mirhedayatian, Vahdat, Jafarian Jelodar, & Farzipoor Saen, 2013; Wu, 2006; Xu, Li, Liu, Fu, & Zheng, 2011). Wang و همکاران از کارایی متوسط هندسی برای ارزیابی عملکرد کلی هر DMU استفاده کردند (Wang, Chin, & Yang, 2007). کارایی متوسط هندسی، متوسط هندسی دو کارایی خوشبینانه و کارایی بدبینانه‌ی است، بنابراین، نسبت به هر کدام از این دو کارایی جامع‌تر است. Wang و Lan (۲۰۱۱)، Chin و همکاران، و Wang و Chin این رویکرد را بسط داده‌اند (Wang & Chin, 2011; Wang & Lan, Chin, Wang, Poon, & Yang, 2009 ; 2011). Wang و Chin یک اندازه‌ی جدیدی را برای ارزیابی عملکرد کلی DMUها پیشنهاد کردند (Wang & Chin, 2009). رویکرد DEAی پیشنهادی آنها توسط Ahmady و همکاران برای کار با داده‌های فازی استفاده شد (Ahmady, Azadi, Sadeghi, & Farzipoor Saen, 2013). امیرتیموری با استفاده از دو شاخص ایده‌آل و آنتی‌ایده‌آل که بر اساس مرزهای کارایی و ناکارایی تشکیل می‌شود، یک اندازه‌ی کارایی معرفی کرد (Amirteimoori, 2007). فلسفه‌ی این دو شاخص ماکزیمم کردن فاصله‌ی L_1 وزنی یک DMU خاص نسبت به مرزهای کارایی و ناکارایی است. Wang و Lan بر اساس اصطلاحات بازده به مقیاس، بهره‌ورترین اندازه‌ی مقیاس یک DMU را از دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه مورد بررسی قرار دادند (Wang & Lan, 2013). جاهد و همکاران از دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه، کارایی‌های DMUهای تحت ارزیابی را به دست آوردند (Jahed, Amirteimoori, & Azizi, 2015). آنها نشان دادند که این دو نتیجه‌ی ارزیابی با یکدیگر تعارض دارند و بدون تردیدیک‌سویه، غیر واقع‌گرایانه و غیر متقاعد کننده هستند. برای غلبه بر این مشکل، آنها یک اندازه‌ی عملکرد کلی جدیدی را پیشنهاد کردند که برای ادغام اندازه‌های به دست آمده از دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه استفاده می‌شود، و آن را برای شناسایی DMUی دارای بهترین عملکرد تحت شرایط عدم اطمینان به کار بردند.

در این مقاله، نشان می‌دهیم مدل Entani و همکاران برای محاسبه‌ی کارایی خوشبینانه‌ی DMUها، دارای مشکلات اساسی می‌باشد. به همین منظور، مدل‌های جدیدی را ارائه می‌کنیم، به طوری که بتوان یک تحلیل با استفاده از مفهوم کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه انجام داد. مدل‌های DEAی پیشنهادی برای اندازه‌گیری بازه‌ی کارایی DMUها، دارای کران‌های بالا و پایین می‌باشند، به همین سبب آنها را مدل‌های کراندار می‌نامیم. در مقایسه با مدل‌های Entani و همکاران، مدل‌های کراندار پیشنهادی در این مقاله چندین مزایایی دارد، از جمله اینکه کارایی خوشبینانه‌ی هر DMU نسبت به همه‌ی DMUهای دیگر اندازه‌گیری می‌شود، و با استفاده از تمام اطلاعات ورودی و خروجی محاسبه می‌شود.

۲- مواد و روش‌ها

فرض کنید n تعداد DMU برای ارزیابی وجود دارند، که هر DMU نیز با m ورودی و s خروجی تشکیل شده است. (x_{ij} ($i=1,\ldots,m$) و y_{rj} ($r=1,\ldots,s$) را مقدار ورودی و خروجی DMU_j ($j=1,\ldots,n$) تعریف می‌کنیم که همه‌ی آنها معلوم و نامنفی می‌باشند. به منظور تعیین کارایی DMU_j نسبت به DMUهای دیگر، Charnes و همکاران مدل CCR شناخته شده‌ای ارائه دادند که بهترین کارایی نسبی DMUها را در محدوده‌ی بزرگتر یا مساوی با یک به‌صورت زیر اندازه‌گیری می‌کند (Charnes et al., 1978):

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}} \geq 1, \quad j=1,\ldots,n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1,\ldots,s; \quad i=1,\ldots,m, \end{aligned} \tag{۱}$$

در مدل (۱)، زیرنویس « o » نشـانگر DMUی تحـت ارزیـابی اسـت و v_i ($i=1,\dots,m$) و u_r ($r=1,\dots,s$) متغیرهـای تصمیم‌گیری و ε بسیار کوچک غیرارشمیدسی است. به کمک تبدیل Charnes و Cooper می‌توان برنامه‌ریـزی کسـری (۱) را به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) زیر نوشت (Charnes & Cooper, 1962):

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r=1,\dots,s; \quad i=1,\dots,m. \end{aligned} \tag{۲}$$

اگر مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت u_r^* ($r=1,\dots,s$) و v_i^* ($i=1,\dots,m$) وجود داشته باشند که باعث شـود $\theta_o^*=1$، آنگـاه DMU_o کارای خوشبینانه نامیده می‌شود؛ در غیر این صورت، به آن غیرکارای خوشبینانه می‌گویند.

کارایی یک اندازه‌ی نسبی است و آن را در محدوده‌های مختلفی می‌توان اندازه‌گیری کرد. چارچوب *با ماهیت خروجی*، که مبتنـی بر مجموعه‌ی نیازمندی خروجی و مرز ناکارایی آن است، در صدد آن است که ضمن حفظ ورودی، حداقل در حـد فعلـی، مقـادیر خروجی را حتی‌الامکان کاهش دهد. که بر این واقعیت تأکید می‌کند که سطح ورودی بدون تغییـر مـی‌مانـد، و مقـادیر خروجـی به‌صورت متناسب کاهش داده می‌شوند، تا مرز ناکارایی حاصل شود. برآورد کننده‌ی DEA برای مجموعه‌ی امکان تولید ناکـارا، که به‌صورت برآورد کننده‌های LP عملیاتی شد، به آن اصطلاحاً کارایی بدبینانه و یا بدترین کـارایی نسـبی مـی‌گوینـد. کـارایی بدبینانه‌ی DMU_o را می‌توان با مدل بدبینانه‌ی زیـر انـدازه‌گیـری کـرد (Jahanshahloo & Azizi & Ajirlu, 2011 ; Afzalinejad, 2006; Liu & Chen, 2009; Wang et al., 2007):

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \varphi_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}} \le 1, \quad j=1,\dots,n, \\ & u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r=1,\dots,s; \quad i=1,\dots,m, \end{aligned} \tag{۳}$$

مدل (۳) با تغییری مجدد می‌تواند به مدل LP زیر تبدیل شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi_o = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \ge 0, \quad j=1,\dots,n, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r=1,\dots,s; \quad i=1,\dots,m. \end{aligned} \tag{۴}$$

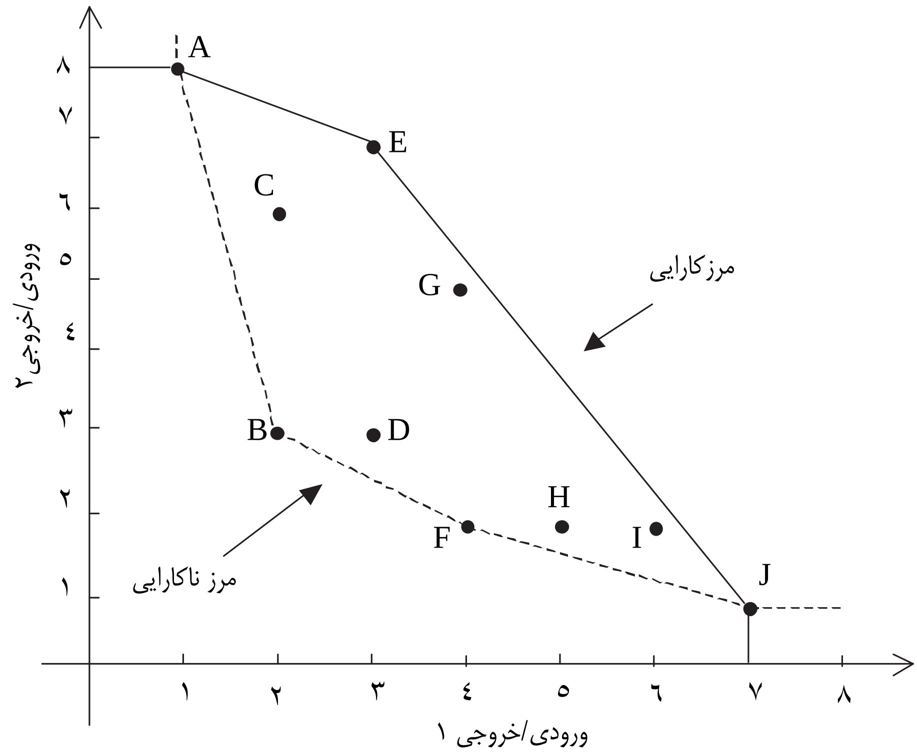
در صورتی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود $\varphi_o^*=1$ باشد، آنگاه گفته مـی‌شـود کـه DMU_o ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت، غیرناکارای بدبینانه است. واضح است که غیرناکارای بدبینانه لزومـاً بـه معنـای کـارای خوشبینانه نیست. بر خلاف مدل‌های CCR (۱) و (۲)، که می‌توان به آنها مدل‌های خوشبینانه گفت، مدل‌های بدبینانـه‌ی (۳) و (۴) در جستجوی مجموعه‌ای از نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر DMU هستند.

