دوره دهم، شماره اول، بهار و تابستان ۱۳۹۶

مجله فناوری اطلاعات در طراحی مهندسی
Information Technology in Engineering Design
http://ited.sinaweb.net

# تحلیل بهینه اجتماعی در بازی‌های بیزی با سه بازیکن

**امیررضا مهدوی شهری*(۱) گلاره ویسی (۲) محبوبه هوشمند (۳)**

**(۱) گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران***

**(۲) گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران**

**(۳) گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران**

## چکیده

در سالیان گذشته شاهد رشد قابل توجه تحقیقات در زمینه کاربردهای نظریه بازی‌ها در علوم مختلف و توسعه انواع مدل‌های بازی بوده‌ایم. بازی‌ها بر حسب تعداد شرکت کنندگان در هر بازی به دسته‌های مختلفی تقسیم می‌شوند. به تازگی، موضوع بازی‌ها با اطلاعات ناقص تبدیل به یکی از موضوعات جذاب در حوزه نظریه بازی‌ها شده است. در این نوع از بازی‌ها تعدادی از بازیکنان از منفعت و یا سود بازیکنان دیگر اطلاع دقیقی ندارند و با اطلاعات خود سعی در حل بازی دارند. بهینه اجتماعی یک بهبود از بهینه پارتو می‌باشد که مجموع سود همه بازیکنان مقدار بیشینه خود را داراست. در مطالعات قبلی، محاسبه بهینه اجتماعی برای بازی‌های بیزی برای دو بازیکن ارائه شده است. در این مقاله، این مفهوم برای سه بازیکن توسعه داده است. بازی ارائه و تحلیل شده و بهینه اجتماعی برحسب استراتژی‌های مختلط بازی تحلیل و با بازی‌های با دو بازیکن مقایسه شده‌است.

**واژه‌های کلیدی:** نظریه بازی‌ها، بازی با اطلاعات ناقص، بازی‌های بیزی، بهینه اجتماعی

* عهده دار مکاتبات

امیررضا مهدوی شهری

**نشانی:** گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

**تلفن:** ۰۹۳۵۷۲۶۰۷۶۰ **پست الکترونیکی:** amirrezamahdavi-sh@mshdiau.ac.ir

## ۱- مقدمه

نظریه بازی‌ها بخشی از ریاضیات به حساب می‌آید که در علم کامپیوتر و شاخه‌های مرتبط محبوبیت فراوانی پیدا کرده است و رفتار راهبردی را بین عوامل عقلانی بررسی می‌کند. رفتار راهبردی، زمانی آشکار می‌شود که منفعت هر عامل شرکت‌کننده در بازی، علاوه بر خود به منفعت عامل‌های دیگر نیز وابسته باشد. نمونه- های متنوعی از چنین رفتارهایی را می‌توانیم در محیط اطراف شاهد باشیم که از جمله آن‌ها می‌توان به مناقشه‌های نفتی، بازی ترسوها و رقابت استعمارگران برای غارت کشورهای تحت‌سلطه را نام برد. نظریه بازی‌ها در علوم مختلف کاربردهای مخصوص به خود را دارد که به عنوان نمونه می‌توان به علم مدیریت اشاره کرد که بسیاری از مفاهیم درون وبیرون سازمانی را می‌توان با این نظریه مدل کرد و یا در شاخه‌های کامپیوتر از جمله شبکه عصبی، فازی، داده کاوی و یا محاسبات‌کوانتومی کاربرد وسیعی دارد. در واقع معنی اصلی نظریه بازی‌ها همان تعامل‌ها و ارتباط‌های بین دو یا چند نفر می‌باشد که ناشی از ارتباط‌های متقابل بین طرفین حاضر است. محیطی که در آن تعامل و چالش‌های مختلف بین افراد برقرار می- باشد را محیط به اصطلاح استراتژیک می‌نامیم. انواع مختلف بازی‌ها هر کدام نشانگر مفهومی خاص در تعامل افراد با همدیگر با رویکردهای متنوع می‌باشد. نظریه بازی‌ها در مدل کردن بسیاری از موضوعات علمی موفق ظاهر شده است. بازی‌ها به انواع مختلفی تقسیم می‌شوند که از آن جمله می‌توان به بازی‌های همکارانه و غیر همکارانه بازی‌های مجموع صفر، بازی‌های متقارن و نامتقارن و بازی‌ها با اطلاعات کامل و ناقص اشاره کرد که در ادامه به شرح هر یک می‌پردازیم [۱-۳].

**الف: بازی‌های مجموع صفر و مجموع غیر صفر**

بازی مجموع صفر، یک بازی دونفره می‌باشد که در آن هر رویکردی که برای یکی از عامل‌ها سود باشد برای عامل دیگر ضرر به حساب می‌آید، یا می‌توان این‌گونه در نظر گرفت که در فرایند بازی ارزش بازی بدون تغییر است، پس ماهیت این بازی براساس برد و باخت است، ولی در بازی‌های مجموع غیر صفر سود یک بازیکن از زیان بازیکن دیگر به‌دست نمی‌آید [٤].