برای نشان دادن تفاوت بین DMUهای کارای خوشبینانه، غیرکـارای خوشـبینانه، غیرناکـارای بدبینانـه، و ناکـارای بدبینانـه از یکدیگر، ما از داده‌های خروجی دوبعدی و ورودی یک‌بعدی استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ی داده‌ها از مقالـه‌ی Entani و همکـاران گرفته شده است، و در جدول ۱ نشان داده شده است (Entani et al., 2002).

جدول شماره (۱): مجموعه داده‌ها برای ده **DMU** با یک ورودی و دو خروجی

DMU	ورودی	خروجی ۱	خروجی ۲
A	۱	۱	۸
B	۱	۲	۳
C	۱	۲	۶
D	۱	۳	۳
E	۱	۳	۷
F	۱	۴	۲
G	۱	۴	۵
H	۱	۵	۲
I	۱	۶	۲
J	۱	۷	۱

مرزهای کارایی و ناکارایی برای این مجموعه‌ی داده‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است. به طوری که این شکل نشان می‌دهد، ۳تا از DMUها روی مرز کارایی هستند که ما آنها را کارای خوشبینانه می‌نامیم و مابقی DMUها را نسبت به مرز کارایی، غیرکارای خوشبینانه می‌نامیم. همچنین، ۴تا از DMUها روی مرز ناکارایی واقع شده‌اند که ما آنها را ناکارای بدبینانه می‌نامیم و مابقی DMUها را نسبت به مرز ناکارایی، غیرناکارای بدبینانه می‌نامیم. لازم به ذکر است که در اینجا واحدهای کارای خوشبینانه و ناکارای بدبینانه همپوشانی یعنی واحدهای مشترک نیز دارند.



شکل شماره (۱): مرزهای کارایی و ناکارایی برای ده **DMU**.

در ادامه مدل‌های Entani و همکاران را بررسی می‌کنیم. Entani و همکاران برای ایجاد یک بازه‌ی کارایی برای هر DMU، مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی کران‌های بالا و پایین زیر را برای DMU_o پیشنهاد کردند (Entani et al., 2002):

$$\max/\ \min \quad \phi_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \,/\, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\max_j \{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \,/\, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}\}} \qquad (۵)$$
$$\text{s.t.} \quad u_r, v_i \ge 0, \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1,\ldots,m,$$

مدل ماکزیمم‌سازی (۵) را می‌توان به مدل زیر تبدیل کرد، که مقدار بهینه‌ی آن با مقدار بهینه‌ی مدل (۳) برابر است، و می‌توان آن را از طریق مدل (۴) حل کرد:

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi_o^U = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \max_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \right\} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{۶}$$

مدل مینیمم‌سازی (۵) را نیز می‌توان به مدل زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi_o^L = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \max_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \right\} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{۷}$$

اما نمی‌توان آن را با یک مدل LP معادل جایگزین کرد. با فرض اینکه $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} = 1$ برای هر واحد ناکارای بدبینانه، Entani و همکاران مدل (۷) را به p ($j = J_1, \ldots, J_p$) زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی تقسیم کردند، که در آن p تعداد DMUهای ناکارای بدبینانه است، و $J_1, \ldots, J_p$ DMUهایی هستند که ناکارای بدبینانه هستند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi_{oJ_1}^L = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} / \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{iJ_1} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rJ_1} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m, \\ & \vdots \\ \min \quad & \phi_{oJ_p}^L = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} / \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{iJ_p} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rJ_p} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{۸}$$

که باز هم می‌توان آن را با تبدیل کردن به p مدل LP به شرح زیر، ساده‌تر کرد:

$$\begin{aligned}&\min\quad \phi^{L}_{oJ_1}=\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}\\&\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{m}v_i x_{iJ_1}-\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rJ_1}=0,\\&\quad \sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro}=1,\\&\quad u_r,v_i\ge 0,\quad r=1,\dots,s;\quad i=1,\dots,m,\\&\vdots\\&\min\quad \phi^{L}_{oJ_p}=\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}\\&\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{m}v_i x_{iJ_p}-\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rJ_p}=0,\\&\quad \sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro}=1,\\&\quad u_r,v_i\ge 0,\quad r=1,\dots,s;\quad i=1,\dots,m,\end{aligned} \tag{۹}$$

می‌توانیم این زیرمسائل را حل کنیم و مقدار مینیمم را روی مقادیر بهینه‌ی (۹) به‌عنوان کران پایین بازه‌ی کارایی DMU_o به دست آوریم. وقتی که j برابر با o است، واضح است که $\phi^{L*}_{oj}=1$. لذا می‌توانیم کران پایین بازه‌ی کارایی DMU_o را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\phi^{L*}_{o}=1\wedge \min_{j\neq o}\{\phi^{L*}_{oj}\}, \tag{۱۰}$$

که در آن $a\wedge b=\min\{a,b\}$. بر این اساس، بازه‌ی کارایی DMU_o را با نماد $[\phi^{L*}_o,\phi^{U*}_o]$ نشان می‌دهند، که در آن ϕ^{U*}_o مقدار تابع هدف بهینه‌ی مدل (۶) است.

در زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی (۹)، هر مدل LP فقط دو شرط خطی دارد. بنابراین، صرف نظر از اینکه تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها در مسئله‌ی مورد نظر چندتا باشد، فقط دو متغیر تصمیم می‌توانند غیرصفر باشند. یکی از آنها برای یک وزن ورودی و دیگری برای یک وزن خروجی است. بدین خاطر است که می‌گوییم روش Entani و همکاران کارایی خوشبینانه‌ی هر DMU را تنها با لحاظ کردن یک ورودی و یک خروجی اندازه‌گیری می‌کند. به علاوه، مدل (۷) یا زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی (۹) قادر به شناسایی دقیق واحدهای کارای خوشبینانه و مرز کارایی نیستند.

برای روشن شدن این مطلب، مثال عددی ارائه شده در ابتدای بخش ۲ را در نظر بگیرید. ابتدا به کمک مدل‌های (۲) و (۴)، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی ده DMU را به دست می‌آوریم که در جدول ۲ نشان داده شده است. از جدول می‌توان به روشنی دریافت که سه تا از DMUها، یعنی $\mathrm{DMU_A}$، $\mathrm{DMU_E}$ و $\mathrm{DMU_J}$ بر حسب مدل خوشبینانه‌ی (۲)، کارای خوشبینانه هستند. این سه واحد کارای خوشبینانه، بر روی هم یک مرز کارایی AEJ را تعیین می‌کنند، که در شکل ۱ نشان داده شده است. به طور معمول، تصور می‌شود که عملکرد سه واحد کارای خوشبینانه باید بهتر از هفت واحد دیگر باشد که غیرکارای خوشبینانه هستند. عملکرد ده DMU بر حسب کارایی خوشبینانه‌ی آنها به‌صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned}&\mathrm{DMU_A}\sim\mathrm{DMU_E}\sim\mathrm{DMU_J}\succ\mathrm{DMU_G}\sim\mathrm{DMU_I}\succ\mathrm{DMU_H}\\&\succ\mathrm{DMU_C}\succ\mathrm{DMU_F}\succ\mathrm{DMU_D}\succ\mathrm{DMU_B}\end{aligned}$$

که در اینجا نماد "$\sim$" نشان دهنده‌ی «بی‌تفاوت بودن» و نماد "$\succ$" نشان دهنده‌ی «برتر بودن» است.

جدول شماره (۲): بازه‌ی کارایی مدل‌های **DEA**ی **Entani** و همکاران و کارایی‌های نسبی برای ده **DMU**.