**ب: بازی‌های متقارن**

بازی‌های متقارن بازی‌هایی هستند که سود یک بازیکن مستقل از تصمیم‌های اتخاذ شده توسط دیگر بازیکنان است یعنی استراتژی هر بازیکن بدون در نظر گرفتن سود به دست آمده از حرکات دیگر بازیکنان بتواند تغییر کند، از جمله بازی‌های متقارن می‌توان به بازی معمای زندانی[۱] و یا بازی نبرد جنسیتی[۲] (با فرض جابه جایی ستون‌ها) اشاره کرد [۵].

**ج: بازی‌های ایستا و پویا**

بازی‌های پویا به بازی‌هایی اطلاق می‌شود که ابتدا یکی از بازیکنان حرکات خود را انجام می‌دهد و پس از آن بازیکن دوم با فرض آگاهی داشتن از حرکت بازیکن اول، حرکت مورد نظر خود را انجام خواهد داد ولی اگر هر دو بازیکن بدون اطلاع از عمل انتخاب شده توسط طرف مقابل حرکات خود را انجام دهند بازی از نوع ایستا می‌باشد [٦].

**د: با آگاهی کامل و بدون آگاهی کامل**

بازی‌های با آگاهی کامل، بازی‌هایی هستند که تمامی بازیکنان می‌توانند در هر لحظه، تمام ترکیب بازی را در مقابل خود مشاهده کنند، یعنی از تصمیم دیگر بازیکنان اطلاع دارند. در بازی‌های بدون آگاهی کامل یا به اصطلاح بازی‌ها با اطلاعات ناقص، ظاهر و ترکیب کل بازی برای بازیکنان پوشیده است، مانند بازی ورق. نظریه بازی این مفهوم را در طبقه بازی‌های بیزی پوشش می‌دهد. به بیان دیگر بازی با اطلاعات ناقص بازی بیزی نامیده می‌شود که موضوع اصلی کار ما در این مقاله است. برای تعریف فضای بازی، ابتدا به چند تعریف نیاز داریم:

۱. بازیکنان: هر کدام از طرف‌های بازی که برای هر کدام دو یا بیش- تر رویکرد، راهبرد، یا استراتژی تعریف

[1] Prisoner's Dilemma
[2] Battle of the sexes

می‌شود بازیکنان بازی می‌باشند.

۲. راهبرد: مجموعه‌ای از حرکت‌هایی است که هر بازیکن باید در قدم‌های مختلف بازی انتخاب کند [۷-۱۲].

۳. ترتیب بازی: در هر مرحله کدام بازیکن حرکت خواهد کرد.

٤. ساختار اطلاعاتی بازی: بیانگر این است که در هر زمان از بازی هر بازیکن می‌تواند چه اطلاعاتی از حرکات دیگر بازیکنان داشته باشد و براساس آن چه تصمیمی را اتخاذ کند.

۵. خروجی‌های و سود حاصل از بازی: وقتی بازی در هر مرحله تمام می‌شود چه نتایجی و با چه میزان سودی حاصل می‌شود.

## ۲- کارهای مرتبط

در سالیان اخیر روش‌های احتمالاتی به طور گسترده به انواع مختلف بازی‌ها اضافه شده‌اند، ترکیب این نظریه با موضوعات مختلف چالش جدیدی را پیش‌روی محققان این حوزه گذاشته است کمااینکه می‌بینیم مدل‌سازی و ترکیب مباحث محاسبات کوانتومی و مباحث نظریه بازی‌ها بسیار پر کاربرد شده است [۱۳-۱۷]. مفهوم بهینه پارتو بیان می‌کند که هر راهبرد اختصاص یافته نمی‌تواند به ضرر همه افراد جامعه باشد و حداقل وضعیت بعضی افراد بهبود یافته و وضعیت بعضی دیگر کاهش می‌یابد [۱۸-۱۹]. پس به عبارت دیگر می‌توان بیان کرد بهینه پارتو تخصیصی به حساب می- آید که نمی‌توان با تخصیص مجدد و بهم زدن تخصیص قبلی مطلوبیت فرد یا افرادی را افزایش داد بدون آنکه از مطلوبیت فرد یا افراد دیگری کم شود. یک حالت خاص‌تر از بهینه پارتو بهینه اجتماعی می‌باشد [۲۰]. در حقیقت در بهینه اجتماعی مجموع سود بازیکنان حداکثر می‌شود. این یک تعریف از بهینه اجتماعی می‌باشد ولی به حداکثر رساندن مجموع سود بازیکنان ممکن است به رضایت تمام بازیکنان شرکت‌کننده در بازی منجر نشود. در واقع می‌توان گفت خروجی بهینه اجتماعی همیشه بهینه پارتو خواهد بود [۲۰]. به دلیل انعطاف‌پذیری مدل بازی‌های بیزی تحقیقات زیادی پیرامون این حوزه صورت گرفته‌است. در بازی‌هلی بیزی برای هر بازیکن علاوه بر استراتژی مورد نظر حالت مربوطه را تعریف می‌کنیم، تا هر حالت مجموعه فعالیت‌های متمایزی داشته باشد. بازی‌های بیزی به شکل‌های مختلف و برای کاربردهای متفاوت بسط داده‌شده‌اند و علت آن توصیف کیفی خوب این بازی‌ها از روند اجرای کار یا مدل می‌باشد. در این مقاله ابتدا به بررسی ساختار این بازی‌ها می‌پردازیم و بعد با توجه به مدل بازی تعریف شده به روند بررسی آن برای رسیدن به بهینه مطلوب خواهیم پرداخت. در [۲۰]بهینه اجتماعی برای یک بازی بیزی برای دو بازیکن، هر یک با دو استراتژی محاسبه شده است. در بخش بعد، این بازی برای سه بازیکن توسعه داده می‌شود.

## ۳- مدل بازی ارائه‌شده:

در یک بازی بیزی بازیکنان اطلاعات کاملی درخصوص سود همدیگر ندارند [۲۲،۲۱]. تابع سود هر بازیکن براساس مقادیر سود آن تعیین می‌شود. در این قسمت ساختار پیشنهادی مبتنی بر تئوری بازی‌هایی با اطلاعات ناقص مطرح می‌شود. در بازی‌های بیزی بازیکنان رویکرد متفاوتی نسبت به بازی‌های با اطلاعات کامل دارند. در واقع بازی‌هایی با اطاعات ناقص به این معنی است که حداقل یکی از بازیکن‌ها در خصوص سود بازیکن دیگری اطلاعاتی نداشته باشد. به طور کلی ساختار یک بازی بیزی شامل مجموعه‌ای از بازیکنان، حالت‌ها، استراتژی‌ها و سود حاصل از حرکت‌های مختلف می‌باشد، هر بازیکن مجموعه‌ای از فعالیت‌ها را داراست. بازی مورد نظر ما در اینجا شامل ٦ نوع حالت مختلف و هم چنین ۸ تا جعبه جداگانه است که محتوی هر جعبه سودها و استراتژی- های هر سه بازیکن را نشان می‌دهد. اسم بازیکن‌های بازی در اینجا آلیس، باب و چارلی است که هر کدام دو استراتژی دارند، و دو نوع حالت مختلف برایشان منظور می‌گردد که به ترتیب با حالت ۱ و حالت ۲

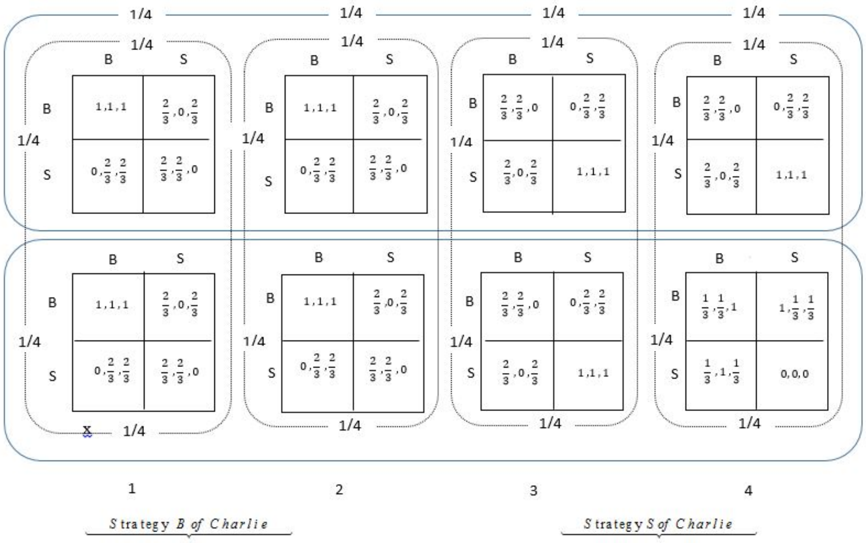
قابل تفکیک هستند. همانطور که در شکل ۱ مشخص شده است برای آلیس حالت ۱ باب و چارلی هر دو حالت ۱ و ۲ این حالت را با احتمال ۱/٤ مشاهده می‌کنند. برای هر کدام از جعبه- های جدول به طور متناظر می‌توانیم یک ماتریس را تعریف کنیم که این ماتریس‌ها تعریف شده‌اند. ستون‌های ۱ و ۲ و ۳ و ٤ به ترتیب (باب حالت ۱ و چارلی حالت ۲)، (باب حالت ۲ و چارلی حالت ۱)، (باب حالت ۱ و چارلی حالت ۱) و (باب حالت ۲ و چارلی حالت ۲) تعریف شده‌اند. هر یک از ستون‌ها به صورت قابل تفکیک برای دو حالت متمایز در نظر گرفته می‌شود، پس هر حالت نسبت به حالت‌های دیگر هم‌پوشانی دارد. برای هر بازیکن استراتژی $B$ و S را تعریف می‌کنیم. برای مقادیر سود بازی زمانی که سه بازیکن یک استراتژی را انتخاب کنند هر کدام به میزان یک سود را از آن خود می‌کنند ولی زمانی که استراتژی یکی متفاوت است میزان سود به اندازه صفر برای بازیکن استراتژی متفاوت و ۲/۳ برای دو حالت دیگر در نظرگرفته می‌شود. چون هر یک از حالات ۱ تا ٦ در مجموع شامل چهار جعبه است پس هر کدام از جعبه‌ها به میزان ۱/٤ سهم می‌برند که در مجموع مقدار هر حالت برابر یک می‌گردد. ماتریس سود به صورت یک آرایه سه عنصری است که عنصر اول برای آلیس و عنصر دوم و سوم به‌ترتیب برای باب و چارلی می‌باشد. محتوای هر جعبه شامل چهار ماتریس سود است. در هر مارتریس سود سه عنصری، فقط یک حالت از هر بازیکن می‌تواند قرار گیرد. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است دو ستون سمت چپ هر کدام یک حالت متمایز از بازیکن دوم و یک حالت متمایز از بازیکن سوم را نشان می‌دهد و این روال برای دو ستون سمت راست شکل ۱ نیز برقرار است.