DMU	کارایی بدبینانه	کارایی خوشبینانه	بازه‌ی کارایی مدل‌های DEAی Entani و همکاران
A	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	[۰.۱۲۵۰, ۱.۰۰۰۰]
B	۱/۰۰۰۰	۱/۹۱۶۷	[۰.۳۳۳۳, ۱.۰۰۰۰]
C	۰/۸۱۲۵	۱/۲۱۴۳	[۰.۱۶۶۷, ۰.۸۱۲۵]
D	۰/۸۸۸۹	۱/۵۳۳۳	[۰.۳۳۳۳, ۰.۸۸۸۹]
E	۰/۵۹۰۹	۱/۰۰۰۰	[۰.۱۴۲۹, ۰.۵۹۰۹]
F	۱/۰۰۰۰	۱/۴۳۷۵	[۰.۲۵۰۰, ۱.۰۰۰۰]
G	۰/۵۷۱۴	۱/۰۴۵۵	[۰.۲۰۰۰, ۰.۵۷۱۴]
H	۰/۹۰۹۱	۱/۲۱۰۵	[۰.۲۰۰۰, ۰.۹۰۹۱]
I	۰/۸۳۳۳	۱/۰۴۵۵	[۰.۱۶۶۷, ۰.۸۳۳۳]
J	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	[۰.۱۴۲۹, ۱.۰۰۰۰]

از دیدگاه کارایی بدبینانه، چهار DMU یعنی DMU_A، DMU_B، DMU_F و DMU_J بر حسب مدل بدبینانه‌ی (۴)، ناکارای بدبینانه هستند. آنها بر روی هم یک مرز ناکارایی ABFJ را تعریف می‌کنند که آن هم در شکل ۱ نشان داده شده است. تصور می‌شود که عملکرد این چهار واحد ناکارای بدبینانه ضعیف‌تر از شش واحدی است که غیرناکارای بدبینانه ارزیابی شده‌اند. عملکرد ده DMU بر حسب کارایی بدبینانه‌ی آنها به‌صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$DMU_G \succ DMU_E \succ DMU_C \succ DMU_I \succ DMU_D \succ DMU_H$$
$$\sim DMU_A \sim DMU_B \sim DMU_F \sim DMU_J$$

سنجش‌های فوق بر اساس دیدگاه‌های متفاوتی صورت گرفته‌اند و لذا ممکن است نتایج متفاوتی نیز داشته باشند. به‌عنوان مثال، DMU_Aو DMU_J وقتی که از دیدگاه خوشبینانه ارزیابی می‌شوند، کارای خوشبینانه تلقی شده‌اند، یعنی از همه‌ی DMUهای دیگر عملکرد بهتری دارند، در حالی که وقتی از دیدگاه بدبینانه ارزیابی می‌شوند، ناکارای بدبینانه هستند، یعنی عملکرد آنها از همه‌ی DMUهای دیگر بدتر است. این دو نتیجه‌ی ارزیابی مسلماً با یکدیگر تعارض دارند. هر نتیجه‌گیری ارزیابی که فقط یکی از این دو دیدگاه را در نظر بگیرد، بدون تردید یک‌طرفه، غیر واقع‌گرایانه و غیرمتقاعد کننده خواهد بود.

به منظور ارائه‌ی یک ارزیابی کلی از عملکرد هر DMU، Entani و همکاران هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه را همزمان در نظر گرفتند. نتایج مدل‌های DEAی Entani و همکاران در ستون آخر جدول ۲ گزارش شده است. واضح است که زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی (۹) آنها فقط DMU_Aرا تنها DMU کارای خوشبینانه‌ی شناسایی می‌کند که کمترین مقدار کران پایین بازه‌ی کارایی را در میان تمام DMUها دارد، اما دو DMU کارای خوشبینانه‌ی دیگر را نمی‌تواند شناسایی کند. بنابراین، مرز تولید کارایی را نمی‌توان با رویکرد Entani و همکاران مشخص کرد.

با توجه به اینکه چهار تا از DMUها یعنی DMU_A، DMU_B، DMU_F و DMU_J به‌صورت ناکارای بدبینانه مشخص شده‌اند. Entani و همکاران به منظور تعیین کران پایین بازه‌ی کارایی هر DMU، از چهار مدل LP برای هر DMU استفاده کردند (در کل برای تعیین کران پایین بازه‌ی کارایی ده DMU، ۴۰ مدل LP باید حل شود). برای مثال DMU_Aرا در نظر بگیرید. برای تعیین کران پایین بازه‌ی کارایی این DMU، چهار مدل LP زیر باید حل شوند (رجوع کنید زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی (۹)):

$$(\text{LP1}): \phi_{AA}^{L*} = \min v_1$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1, \\ v_1 - (u_1 + 8u_2) = 0, \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{LP2}): \phi_{AB}^{L*} = \min v_1$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1, \\ v_1 - (2u_1 + 3u_2) = 0, \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$
$$(\mathrm{LP3}): \phi_{AF}^{L*} = \min v_1$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1, \\ v_1 - (4u_1 + 2u_2) = 0, \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$
$$(\mathrm{LP4}): \phi_{AJ}^{L*} = \min v_1$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1, \\ v_1 - (7u_1 + u_2) = 0, \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$

مجموعه جواب بهینه‌ی چهار مدل LP فوق به شرح زیر است:

$$\phi_{AA}^{L*} = 1, u_1^* = 0, u_2^* = 1/8, v_1^* = 1,$$
$$\phi_{AB}^{L*} = 3/8, u_1^* = 0, u_2^* = 1/8, v_1^* = 3/8,$$
$$\phi_{AF}^{L*} = 1/4, u_1^* = 0, u_2^* = 1/8, v_1^* = 1/4,$$
$$\phi_{AJ}^{L*} = 1/8, u_1^* = 0, u_2^* = 1/8, v_1^* = 1/8.$$

بنابراین، کران پایین بازه‌ی کارایی $\mathrm{DMU_A}$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\phi_A^{L*} = \min\{1, 3/8, 1/4, 1/8\} = 0.1250$$

کران پایین بازه‌ی کارایی نُه DMUی دیگر نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شود (مجموعه‌ی وزن‌ها و کران پایین بازه‌ی کارایی DMUهای دیگر در جدول ۳ گزارش شده است). همچنین، بر اساس چهار مجموعه‌ی وزن‌های ورودی و خروجی فوق، بسیار روشن است که فقط یک خروجی (خروجی ۱ یا خروجی ۲) در محاسبه‌ی کران پایین بازه‌ی کارایی دخالت دارد. به مجموعه دوم از وزن‌ها یعنی $v_1^* = 3/8$، $u_2^* = 1/8$ و $u_1^* = 0$ توجه خاصی می‌شود. در اینجا با استفاده از این مجموعه وزن‌ها، کارایی‌های زیر را برای $\mathrm{DMU_F}$، $\mathrm{DMU_H}$، $\mathrm{DMU_I}$ و $\mathrm{DMU_J}$ به دست آوردیم:

$$\phi_F = \phi_H = \phi_I = 3/2, \phi_J = 3$$

همه آنها بزرگتر از یک هستند. چنین نتایجی بدیهی است فرض $\max_j \{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}\} = 1$ را نقض می‌کنند. بنابراین، رویکرد پیشنهادی Entani و همکاران در حقیقت ناقص است.

جدول شماره (۳): مجموعه وزن‌های به دست آمده با استفاده از مسئله‌ی زیربهینه‌سازی (۹).

ϕ_j^{L*}	LP4			LP3			LP2			LP1			DMU
	u_2^*	u_1^*	v_1^*	u_2^*	u_1^*	v_1^*	u_2^*	u_1^*	v_1^*	u_2^*	u_1^*	v_1^*	
۰/۱۲۵۰	۰/۱۲۵	۰	۰/۱۲۵	۰/۱۲۵	۰	۰/۲۵	۰/۱۲۵	۰	۰/۳۷۵	۰/۱۲۵	۰	۱	A
۰/۳۳۳۳	۰/۳۳۳	۰	۰/۳۳۳	۰/۳۳۳	۰	۰/۶۶۷	۰/۳۳۳	۰	۱	۰	۰/۵	۰/۵	B
۰/۱۶۶۷	۰/۱۶۷	۰	۰/۱۶۷	۰/۱۶۷	۰	۰/۳۳۳	۰/۱۶۷	۰	۰/۵	۰	۰/۵	۰/۵	C
۰/۳۳۳۳	۰/۳۳۳	۰	۰/۳۳۳	۰/۳۳۳	۰	۰/۶۶۷	۰	۰/۳۳۳	۰/۶۶۷	۰	۰/۳۳۳	۰/۳۳۳	D
۰/۱۴۲۹	۰/۱۴۳	۰	۰/۱۴۳	۰/۱۴۳	۰	۰/۲۵۶	۰/۱۴۳	۰	۰/۴۲۹	۰	۰/۳۳۳	۰/۳۳۳	E
۰/۲۵۰۰	۰/۵	۰	۰/۵	۰/۵	۰	۱	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰	۰/۲۵	۰/۲۵	F
۰/۲۰۰۰	۰/۲	۰	۰/۲	۰/۲	۰	۰/۴	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰	۰/۲۵	۰/۲۵	G
۰/۲۰۰۰	۰/۵	۰	۰/۵	۰	۰/۲	۰/۸	۰	۰/۲	۰/۴	۰	۰/۲	۰/۲	H
۰/۱۶۶۷	۰/۵	۰	۰/۵	۰	۰/۱۶۷	۰/۶۶۷	۰	۰/۱۶۷	۰/۳۳۳	۰	۰/۱۶۷	۰/۱۶۷	I
۰/۱۴۲۹	۱	۰	۱	۰	۰/۱۴۳	۰/۵۷۱	۰	۰/۱۴۳	۰/۲۸۶	۰	۰/۱۴۳	۰/۱۴۳	J

در ادامه مدل‌های DEAی جدیدی برای تعیین بازه‌ی کارایی هر DMU ایجاد می‌کنیم تا بر نقایص فوق غلبه کنیم.