### ۳-۱- استراتژی مختلط:

در اینجا نسخه استراتژی مختلط بازی معرفی شده است که شامل استراتژی‌های $S$ و $B$ برای تمام حالت‌های متمایز بازیکنان است و احتمالات برای هر حالت به این صورت تعریف می‌شود: $p,q,p',q',p'',q''$ که به ترتیب برای آلیس حالت یک و دو، باب حالت یک و دو و چارلی حالت یک و دو است. تمام ترکیب‌های مختلف برای هر حالت محاسبه می‌شود مثلاً برای آلیس حالت دو چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم: (B,B,B), (B,B,S), (B,S,B), (B,S,S) که این چهار حالت ممکن برای مجموعه استراتژی‌ها یا همان حرکات آلیس حالت دو است. هر بازیکن مجموعه‌ای از فعالیت‌ها را دارا می‌باشد. بازی مورد نظر ما در اینجا شامل ٦ نوع حالت مختلف و هم چنین ٦٤ حالت از ترکیبات احتمالاتی جداگانه است. سپس ترکیبات مختلف این احتمالات را با$\epsilon_1 - \epsilon_{64}$ مشخص می‌کنیم، که در مجموع هر هشت حالت از این ترکیبات در یک دسته قرار می‌گیرد و مجموع آن دسته یک می‌گردد. این مقادیر را در ماتریس اصلی جایگذاری می‌کنیم و خروجی سود هر یک از حالت‌های بازیکنان را به دست آوریم. هر یک از این خروجی‌ها یک تابع می‌باشد که دارای مقدار بیشینه و کمینه می‌باشد ما در اینجا ٦ تابع داریم که برای به دست آوردن بهینه اجتماعی بایستی تابع خروجی مجموع تمام این حالت‌ها بیشینه شود. برای بیشینه کردن این مقدار نیاز است تا از معادله حاصل نسبت به تمام متغیرهای احتمالاتی مشتق گرفته شود و مقدار تابع به ازای مشتق نهایی محاسبه شود. این مقدار بین یک کران بالا و یک کران پایین کراندار است که بیش‌ترین و کم‌ترین این نقاط به عنوان نقاط مرزی تابع مورد نظر ما تعریف می‌شود. جواب بهینه اجتماعی مقدار حاصل از قراردادن نقاط اکسترمم در تابع اصلی است. پس از تعریف بهینه اجتماعی بایستی این تابع بیشینه شود برای اینکه بتوانیم مقدار بیشینه این معادله را به دست آوریم کافی است از این معادله نسبت به متغیرهای احتمالاتی مشتق جزیی بگیریم و مقادیری که به ازای آن‌ها مشتتق صفر است را به دست آوریم. مقدار نهایی این تابع پس از جایگذاری به این صورت به دست می‌آید.

$$p = q = p' = q' = p'' = q'' = \frac{1}{2};$$
$$\Pi_{Sum}(p,q;p',q';p'',q'') = 3.375$$

در نقاط مرزی مقدار بیشینه برابر ۵,۲۵ و مقدار کمینه برابر ۲,۷۵ می‌گردد، سایر مقادیر نیز براساس اعداد بین ۱ تا ٦٤ در جدول ۱ محاسبه شده است، هم‌چنین مقدار غیرمرزی بهینه اجتماعی ۳,۳۷۵ به دست می‌آید.




شکل ۱. بازی بیزی توسعه یافته با اطلاعات ناقص

در این‌جا روابط به کار رفته برای رسیدن به بهینه اجتماعی آورده شده است. ابتدا سود هر بازیکن به صورت جداگانه حساب شده است. برای هر بازیکن ماتریسی از مجموع احتمالات مختلف در نظر گرفته شده است و خروجی سود هر حالت برای هر بازیکن یک عبارت از مجموع احتمالات مختلف را نشان می‌دهد.

(۱)

$$\Pi_{A_1}(p,q,p',q',p'',q'')=\frac{1}{4}\Big(\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p'p''\\p'(1-p'')\\(1-p')*p''\\(1-p')*(1-p'')\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p'q''\\p'(1-q'')\\(1-p')*q''\\(1-p')*(1-q'')\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q'p''\\q'(1-p'')\\(1-q')*p''\\(1-q')*(1-p'')\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q'q''\\q'(1-q'')\\(1-q')*q''\\(1-q')*(1-q'')\end{bmatrix}\Big)$$

(۲)

$$\Pi_{A_2}(p,q,p',q',p'',q'')=\frac{1}{4}\Big(\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p'p''\\p'(1-p'')\\(1-p')*p''\\(1-p')*(1-p'')\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p'q''\\p'(1-q'')\\(1-p')*q''\\(1-p')*(1-q'')\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q'p''\\q'(1-p'')\\(1-q')*p''\\(1-q')*(1-p'')\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&1\\1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q'q''\\q'(1-q'')\\(1-q')*q''\\(1-q')*(1-q'')\end{bmatrix}\Big)$$

(۳)

$$\Pi_{B_1}(p,q,p',q',p'',q'')=\frac{1}{4}\Big(\begin{bmatrix}p'\\1-p'\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}pp''\\p(1-p'')\\(1-p)*p''\\(1-p)*(1-p'')\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p'\\1-p'\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}pq''\\p(1-q'')\\(1-p)*q''\\(1-p)*(1-q'')\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} p' \\ 1-p' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qp'' \\ q(1-p'') \\ (1-q)*\ p'' \\ (1-q)*\ (1-p'') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p' \\ 1-p' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qq'' \\ q(1-q'') \\ (1-q)*\ q'' \\ (1-q)*\ (1-q'') \end{bmatrix})$$

(۴)

$$\Pi_{B_1}(p,q,p',q',p'',q'') = \frac{1}{4}(\begin{bmatrix} p' \\ 1-p' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3}\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pp'' \\ p(1-p'') \\ (1-p)*\ p'' \\ (1-p)*\ (1-p'') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p' \\ 1-p' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pq'' \\ p(1-q'') \\ (1-p)*\ q'' \\ (1-p)*\ (1-q'') \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} p' \\ 1-p' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qp'' \\ q(1-p'') \\ (1-q)*\ p'' \\ (1-q)*\ (1-p'') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p' \\ 1-p' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qq'' \\ q(1-q'') \\ (1-q)*\ q'' \\ (1-q)*\ (1-q'') \end{bmatrix})$$

(۵)

$$\Pi_{B_2}(p,q,p',q',p'',q'') = \frac{1}{4}(\begin{bmatrix} q' \\ 1-q' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3}\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pp'' \\ p(1-p'') \\ (1-p)*\ p'' \\ (1-p)*\ (1-p'') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q' \\ 1-q' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pq'' \\ p(1-q'') \\ (1-p)*\ q'' \\ (1-p)*\ (1-q'') \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} q' \\ 1-q' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qp'' \\ q(1-p'') \\ (1-q)*\ p'' \\ (1-q)*\ (1-p'') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q' \\ 1-q' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qq'' \\ q(1-q'') \\ (1-q)*\ q'' \\ (1-q)*\ (1-q'') \end{bmatrix})$$

(۶)

$$\Pi_{C_1}(p,q,p',q',p'',q'') = \frac{1}{4}(\begin{bmatrix} p'' \\ 1-p'' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3}\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pp' \\ p(1-p') \\ (1-p)*\ p' \\ (1-p)*\ (1-p') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p'' \\ 1-p'' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pq' \\ p(1-q') \\ (1-p)*\ q' \\ (1-p)*\ (1-q') \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} p'' \\ 1-p'' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qp' \\ q(1-p') \\ (1-q)*\ p' \\ (1-q)*\ (1-p') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p'' \\ 1-p'' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qq' \\ q(1-q') \\ (1-q)*\ q' \\ (1-q)*\ (1-q') \end{bmatrix})$$

(۷)

$pp'p'' = \epsilon_1, pp'(1-p'') = \epsilon_2\ , p(1-q')p'' = \epsilon_3\ , p(1-p')(1-p'') = \epsilon_4\ ,$

$(1-p)p'p'' = \epsilon_5, (1-\ p)p'(1-p'') = \epsilon_6, (1-\ p)(1-p')p'' = \epsilon_7\ , (1-\ p)(1-p')(1-p'') = \epsilon_8\ ,$

$pp'q'' = \epsilon_9, pp'(1-q'') = \epsilon_{10}\ , p(1-p')q'' = \epsilon_{11}\ , p(1-p')(1-q'') = \epsilon_{12}\ ,$

$(1-p)p'q'' = \epsilon_{13}, (1-\ p)p'(1-q'') = \epsilon_{14}, (1-\ p)\ (1-p')q'' = \epsilon_{15}\ , (1-\ p)(1-p')(1-q'') = \epsilon_{16},$

$pq'p'' = \epsilon_{17}, pq'(1-p'') = \epsilon_{18}\ , p(1-q')p'' = \epsilon_{19}\ , p(1-q')(1-p'') = \epsilon_{20}\ ,$

$(1-p)q'p'' = \epsilon_{21}, (1-\ p)q'(1-p'') = \epsilon_{22}, (1-\ p)(1-q')p'' = \epsilon_{23}\ , (1-\ p)(1-q')(1-p'') = \epsilon_{24}\ ,$

$pq'q'' = \epsilon_{25}, pq'(1-q'') = \epsilon_{26}\ , p(1-q')q'' = \epsilon_{27}\ , p(1-q')(1-q'') = \epsilon_{28}\ ,$

(۸)

$(1-p)q'q'' = \epsilon_{29}, (1-\ p)q'(1-q'') = \epsilon_{30}, (1-\ p)(1-q')q'' = \epsilon_{31}\ , (1-\ p)(1-q')(1-q'') = \epsilon_{32}\ ,$

$qp'p'' = \epsilon_{33}, qp'(1-p'') = \epsilon_{34}\ , q(1-p')p'' = \epsilon_{35}\ , q(1-p')(1-p'') = \epsilon_{36}\ ,$