از نظر تئوری، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه باید یک بازه را تشکیل دهند (Entani et al., 2002; Azizi, 2011 ; Wang & Yang, 2007). برای این منظور، کارایی‌های خوشبینانه به دست آمده از مدل‌های (۱) و (۲) را باید تعدیل کرد. فرض کنید α $(0<\alpha\leq 1)$ ضریب تعدیل باشد. در این صورت کارایی‌های خوشبینانه‌ی تعدیل شده را می‌توان به‌صورت $\tilde{\theta}_j^* = \alpha\theta_j^*$ $(j=1,\ldots,n)$ نوشت، که باید شرط $\tilde{\theta}_j^* = \alpha\theta_j^* \leq \varphi_j^*$ $(j=1,\ldots,n)$ را تأمین کنند؛ یعنی $\alpha \leq \min_{j=1,\ldots,n}\{\varphi_j^* / \theta_j^*\}$. بر این اساس، بازه‌ی کارایی مربوط به DMU_j را می‌توان به‌صورت $[\alpha\theta_j^*, \varphi_j^*]$ $(j=1,\ldots,n)$ بیان کرد.

به منظور سنجش منطقی بازه‌ی کارایی DMUها، ابتدا IDMU را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱: IDMU یک DMU مجازی است که با مصرف کمترین مقدار ورودی، بیشترین مقدار خروجی را تولید می‌کند.

با توجه به تعریف IDMU، ورودی و خروجی IDMU را با $x_i^{\min}$ $(i=1,\ldots,m)$ و $y_r^{\max}$ $(r=1,\ldots,s)$ نشان می‌دهیم که $x_i^{\min}$ نشان دهنده‌ی کمترین میزان ورودی iام و $y_r^{\max}$ نشان دهنده‌ی بیشترین میزان خروجی rام می‌باشند. این مقادیر به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$x_i^{\min} = \min_j\{x_{ij}\}, \quad i=1,\ldots,m,$$
$$y_r^{\max} = \max_j\{y_{rj}\}, \quad r=1,\ldots,s.$$

فرض کنید φ_{IDMU}^* کارایی بدبینانه‌ی IDMU باشد. در این صورت می‌توان آن را از حل مدل برنامه‌ریزی کسری زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi_{IDMU} = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_i^{\min}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_r^{\max}} \\ \text{s.t.} \quad & \varphi_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}} \leq 1, \quad j=1,\ldots,n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1,\ldots,s; \quad i=1,\ldots,m, \end{aligned} \tag{۱۱}$$

به کمک تبدیل Charnes و Cooper، مدل برنامه‌ریزی کسری (۱۱) به مدل LP زیر تبدیل می‌شود و به راحتی قابل حل

خواهد بود (Charnes & Cooper, 1962):

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi_{IDMU} = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i^{\min} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \geq 0, \quad j=1,\ldots,n, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_r^{\max} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1,\ldots,s; \quad i=1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

با توجه به مطالب فوق داریم:

$$\varphi^*_{IDMU} \leq \min_{j=1,\ldots,n}\{\varphi^*_j\} \text{ و } \theta^*_{\max} = \max_{j=1,\ldots,n}\{\theta^*_j\}.$$

اکنون پارامتر α را طوری تعیین می‌کنیم که برای تمام بازه‌ها $[\alpha\theta^*_j, \varphi^*_j]$ ($j=1,\ldots,n$)، شرط ($\alpha\theta^*_j \leq \varphi^*_j$) ($j=1,\ldots,n$) برقرار باشد:

$$\min_{j=1,\ldots,n}\{\varphi^*_j / \theta^*_j\} \geq \frac{\min_{j=1,\ldots,n}\{\varphi^*_j\}}{\max_{j=1,\ldots,n}\{\theta^*_j\}} \geq \frac{\varphi^*_{IDMU}}{\theta^*_{\max}},$$

اگر قرار دهیم $\alpha = \varphi^*_{IDMU} / \theta^*_{\max}$، در این صورت مشکلی در تعیین α نخواهیم داشت. بنابراین، کارایی DMUها را می‌توانیم در محدوده‌ی بازه‌ی $[\alpha,1]$ به دست آوریم.

دو مدل برنامه‌ریزی کسری زیر منعکس کننده این ایده است:

$$\begin{aligned} \max/\ \min \quad & \psi_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}} \leq 1, \quad j=1,\ldots,n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1,\ldots,s; \quad i=1,\ldots,m, \end{aligned} \tag{۱۳}$$

مدل‌های فوق می‌توانند به دو مدل LP زیر تبدیل شوند:

$$\begin{aligned} \max/\ \min \quad & \psi_o = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r (\alpha y_{rj}) - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j=1,\ldots,n, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \geq 0, \quad j=1,\ldots,n, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1,\ldots,s; \quad i=1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

هر دو مدل (۱۳) و (۱۴) مدل‌های کراندار نامیده می‌شوند[۳]. فرض کنید که ψ_o^{U*} و ψ_o^{L*} به ترتیب ماکزیمم و مینیمم تابع هدف مدل (۱۴) باشند. در این صورت، آنها با همدیگر یک بازه‌ی کارایی را تشکیل می‌دهند که کران بالای آن از دیدگاه بدبینانه و کران پایین آن از دیدگاه خوشبینانه برای DMU_o اندازه‌گیری شده است. بنابراین، محدوده‌ی کارایی DMU_o است، و آن را با نماد $[\psi_o^{L*}, \psi_o^{U*}]$ نشان می‌دهیم. با حل مدل‌های (۱۴) می‌توانیم بهترین و بدترین کارایی‌های نسبی تمام DMUها و کارایی‌های بازه‌ای آنها را (یعنی $[\psi_j^{L*}, \psi_j^{U*}]$ ($j=1,\ldots,n$)) پیدا کنیم.

در رابطه با بازه‌ی کارایی $[\alpha\theta^*_o, \varphi^*_o] = [\psi_o^{L*}, \psi_o^{U*}]$ تعاریف زیر را داریم:

[۳] در مدل‌های (۱۴)، مدل ماکزیمم‌سازی معادل مدل (۴) می‌باشد. همچنین، مقدار بهینه‌ی مدل مینیمم‌سازی معادل α برابر مقدار بهینه‌ی مدل (۲) می‌باشد.

تعریف ۲: DMU_o را ناکارای بدبینانه می‌گوییم اگر و تنها اگـر $\psi_o^{U*}=1$، در غیـر ایـن صـورت آن را غیرناکـارای بدبینانـه می‌گوییم.

تعریف ۳: DMU_o را کارای خوشبینانه می‌گوییم اگر و تنها اگر $\psi_o^{L*}=\alpha$، در غیر ایـن صـورت آن را غیرکـارای خوشـبینانه می‌گوییم.

تعریف ٤: DMU_o را نامعین می‌گوییم اگر و تنها اگر نه کارای خوشبینانه و نه ناکارای بدبینانه باشد.

تعریف ۵: DMU_o را ویژه می‌گوییم اگر و تنها اگر هم کارای خوشبینانه و هم ناکارای بدبینانه باشد.