$(1-q)p'p'' = \epsilon_{37}, (1-\ q)p'(1-p'') = \epsilon_{38}, (1-\ q)(1-p')p'' = \epsilon_{39}\ , (1-\ q)(1-p')(1-p'') = \epsilon_{40}\ ,$

$qp'q'' = \epsilon_{41}, qp'(1-q'') = \epsilon_{42}\ , q(1-p')q'' = \epsilon_{43}\ , q(1-p')(1-q'') = \epsilon_{44}\ ,$

$$(1-q)p'q''=\epsilon_{45},(1-q)p'(1-q'')=\epsilon_{46},(1-q)(1-p')q''=\epsilon_{47},(1-q)(1-p')(1-q'')=\epsilon_{48},$$
$$qq'p''=\epsilon_{49},qq'(1-p'')=\epsilon_{50},q(1-p')p''=\epsilon_{51},q(1-q')(1-p'')=\epsilon_{52},$$
$$(1-q)p'p''=\epsilon_{53},(1-q)p'(1-p'')=\epsilon_{54},(1-q)(1-p')p''=\epsilon_{55},(1-q)(1-p')(1-p'')=\epsilon_{56},$$
$$qq'q''=\epsilon_{57},qq'(1-q'')=\epsilon_{58},q(1-q')q''=\epsilon_{59},q(1-q')(1-q'')=\epsilon_{60},$$
$$(1-q)q'q''=\epsilon_{61},(1-q)q'(1-q'')=\epsilon_{62},(1-q)(1-q')q''=\epsilon_{63},(1-q)(1-q')(1-q'')=\epsilon_{64}$$

(۹)

$$\sum_{i=1}^{8}\epsilon_i=1\sum_{i=9}^{16}\epsilon_i=1,\sum_{i=17}^{24}\epsilon_i=1,\sum_{i=25}^{32}\epsilon_i=1,\sum_{i=33}^{40}\epsilon_i=1,\sum_{i=41}^{48}\epsilon_i=1,\sum_{i=49}^{56}\epsilon_i=1,\sum_{i=57}^{64}\epsilon_i=1,$$

هر یک از ترکیب‌های سه‌تایی با یک حالت احتمالاتی متمایز در نظر گرفته شده است و این مقادیر از ۱ تا ٦٤ جایگزین مقادیر احتمالاتی ماتریس‌های سود بازیکنان می‌شود و سود حاصل از مجموع تمام این حالت‌ها در یک تابع شش متغیره آورده شده است.

(۱۰)

$$\begin{aligned}\Pi_{A_1}(p,q,p',q',p'',q'')\\ &=\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_1+(0)\epsilon_5+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_2+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_6+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_3+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_7+(0)\epsilon_4+(1)\epsilon_8\right]\\ &+\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_9+(0)\epsilon_{13}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{10}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{14}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{11}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{15}+(0)\epsilon_{12}+(1)\epsilon_{16}\right]\\ &+\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_{17}+(0)\epsilon_{21}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{18}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{22}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{19}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{23}+(0)\epsilon_{20}+(1)\epsilon_{24}\right]\\ &+\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_{25}+(0)\epsilon_{29}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{26}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{30}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{27}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{31}+(0)\epsilon_{28}+(1)\epsilon_{32}\right],\end{aligned}$$

(۱۱)

$\Pi_{A_2}(p,q,p',q',p'',q'')=\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_{33}+(0)\epsilon_{37}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{34}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{38}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{35}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{39}+(0)\epsilon_{36}+(1)\epsilon_{40}\right]+$
$\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_{41}+(0)\epsilon_{45}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{42}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{46}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{43}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{47}+(0)\epsilon_{44}+(1)\epsilon_{48}\right]+\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_{49}+(0)\epsilon_{53}+\right.$
*23ϵ50+23ϵ54+23ϵ51+23ϵ55+0ϵ52+1ϵ56+140ϵ57+1ϵ61+13ϵ58+13ϵ62+13ϵ59+13ϵ63+1ϵ60+0ϵ64*
,

(۱۲)

$\Pi_{B_1}(p,q,p',q',p'',q'')=\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_1+(0)\epsilon_3+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_2+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_4+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_5+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_7+(0)\epsilon_6+(1)\epsilon_8\right]+$
$\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_9+(0)\epsilon_{11}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{10}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{12}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{13}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{15}+(0)\epsilon_{14}+(1)\epsilon_{16}\right]+\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_{33}+(0)\epsilon_{35}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{34}+\right.$
*23ϵ36+23ϵ37+23ϵ39+0ϵ38+1ϵ40+140ϵ41+1ϵ43+13ϵ42+13ϵ44+13ϵ45+13ϵ47+1ϵ46+0ϵ48,*

(۱۳)

$\Pi_{B_2}(p,q,p',q',p'',q'')=\frac{1}{4}\left[(1)\epsilon_{17}+(0)\epsilon_{19}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{18}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{20}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{21}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{23}+(0)\epsilon_{22}+(1)\epsilon_{24}\right]+$