برای مقایسه‌ی مدل‌های کراندار پیشنهادی با مدل‌های Entani و همکاران، مثال عددی ارائه شده در ابتدای بخـش را در نظـر بگیرید. ابتدا مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های IDMU را مشخص می‌کنیم که این مقادیر به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$x_1^{\min}=\min_j\{x_{1j}\}=1,\quad y_1^{\max}=\max_j\{y_{1j}\}=7,\quad y_2^{\max}=\max_j\{y_{2j}\}=8$$

سپس، کارایی بدبینانه‌ی IDMU را به کمک مدل (۱۲) محاسبه می‌کنیم که مقدار آن برابر اسـت بـا $\varphi_{IDMU}^{*}=0.3478$. در نهایت، برای به دست آوردن بازه‌ی کارایی هر DMU، با استفاده از مدل‌هـای کرانـدار (۱۴)، α را بـه‌صـورت زیـر بـه دسـت می‌آوریم:

$$\theta_{\max}^{*}=1.9167 \quad \text{و} \quad \varphi_{IDMU}^{*}=0.3478 \Rightarrow \alpha=\frac{0.3478}{1.9167}=0.1814$$

سپس، با اجرای مدل‌های (۱۴) برای هر DMU، بازه‌ی کارایی آنها را به دست می‌آوریم، که در جـدول ۴ نشان داده شده است. از جدول ۴ به طور واضح دیده می‌شود که مدل‌های کراندار (۱۴)، نه تنها سه DMU کارای خوشبینانه را به طور دقیق مشخص می‌کند بلکه چهار DMU ناکارای بدبینانه را هم به طور کامـل مشـخص مـی‌کنـد (DMU_A، DMU_Eو DMU_J کـارای خوشبینانه شناسایی شده‌اند و DMU_A، DMU_B، DMU_F و DMU_J ناکارای بدبینانه شناسایی شـده‌انـد). چنـین نتـایج ارزیابی، کاملاً با نتایج به دست آمده از مدل خوشبینانه‌ی (۲) و مدل بدبینانه‌ی (۴) سازگار می‌باشد.

جدول شماره(۴): بازه‌ی کارایی ده **DMU** با استفاده از مدل‌های کراندار (۱۴).

DMU	بازه‌ی کارایی
A	[۰.۱۸۱۴, ۱.۰۰۰۰]
B	[۰.۳۴۷۷, ۱.۰۰۰۰]
C	[۰.۲۲۰۳, ۰.۸۱۲۵]
D	[۰.۲۷۸۱, ۰.۸۸۸۹]
E	[۰.۱۸۱۴, ۰.۵۹۰۹]
F	[۰.۲۶۰۸, ۱.۰۰۰۰]
G	[۰.۱۸۹۶, ۰.۵۷۱۴]
H	[۰.۲۱۹۶, ۰.۹۰۹۱]
I	[۰.۱۸۹۶, ۰.۸۳۳۳]
J	[۰.۱۸۱۴, ۱.۰۰۰۰]

در این مثال هر دو DMU_Aو DMU_J به‌صورت کارای خوشبینانه و ناکارای بدبینانه ارزیابی شده‌اند. این پدیده نشان می‌دهد که دو مرز تولید متفاوت مشترکاً از دو DMU خاص عبور می‌کنند (رجوع کنید شکل ۱). معمولاً DMUهای کارای خوشـبینانه عملکرد خوبی دارند. اما به این معنی نیست که هر DMU کـارای خوشـبینانه بهتـرین اسـت. همچنـین DMUهـای ناکـارای بدبینانه معمولاً ضعیف عمل می‌کنند، اما نه اینکه هر DMU ناکارای بدبینانه بدترین کارکرد را انجام می‌دهد. بنابراین، وقتی که یک DMU هم کارای خوشبینانه و هم ناکارای بدبینانه باشد، به این مفهوم است که DMU نه بهترین است و نه بدترین.

در ادامه، مدل‌های کراندار پیشنهادی را برای تحلیل فعالیت‌های بانک‌های پس‌انداز اسپانیا مورد اسـتفاده قـرار مـی‌دهـیم. تمـام

بانک‌های پس‌انداز اسپانیا، که تعدادشان جمعاً ۴۷ بانک است، در این مجموعه‌ی داده‌ها گنجانده شـده‌انـد (Serrano-Cinca, MarMoliero, & Chaparro, 2004).

بانک‌های پس‌انداز از بازیگران اصلی در صحنه‌ی سیستم مالی اسپانیا هستند. این بانک‌ها در قرن نوزدهم به‌صورت تعـاونی‌هـای حمایت متقابل منشأ گرفتند، ولی در طول زمان تبدیل به مؤسساتی شده‌اند که جهت‌گیری آنها به سمت پـس‌انـدازهای انـدک و سرمایه‌گذاری‌های کوچک است. این بانک‌ها به صورت منطقه‌ای هستند و تعهد شدیدی نسبت به محل خود و مؤسسات محلـی خود دارند. به‌عنوان مثال، آنها معمولاً پروژه‌های دولتی محلی را تأمین اعتبار می‌کنند. این بانک‌ها، با استثناهایی معـدود، معمـولاً مالک یا سهامدار مشخصی ندارند. ساختار حقوقی آنها بسیار غیرعادی است. آنها از نظر حقوقی متعهد به ارتقـای رفـاه اجتمـاعی هستند. برای این کار، آنها به ایجاد بنگاه‌های جدید کمک می‌کنند، برای توسعه‌ی اجتماعی محل سرمایه‌گذاری می‌کنند، و نقش پیشتازی در فعالیت‌های اجتماعی دارند. ولی علیرغم این ساختار خاص، و شاید هم به خاطر آن، این بانک‌ها بسیار موفق‌اند. آنهـا ۵۷٪ همه‌ی سپرده‌های اسپانیا را به خود اختصاص می‌دهند، و در این زمینـه از بانـک‌هـای تجـاری جلـوتر هسـتند. در اسـپانیا، بانک‌های پس‌انداز از نظر قانونی موظف‌اند «ضریب توانایی مالی» را در یک سطح حداقل نگه دارند. بانک اسپانیا کنترل می‌کنـد که این شرط حتماً رعایت شود.

یک مؤسسه‌ی مالی را می‌توان به‌عنوان یک واحد تولیدی در نظر گرفت که از ورودی‌ها برای تولید خروجی‌ها اسـتفاده مـی‌کنـد. یک بانک پس‌انداز اسپانیایی مایل است نشان دهد که مدیریت مـؤثری دارد، در اسـتفاده از فنـاوری الکترونیکـی بـه جلـو نگـاه می‌کند، و در ارائه‌ی اطلاعات مالی و غیره شفاف است.

امروزه معمولاً بنگاه‌ها حضور فعالی در اینترنت دارند. وب فرصت بسیار خوبی برای ایجاد وجهه برای شرکت، ارائه‌ی اطلاعـات و دستیابی به آخرین زوایای بازار فراهم می‌کند. به‌عنوان یک بخش بنیادی از این حضور، شرکت‌ها می‌توانند دسترسی دوردست به انواع خدمات را فراهم کنند. یک مشتری از هر نقطه‌ای در دنیا می‌تواند سفارش بدهد، استعلام کند و یا عقیده‌ی خود را ابراز کند. استفاده از اینترنت به‌عنوان یک ابزار سرویس اطلاعاتی و دوردست خصوصاً در مورد بانک‌های پس‌انداز اسپانیا حایز اهمیت است. فقدان مالک و سهام‌دار بدان معنا است که این مؤسسات در حقیقت، مستقیماً به جامعه‌ی محلی پاسخگو هستند. برای آنها خیلـی مهم است که «دوستدار جامعه» باشند. معنای این مطلب آن است که باید حتی‌الامکان در مقابل مردم شفافیت داشـته باشـند، و سرویس‌های خود را به آسانی در دسترس مردم قرار دهند. بانکداری الکترونیک روشـی بـرای گسـترش خـدمات مـالی اسـت، و ارائه‌ی اطلاعات مالی در اینترنت روشـی بـرای تقویـت شـفافیت اسـت. کیفیـت بانکـداری الکترونیـک مطلبـی نیسـت کـه در اظهارنامه‌های مالی به آن توجه شده باشد، ولی یک سرویس بانکداری الکترونیک خوب مسلماً منجر بـه تعـداد بیشـتر مشـتریان خواهد شد. به همان طریق، افزایش شفافیت اطلاعات مالی ممکن است منجر به افزایش اعتماد به مؤسسـه شـود و مجموعـه‌ی مشتریان را گسترده‌تر سازد.

چهل و هفت بانک پس‌انداز اسپانیا از نظر دو ورودی یعنی *تعداد کارکنان* (x_1) (به‌عنوان معیاری از نیروی انسانی) و *دارایـی‌هـای ثابت* (x_2) (به‌عنوان معیاری از شدت سرمایه) و سه خروجی یعنی *درآمد عملیاتی* (y_1)،*سپرده‌ها* (y_2) و *وام‌ها* (y_3) که داده‌های ورودی و خروجی آنها در جدول ۵ نشان داده شده است، ارزیابی می‌شوند.