$\frac{1}{4}\Big[(1)\epsilon_{25}+(0)\epsilon_{27}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{26}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{28}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{29}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{31}+(0)\epsilon_{30}+(1)\epsilon_{32}\Big]+\frac{1}{4}\Big[(1)\epsilon_{49}+(0)\epsilon_{51}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{50}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{52}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{53}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{55}+(0)\epsilon_{54}+(1)\epsilon_{56}\Big]+\frac{1}{4}\Big[(1)\epsilon_{57}+(0)\epsilon_{59}+\left(\frac{1}{3}\right)\epsilon_{58}+\left(\frac{1}{3}\right)\epsilon_{60}+\left(\frac{1}{3}\right)\epsilon_{61}+\left(\frac{1}{3}\right)\epsilon_{63}+(1)\epsilon_{62}+(0)\epsilon_{64}\Big],$

(۱۴)

$\Pi_{C_1}(p,q,p',q',p'',q'')=\frac{1}{4}\Big[(1)\epsilon_1+(0)\epsilon_2+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_3+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_4+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_5+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_6+(0)\epsilon_7+(1)\epsilon_8\Big]+\frac{1}{4}\Big[(1)\epsilon_{17}+(0)\epsilon_{18}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{19}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{20}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{21}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{22}+(0)\epsilon_{23}+(1)\epsilon_{24}\Big]+\frac{1}{4}\Big[(1)\epsilon_{33}+(0)\epsilon_{34}+$
$23\epsilon35+23\epsilon36+23\epsilon37+23\epsilon38+0\epsilon39+1\epsilon40+141\epsilon49+0\epsilon50+23\epsilon51+23\epsilon52+23\epsilon53+23\epsilon54+1\epsilon55+0\epsilon56$
,

(۱۵)

$\Pi_{C_2}(p,q,p',q',p'',q'')=\frac{1}{4}\Big[(1)\epsilon_9+(0)\epsilon_{10}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{11}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{12}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{13}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{14}+(0)\epsilon_{15}+(1)\epsilon_{16}\Big]+\frac{1}{4}\Big[(1)\epsilon_{25}+(0)\epsilon_{26}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{27}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{28}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{29}+\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon_{30}+(0)\epsilon_{31}+(1)\epsilon_{32}\Big]+\frac{1}{4}\Big[(1)\epsilon_{41}+(0)\epsilon_{42}+$
$23\epsilon43+23\epsilon44+23\epsilon45+23\epsilon46+0\epsilon47+1\epsilon48+140\epsilon57+1\epsilon58+13\epsilon59+13\epsilon60+13\epsilon61+13\epsilon62+1\epsilon63+0\epsilon64$
,

(۱۶)

$$\Pi_{Sum}(p,q;p',q';p'',q'')=\Pi_{A_1}(p,q;p',q';p'',q'')+\Pi_{A_2}(p,q;p',q';p'',q'')+\Pi_{B_1}(p,q;p',q';p'',q'')+\Pi_{B_2}(p,q;p',q';p'',q'')+\Pi_{C_1}(p,q;p',q';p'',q'')+\Pi_{C_2}(p,q;p',q';p'',q'')$$

(۱۷)

$$\begin{aligned}\Pi_{A_1}&(p,q;p',q';p'',q'')\\&=\frac{1}{4}\Big[4-\left(\frac{2}{3}\right)(p'+p''+q'+q'')-\left(\frac{1}{3}\right)(p'p''+p'q''+q'p''+q'q'')\\&+2(pp'+\mathrm{p}p''+pq'+pq'')-4p\Big]\end{aligned}$$

(۱۸)

$$\Pi_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{p},\mathrm{q};\mathrm{p}',\mathrm{q}';\mathrm{p}'',\mathrm{q}'')=\frac{1}{4}\Big[3-\left(\frac{2}{3}\right)(p'+p'')-\left(\frac{1}{3}\right)(p'p''+p'q''+q'p''-q'q'')-2(q-\mathrm{q}p''-qp')\Big]$$

(۱۹)

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{B}_1}&(\mathrm{p},\mathrm{q};\mathrm{p}',\mathrm{q}';\mathrm{p}'',\mathrm{q}'')\\&=\frac{1}{4}\Big[4-\left(\frac{2}{3}\right)(\mathrm{p}+p''+\mathrm{q}+q'')-\left(\frac{1}{3}\right)(pp''+pq''+qp''+qq'')\\&+2(p'p''+p'q''+p'p+p'q)-4p'\Big]\end{aligned}$$

(۲۰)

$$\Pi_{\mathrm{B}_2}(\mathrm{p},\mathrm{q};\mathrm{p}',\mathrm{q}';\mathrm{p}'',\mathrm{q}'')=\frac{1}{4}\Big[3-\left(\frac{2}{3}\right)(p+p'')-\left(\frac{1}{3}\right)(pp''+pq''+qp''-qq'')-2(q'-q'p''-q'p)\Big]$$

(۲۱)

$$\Pi_{C_1}(p,q;p',q';p'',q'') = \frac{1}{4}\Big[4-\left(\frac{2}{3}\right)(p+p'+q+q')-\left(\frac{1}{3}\right)(pp'++pq'+qp'+qq') + 2(p''p+p''p'+p''q+p''q')-4p''\Big]$$

(۲۲)

$$\Pi_{C_2}(p,q;p',q';p'',q'') = \frac{1}{4}\Big[3-\left(\frac{2}{3}\right)(p+p')-\left(\frac{1}{3}\right)(pp'+pq'+qp'-qq')-2(q''-q''p'-q''p)\Big]$$