جدول شماره (۵): مجموعه داده‌ها برای ۴۷ بانک پس‌انداز اسپانیا

بانک پس‌انداز (DMU)	ورودی‌ها		خروجی‌ها		
	x_1	x_2^a	y_1^a	y_2^a	y_3^a
Bancaja	۴۵۵۱	۲۲۴	۵۸۸	۱۱۴۶۳	۱۲۹۰۷
BBK	۲۵۱۱	۳۰۵	۴۴۰	۱۰۰۱۹	۶۵۴۰
CAI	۱۲۲۵	۱۰۲	۱۷۸	۳۰۲۵	۲۸۷۶
Caixacarlet	۸۳	۷	۶	۱۲۵	۱۲۵
Caixacatalunya	۴۸۰۱	۴۷۱	۵۶۲	۱۴۹۴۴	۱۳۶۸۱
Caixagalicia	۳۴۲۵	۲۹۹	۴۶۰	۹۹۸۱	۷۸۴۸

Caixagirona	۷۵۶	۴۲	۸۳	۲۲۹۷	۱۴۵۱
Caixalaietana	۷۷۳	۱۱۴	۷۹	۱۹۰۰	۱۵۸۰
Caixamanlleu	۳۸۰	۲۷	۳۸	۸۲۶	۶۳۷
Caixamanresa	۵۸۳	۲۹	۷۱	۱۶۰۸	۱۱۳۴
Caixanova	۲۲۹۹	۱۹۵	۳۰۴	۶۱۷۳	۴۷۳۲
Caixaontinyent	۲۱۸	۱۴	۱۸	۳۴۵	۳۶۹
Caixapenedes	۱۹۰۳	۲۱۱	۱۹۹	۴۷۹۷	۴۲۹۷
Caixasabadell	۱۲۴۵	۸۴	۱۱۹	۲۸۰۵	۲۷۴۵
Caixatarragona	۱۱۶۴	۵۰	۱۱۱	۲۶۸۴	۲۰۴۰
Caixaterrassa	۱۰۹۰	۵۳	۱۰۶	۲۵۰۶	۱۹۰۹
Cajabadajoz	۷۷۰	۶۶	۷۹	۱۴۶۷	۱۱۴۲
Cajacanarias	۱۰۴۴	۶۰	۱۵۱	۳۰۳۰	۲۴۵۴
Cajacantabria	۹۹۸	۸۶	۱۲۸	۲۶۱۳	۲۰۲۷
Cajacirculo	۵۵۰	۷۷	۷۶	۱۷۴۲	۹۲۳
Cajadeavila	۵۷۸	۴۶	۷۵	۱۳۹۳	۱۰۹۳
Cajadeburgos	۷۵۳	۸۹	۱۱۰	۳۰۲۳	۲۲۳۵
Cajaduero	۲۴۵۹	۲۴۸	۲۳۰	۷۲۳۱	۴۴۴۹
Cajaen	۱۳۳	۷	۱۳	۲۲۳	۲۰۲
Cajaespana	۲۶۶۶	۲۹۲	۳۴۹	۷۶۶۸	۵۸۷۱
Cajaextremadura	۱۰۶۳	۶۲	۱۰۴	۲۴۱۱	۱۶۹۸
Cajagranada	۲۰۴۹	۱۴۶	۱۹۷	۴۱۵۲	۳۹۰۶
Cajaguadalajara	۲۳۳	۱۳	۲۱	۴۹۴	۴۱۵
Cajamadrid	۱۰۹۵۲	۱۲۳۳	۱۸۰۸	۳۷۷۹۰	۳۵۹۴۷
Cajamurcia	۱۵۱۰	۱۲۱	۲۱۰	۴۷۲۳	۳۷۴۳
Cajanavarra	۱۳۶۹	۸۱	۱۸۹	۵۰۶۰	۴۰۱۹
Cajarioja	۴۱۱	۳۳	۴۳	۱۰۶۲	۱۰۶۰
Cajasanfernando	۲۰۸۴	۱۳۱	۱۸۵	۳۶۳۹	۳۴۲۱
Cajasegovia	۵۲۴	۵۹	۶۳	۱۴۳۰	۱۲۷۲
Cajastur	۱۳۲۴	۹۸	۱۹۶	۴۵۴۷	۳۱۶۶
Cajasur	۲۲۱۰	۱۸۹	۲۴۱	۵۴۸۲	۵۰۶۰
Cajavital	۶۷۲	۷۸	۱۱۸	۳۰۳۲	۲۲۲۷
CAM	۵۰۳۱	۳۵۹	۵۸۷	۱۲۶۵۹	۱۲۱۵۵
CCM	۲۱۷۹	۱۹۱	۲۲۳	۵۶۲۸	۴۰۶۶
Colonya	۶۳	۴	۶	۱۴۳	۱۱۴
Elmonte	۱۹۸۲	۱۴۷	۲۳۰	۴۴۷۵	۴۷۳۵
Ibercaja	۴۲۴۱	۲۵۹	۴۱۰	۱۰۷۵۵	۸۸۸۳
Kutxa	۱۶۵۴	۲۳۳	۲۸۷	۶۶۱۳	۴۸۵۴
Lacaixa	۱۹۱۲۶	۱۹۸۶	۲۴۱۶	۴۷۳۹۱	۴۳۲۷۳
Lacajadecanarias	۹۳۱	۸۰	۱۱۷	۲۴۱۹	۲۰۴۸
Sanostra	۱۴۱۲	۱۱۱	۱۳۸	۳۳۴۹	۲۹۶۰

Unicaja	۴۵۱۰	۳۵۹	۴۶۳	۹۵۹۳	۷۴۴۳
IDMU	۶۳	۴	۲۴۱۶	۴۷۳۹۱	۴۳۲۷۳

[a] تمام مبالغ پولی بر حسب میلیون یورو هستند.

برای این مطالعه‌ی موردی واقعی، ابتدا مدل (۲) را برای هر DMU اجرا می‌کنیم تا مقادیر کارایی‌های آنها را از دیدگاه DEA خوشبینانه اندازه‌گیری کنیم، و سپس مدل (۴) را برای هر DMU اجرا می‌کنیم تا مقادیر کارایی‌های آنها را از دیدگاه DEA بدبینانه اندازه‌گیری کنیم. این نتایج در جدول ۶ نشان داده شده‌اند، که از آنجا به روشنی می‌توان دید مقادیر کارایی‌های اندازه‌گیری شده از دو دیدگاه DEA متفاوت، اختلافات قابل ملاحظه‌ای دارند. به طوری که از جدول ۶ دیده می‌شود، بانک‌های پس‌انداز Bancaja، Cajacanarias، Cajanavarra و Cajavital همگی به‌عنوان DMUهای کارای خوشبینانه ارزیابی شده‌اند، یعنی نسبت به ۴۳ بانک پس‌انداز دیگر دارای بهترین عملکرد هستند. همچنین، بر اساس نتایج مدل (۴)، بانک‌های پس‌انداز Caixacarlet، Caixalaietana، Cajabadajoz و Cajacirculo همگی به‌عنوان DMUهای ناکارای بدبینانه ارزیابی شده‌اند، یعنی نسبت به ۴۳ بانک پس‌انداز دیگر دارای بدترین عملکرد هستند و در معرض ورشکستگی هستند. به منظور ایجاد یک نتیجه‌گیری ارزیابی کلی برای ۴۷ DMU، جدول ۶ مقادیر بازه‌ی کارایی مبتنی بر DEA را برای هر DMU با در نظر گرفتن همزمان هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه نشان می‌دهد. قبل از اجرای مدل‌های (۱۴) برای این مثال عددی، مقادیر زیر را به دست آوردیم:

$$\theta^*_{\max} = 2.0604 \quad و \quad \varphi^*_{IDMU} = 0.0022 \Rightarrow \alpha = 0.0022 / 2.0604 = 0.0011 .$$

با داده‌های ورودی-خروجی جدول ۵، مدل‌های (۱۴) را برای محاسبه‌ی کران‌های پایین و بالای نمرات کارایی بانک‌های پس‌انداز در اسپانیا به کار می‌گیریم. نتایج در ستون آخر جدول ۶ نشان داده شده است. بانک پس‌انداز Bancaja را در نظر بگیرید. دامنه‌ی نمره‌ی کارایی $[0.0011, 0.5979]$ است، که نشان می‌دهد که نمره‌ی کارایی هرگز به زیر ۰/۰۰۱۱ سقوط نخواهد کرد، و بدترین نمره‌ی کارایی ممکن ۰/۵۹۷۹ است. اکثر بانک‌ها (۴۳ تا از ۴۷ بانک) دارای نمره‌ی کارایی کران بالای کوچک‌تر از ۱ هستند، و چهار بانک کران پایین دارند که ۰/۰۰۱۱ می‌باشد. تنها بانک‌های پس‌انداز Caixacarlet، Caixalaietana، Cajabadajoz و Cajacirculo کران بالای ۱ دارند. این هشداری برای مدیریت در رابطه با عملیات این چهار بانک است. به نظر می‌رسد که مدیران بانک‌های پس‌انداز Caixacarlet، Caixalaietana، Cajabadajoz و Cajacirculo به قدر کافی محتاط نیستند، و از خطرات مرتبط آگاهی ندارند. نمرات کارایی که با روش پیشنهادی این مقاله محاسبه شده است، می‌تواند در مورد عملیات غیرطبیعی بانک‌های پس‌انداز Caixacarlet، Caixalaietana، Cajabadajoz و Cajacirculo هشدار بدهد.

مدیران کل باید نقاط ضعف بانک‌های خود را در مقایسه با دیگران پیش‌بینی کنند، و تنظیمات مناسب را قبل از آنکه خیلی دیر شود، انجام دهند. برای بانک‌هایی که نمره‌ی کارایی پایینی دارند، ورودی‌ها باید کاهش یابد و خروجی‌ها افزایش یابد، تا عملکرد بهتری پیدا کنند.

جدول شماره‌ی (۶): کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه و بازه‌ی کارایی ۴۷ بانک پس‌انداز اسپانیا.

بانک پس‌انداز (DMU)	کارایی خوشبینانه	کارایی بدبینانه	بازه‌ی کارایی
Bancaja	۱/۰۰۰۰	۰/۵۹۷۹	[۰.۰۰۱۱, ۰.۵۹۷۹]
BBK	۱/۰۰۲۱	۰/۶۳۶۳	[۰.۰۰۱۱, ۰.۶۳۶۳]
CAI	۱/۰۸۹۲	۰/۶۳۹۷	[۰.۰۰۱۲, ۰.۶۳۹۷]
Caixacarlet	۲/۰۶۰۴	۱/۰۰۰۰	[۰.۰۰۲۳, ۱.۰۰۰۰]
Caixacatalunya	۱/۱۲۱۰	۰/۶۷۳۳	[۰.۰۰۱۲, ۰.۶۷۳۳]
Caixagalicia	۱/۱۹۴۲	۰/۶۵۶۲	[۰.۰۰۱۳, ۰.۶۵۶۲]
Caixagirona	۱/۱۴۲۲	۰/۷۷۹۴	[۰.۰۰۱۳, ۰.۷۷۹۴]
Caixalaietana	۱/۶۲۱۳	۱/۰۰۰۰	[۰.۰۰۱۸, ۱.۰۰۰۰]

Caixamanlleu	۱/۵۱۶۱	۰/۸۹۰۸	[۰.۰۰۱۷, ۰.۸۹۰۸]
Caixamanresa	۱/۰۱۷۱	۰/۷۶۶۱	[۰.۰۰۱۱, ۰.۷۶۶۱]
Caixanova	۱/۲۰۳۱	۰/۷۲۳۱	[۰.۰۰۱۳, ۰.۷۲۳۱]
Caixaontinyent	۱/۷۲۱۴	۰/۹۵۱۶	[۰.۰۰۱۹, ۰.۹۵۱۶]
Caixapenedes	۱/۴۵۲۴	۰/۸۱۱۵	[۰.۰۰۱۶, ۰.۸۱۱۵]
Caixasabadell	۱/۳۵۶۵	۰/۷۵۶۳	[۰.۰۰۱۵, ۰.۷۵۶۳]
Caixatarragona	۱/۰۹۴۴	۰/۸۵۵۳	[۰.۰۰۱۲, ۰.۸۵۵۳]
Caixaterrassa	۱/۲۲۵۲	۰/۸۵۵۲	[۰.۰۰۱۳, ۰.۸۵۵۲]
Cajabadajoz	۱/۵۵۵۲	۱/۰۰۰۰	[۰.۰۰۱۷, ۱.۰۰۰۰]
Cajacanarias	۱/۰۰۰۰	۰/۶۳۴۴	[۰.۰۰۱۱, ۰.۶۳۴۴]
Cajacantabria	۱/۲۴۵۹	۰/۷۳۵۰	[۰.۰۰۱۴, ۰.۷۳۵۰]
Cajacirculo	۱/۲۷۰۸	۱/۰۰۰۰	[۰.۰۰۱۴, ۱.۰۰۰۰]
Cajadeavila	۱/۲۰۴۷	۰/۷۸۴۷	[۰.۰۰۱۳, ۰.۷۸۴۷]
Cajadeburgos	۱/۱۱۶۵	۰/۶۰۴۶	[۰.۰۰۱۲, ۰.۶۰۴۶]
Cajaduero	۱/۴۶۰۱	۰/۸۹۵۰	[۰.۰۰۱۶, ۰.۸۹۵۰]
Cajaen	۱/۳۸۷۱	۰/۹۸۶۰	[۰.۰۰۱۵, ۰.۹۸۶۰]
Cajaespana	۱/۳۱۵۰	۰/۷۴۰۶	[۰.۰۰۱۴, ۰.۷۴۰۶]
Cajaextremadura	۱/۴۴۶۶	۰/۹۳۳۸	[۰.۰۰۱۶, ۰.۹۳۳۸]
Cajagranada	۱/۵۳۲۲	۰/۷۸۸۶	[۰.۰۰۱۷, ۰.۷۸۸۶]
Cajaguadalajara	۱/۵۱۲۲	۰/۸۴۳۹	[۰.۰۰۱۷, ۰.۸۴۳۹]
Cajamadrid	۱/۰۰۲۶	۰/۵۵۹۹	[۰.۰۰۱۱, ۰.۵۵۹۹]
Cajamurcia	۱/۱۲۰۸	۰/۶۰۴۰	[۰.۰۰۱۲, ۰.۶۰۴۰]
Cajanavarra	۱/۰۰۰۰	۰/۵۲۳۶	[۰.۰۰۱۱, ۰.۵۲۳۶]
Cajarioja	۱/۱۹۲۷	۰/۶۹۰۹	[۰.۰۰۱۳, ۰.۶۹۰۹]
Cajasanfernando	۱/۶۲۶۵	۰/۹۱۴۳	[۰.۰۰۱۸, ۰.۹۱۴۳]
Cajasegovia	۱/۳۵۵۷	۰/۷۱۷۷	[۰.۰۰۱۵, ۰.۷۱۷۷]
Cajastur	۱/۰۲۵۰	۰/۶۲۳۵	[۰.۰۰۱۱, ۰.۶۲۳۵]
Cajasur	۱/۳۵۸۷	۰/۶۶۸۰	[۰.۰۰۱۵, ۰.۶۶۸۰]
Cajavital	۱/۰۰۰۰	۰/۵۲۴۹	[۰.۰۰۱۱, ۰.۵۲۴۹]
CAM	۱/۲۴۸۶	۰/۶۲۳۲	[۰.۰۰۱۴, ۰.۶۲۳۲]
CCM	۱/۵۴۴۰	۰/۸۰۹۲	[۰.۰۰۱۷, ۰.۸۰۹۲]
Colonya	۱/۵۱۱۸	۰/۸۲۹۵	[۰.۰۰۱۷, ۰.۸۲۹۵]
Elmonte	۱/۲۷۰۶	۰/۶۶۷۰	[۰.۰۰۱۴, ۰.۶۶۷۰]
Ibercaja	۱/۴۰۷۶	۰/۷۴۷۸	[۰.۰۰۱۵, ۰.۷۴۷۸]
Kutxa	۱/۰۱۲۰	۰/۶۴۸۱	[۰.۰۰۱۱, ۰.۶۴۸۱]
Lacaixa	۱/۳۳۸۹	۰/۷۳۵۵	[۰.۰۰۱۵, ۰.۷۳۵۵]
Lacajadecanarias	۱/۲۷۰۵	۰/۶۸۱۹	[۰.۰۰۱۴, ۰.۶۸۱۹]
Sanostra	۱/۴۶۲۱	۰/۷۳۹۷	[۰.۰۰۱۶, ۰.۷۳۹۷]
Unicaja	۱/۵۲۲۸	۰/۹۰۳۲	[۰.۰۰۱۷, ۰.۹۰۳۲]

۳- نتیجه‌گیری

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به‌عنوان رویکردی برای تحلیل کارایی نسـبی، یکـی از نویـدبخش‌تـرین و توسـعه یابنـده‌تـرین

روش‌ها در چهار دهه‌ی گذشته است. نه تنها فرهیختگان مدیریت، بلکه حتی بسیاری از اقتصاددانان علاقه‌ی زیادی بـه تحقیـق، توسعه و کاربرد آن نشان داده‌اند. در شکل متعارف DEA، اندازه‌گیری عملکرد DMUها بر اساس دیـدگاه خوشـبینانه صـورت می‌گیرد. بنابراین، مدل‌های خوشبینانه را می‌توان روش تحلیل بهترین کارایی نسبی یـا کـارایی خوشـبینانه دانسـت. مـدل‌هـای دیگری به نام مدل‌های بدبینانه وجود دارند که هر DMU را به‌صورت بدبینانه ارزیابی می‌کنند. اما اساساً هیچگونه رابطه‌ای بین مدل‌های خوشبینانه و مدل‌های بدبینانه وجود ندارد. یک مجموعه‌ی نمره‌دهی عملکرد باید مشتمل بر هر دوی آنها باشد. ارزیابی نتیجه‌گیری‌های حاصل از فقط یکی از آنها یک‌طرفه خواهد بود.

برای اندازه‌گیری عملکرد کلی DMUها و اجتناب از یک‌طرفه بودن ارزیابی، در این مقاله زوج جدیدی از مدل‌های DEA برای کار با داده‌های قطعی ایجاد کردیم. در مقایسه با مدل‌های DEAی ایجاد شده توسط Entani و همکاران، مدل‌هـای DEAی پیشنهادی از تمام اطلاعات موجود برای اندازه‌گیری کارایی همه‌ی DMUها استفاده مـی‌کننـد، کـه سـبب مـی‌شـود مـدل‌هـا منطقی‌تر و قابل اعتمادتر باشند. و بعد، مدل‌های DEAی پیشنهادی تمام DMUهای کارای خوشبینانه را به درستی شناسـایی می‌کنند که سبب می‌شود مدل‌های پیشنهادی قوی‌تر و عملی‌تر باشند. مدل‌های DEAی حاصله در نهایت بـا دو مثـال عـددی منجمله یک مثال درباره‌ی ارزیابی عملکرد بانک‌های پس‌انداز اسپانیا امتحان شدند.

سپاسگزاری

مؤلفان از نظرات و پیشنهادات سودمند یک داور ناشناس قدردانی می‌کنند.

٤- منابع

1. Ahmady, Nazanin, Azadi, Majid, Sadeghi, Seyed Amir Hossein, & Farzipoor Saen, Reza. (2013). A novel fuzzy data envelopment analysis model with double frontiers for supplier selection. *International Journal of Logistics Research and Applications, 16*(2), 87-98. doi: 10.1080/13675567.2013.772957

2. Amirteimoori, Alireza. (2007). DEA efficiency analysis: Efficient and anti-efficient frontier. *Applied Mathematics and Computation, 186*(1), 10-16. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.006

3. Amirteimoori, Alireza, Kordrostami, Sohrab, & Rezaitabar, Aliakbar. (2006). An improvement to the cost efficiency interval: A DEA-based approach. *Applied Mathematics and Computation, 181*(1), 775-781. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.02.005

4. Azizi, Hossein. (2011). The interval efficiency based on the optimistic and pessimistic points of view. *Applied Mathematical Modelling, 35*(5), 2384-2393. doi: https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.11.055

5. Azizi, Hossein, & Ajirlu, Hassan Ganjeh. (2011). Measurement of the worst practice of decision-making units in the presence of non-discretionary factors and imprecise data. *Applied Mathematical Modelling, 35*(9), 4149-4156. doi: https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.038

6. Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly, 9*(3-4), 181-186. doi: 10.1002/nav.3800090303

7. Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research, 2*(6), 429-444. doi: https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8

8. Chen, Jin-Xiao. (2012). A comment on DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units. *Applied Mathematics and Computation, 219*(2), 583-591. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.06.046

9. Chin, Kwai-Sang, Wang, Ying-Ming, Poon, Gary Ka Kwai, & Yang, Jian-Bo. (2009). Failure mode and effects analysis by data envelopment analysis. *Decision Support Systems, 48*(1), 246-256. doi: https://doi.org/10.1016/j.dss.2009.08.005

10. Entani, Tomoe, Maeda, Yutaka, & Tanaka, Hideo. (2002). Dual models of interval DEA

and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research, 136*(1), 32-45. doi: https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00055-8

11. Entani, Tomoe, & Tanaka, Hideo. (2006). Improvement of efficiency intervals based on DEA by adjusting inputs and outputs. *European Journal of Operational Research, 172*(3), 1004-1017. doi: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.11.010
12. Foroughi, Ali Asghar, & Aouni, Belaïd. (2012). Ranking units in DEA based on efficiency intervals and decision-maker's preferences. *International Transactions in Operational Research, 19*(4), 567-579. doi: 10.1111/j.1475-3995.2011.00834.x
13. Hatami-Marbini, Adel, Saati, Saber, & Tavana, Madjid. (2010). An ideal-seeking fuzzy data envelopment analysis framework. *Applied Soft Computing, 10*(4), 1062-1070. doi: https://doi.org/10.1016/j.asoc.2009.12.031
14. Jahanshahloo, G. R., & Afzalinejad, M. (2006). A ranking method based on a full-inefficient frontier. *Applied Mathematical Modelling, 30*(3), 248-260. doi: https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.023
15. Jahed, Rasul, Amirteimoori, Alireza, & Azizi, Hossein. (2015). Performance measurement of decision-making units under uncertainty conditions: An approach based on double frontier analysis. *Measurement, 69*, 264-279. doi: https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.03.014
16. Liu, Fuh-hwa Franklin, & Chen, Cheng-Li. (2009). The worst-practice DEA model with slack-based measurement. *Computers & Industrial Engineering, 57*(2), 496-505. doi: https://doi.org/10.1016/j.cie.2007.12.021
17. Mirhedayatian, Seyed Mostafa, Vahdat, Seyed Ebrahim, Jafarian Jelodar, Mostafa, & Farzipoor Saen, Reza. (2013). Welding process selection for repairing nodular cast iron engine block by integrated fuzzy data envelopment analysis and TOPSIS approaches. *Materials & Design, 43*, 272-282. doi: https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.07.010
18. Serrano-Cinca, Carlos, MarMoliero, Cecillo, & Chaparro, Fernando. (2004). Spanish savings banks: a view on intangibles. *Knowledge Management Research & Practice, 2*(2), 103-117. doi: 10.1057/palgrave.kmrp.8500025
19. Wang, Ying-Ming, & Chin, Kwai-Sang. (2009). A new approach for the selection of advanced manufacturing technologies: DEA with double frontiers. *International Journal of Production Research, 47*(23), 6663-6679. doi: 10.1080/00207540802314845
20. Wang, Ying-Ming, & Chin, Kwai-Sang. (2011). Fuzzy data envelopment analysis: A fuzzy expected value approach. *Expert Systems with Applications, 38*(9), 11678-11685. doi: https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.03.049
21. Wang, Ying-Ming, Chin, Kwai-Sang, & Yang, Jian-Bo. (2007). Measuring the performances of decision-making units using geometric average efficiency. *Journal of the Operational Research Society, 58*(7), 929-937. doi: 10.1057/palgrave.jors.2602205
22. Wang, Ying-Ming, & Lan, Yi-Xin. (2011). Measuring Malmquist productivity index: A new approach based on double frontiers data envelopment analysis. *Mathematical and Computer Modelling, 54*(11), 2760-2771. doi: https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.06.064
23. Wang, Ying-Ming, & Lan, Yi-Xin. (2013). Estimating most productive scale size with double frontiers data envelopment analysis. *Economic Modelling, 33*, 182-186. doi: https://doi.org/10.1016/j.econmod.2013.04.021
24. Wang, Ying-Ming, & Luo, Ying. (2006). DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units. *Applied Mathematics and Computation, 173*(2), 902-915. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.04.023
25. Wang, Ying-Ming, & Yang, Jian-Bo. (2007). Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 198*(1), 253-267. doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.12.025

26. Wu, Desheng. (2006). A note on DEA efficiency assessment using ideal point: An improvement of Wang and Luo’s model. *Applied Mathematics and Computation*, *183*(2), 819-830. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.06.030

27. Xu, Ji Heng, Li, Ling, Liu, Jian Yong, Fu, Cheng Qun, & Zheng, Ji Lin. (2011). Imprecise DEA Model Based on TOPSIS. *Applied Mechanics and Materials*, *63-64*, 723-727. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.63-64.723

Evaluating the Performances of Decision-Making Units Based on the Optimistic and Pessimistic Points of View

Hossein Azizi (Corresponding author)
E-mail:azizhossein@gmail.com
Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran
Maziar Salahi
Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Guilan, Iran

Abstract

Data envelopment analysis (DEA) is a methodology for assessing the performances of a group of decision making units (DMUs) that utilize multiple inputs to produce multiple outputs. It measures the performances of the DMUs by maximizing the efficiency of every DMU, respectively, subject to the constraints that none of the efficiencies of the DMUs can be less than one. The efficiencies measured in this way are referred to as optimistic efficiencies or the best relative efficiencies. The way to measure the optimistic efficiencies of the DMUs is referred to as self-evaluation. If a DMU is self-evaluated to have an efficiency score of one, then it is said to be DEA efficient; otherwise, the DMU is said to be non-DEA efficient. There is a comparable approach which uses the concept of inefficiency frontier for determining the worst relative efficiency score that can be assigned to each DMU. DMUs on the inefficiency frontier are specified as DEA-inefficient, and those that do not lie on the inefficient frontier, are declared to be DEA-non-inefficient. In this paper, we argue that both relative efficiencies should be considered simultaneously, and any approach that considers only one of them will be biased. For measuring the overall performance of the DMUs, we propose to integrate both efficiencies in the form of an interval, and we call the proposed DEA models for efficiency measurement the bounded DEA models. In this way, the efficiency interval provides the decision maker with all the possible values of efficiency, which reflect various perspectives. Two numerical examples are presented to illustrate the application of the proposed DEA models.

Keywords: Data envelopment analysis; Optimistic and pessimistic efficiencies; Efficiency Interval; Bounded DEA models