(۲۳)

$$\Pi_{Sum}(p,q;p',q';p'',q'') = \frac{1}{4}\Big[21-\left(\frac{20}{3}\right)p'-\left(\frac{20}{3}\right)p''-\left(\frac{10}{3}\right)q'-\left(\frac{10}{3}\right)q''-\left(\frac{20}{3}\right)p-\left(\frac{10}{3}\right)q+\left(\frac{10}{3}\right)p'p''+\left(\frac{10}{3}\right)pq'' + \left(\frac{10}{3}\right)qp''+\left(\frac{10}{3}\right)pp''+\left(\frac{10}{3}\right)pq'+\left(\frac{10}{3}\right)qp'+\left(\frac{10}{3}\right)pp'+\left(\frac{10}{3}\right)p''q'+\left(\frac{10}{3}\right)p'q''\Big]$$

## ٤- مقایسه روش پیشنهادی با مدل مبتنی بر دو بازیکن:

در مقاله [۱۰] بازی با اطلاعات ناقص ارائه و معرفی شده‌است، بهینه اجتماعی بر حسب استراتژی‌های مختلط بازیکنان محاسبه شده‌است و جواب بهینه اجتماعی تحلیل شده‌است. ما این مدل را برای سه بازیکن توسعه دادیم و علاوه بر محاسبه بهینه اجتماعی که در حالت سه بازیکنه نسبت به دو بازیکنه بهبود داشته‌است، این بهینگی را در نقاط مرزی و غیر مرزی نیز به‌دست آورده و مورد تحلیل قرار دادیم. از آنجاییکه بهینه اجتماعی وابسته به تمام شرکت‌کنندگان در بازی بود انتظار می‌رفت این بهینه تحت تأثیر حالت بازیکنه سوم مورد تغییر قرار گیرد. بازیکن سوم نیز از اطلاعات بازیکن اول و دوم اطاعات کاملی نداشت. بازیکن سوم نیز از دو حالت مختلف شبیه بازیکن اول و دوم برخوردار است که در مجموع ٦٤ حالت مختلف قابل طرح است که مطابق با شکل ۱ مقدار بیشینه و کمینه آن محاسبه‌شده‌است. در شکل ۱، مدل بازی ارائه شده‌است و جدول ۱ نیز بیانگر ٦٤ ترکیب مختلف بین مجموعه احتمالات است. این اعداد برحسب ترتیب قرار گرفتن در فرمول بهینه اجتماعی به دست می‌آیند که همان طور که در جدول ۱ مشخص شده‌است بالاترین میزان این بهینه دو بار و برای دو نقطه به اصطلاح لبه‌ای به دست آمده‌است و مقادیر کمینه نیز به ازای چند ترکیب مختلف از این اعداد محاسبه شده‌است. قابل به ذکر است که مقدار بهینه اجتماعی غیر مرزی ممکن است به ازای مقادیر اعداد متفاوت منحصر به فرد نباشد که دراینجا این موضوع نشان داده شده است.

## ۵- نتیجه گیری:

در این مقاله ضمن معرفی انواع بازی‌ها بازیهای بیزین معرفی شده است و سپس به رفتار این گونه از بازی‌ها با تعداد سه نفر پرداخته شده‌است و با استفاده از آن ساختار بازی‌های بیزی پیاده‌سازی شده است. پس از آن مفهوم بهینه اجتماعی تعریف گردید، و برای رسیدن به مقدارهای مختلف این تابع ترکیب‌های مختلفی از اعداد در نظر گرفته شد. بهینه اجتماعی هم در نقاط مرزی و هم در نقاط غیر مرزی بررسی شده است و پس از بدست آوردن تمامی مقادیر بهینه اجتماعی غیر مرزی مشاهده شد که مقدار بهینه اجتماعی مرزی بین حد بالا و حد پایین یک مقدار کراندار است و حد بالا به صورت بیشترین میزان تابع در آن نقطه

و حد پایین به عنوان کمترین مقدار تابع در آن نقطه است، برای به دست آوردن بهینه غیر مرزی نسبت به تمام متغیرها با هدف بیشینه کردن تابع مشتق گرفته شده است. بهینه اجتماعی پس از جایگزینی نقاط اکسترمم در تابع نهایی به‌دست آمده است. این نقطه یکتا می‌باشد و نمی‌توان نقطه غیر مرزی دیگری را پیدا کرد که بهینه اجتماعی در آن نقطه بیش‌تر از مقدار فوق به‌دست آید. برای کارهای آینده می‌توان از آزمایش‌های کوانتومی برای به‌دست آوردن مقدار متمایز از این مقدار استفاده کرد.

جدول ۱. محاسبه بیش‌ترین و کم‌ترین مقداربهینه اجتماعی غیرمرزی

| $p$ | $q$ | $p'$ | $q'$ | $p''$ | $q''$ | $\Pi_{Sum}$ | $p$ | $q$ | $p'$ | $q'$ | $p''$ | $q''$ | $\Pi_{Sum}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5.25 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4.416667 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3.583333 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2.75 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2.75 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2.75 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4.416667 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3.583333 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3.583333 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2.75 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3.583333 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2.75 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3.583333 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2.75 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2.75 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2.75 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2.75 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2.75 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2.75 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2.75 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3.583333 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2.75 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4.416667 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4.416667 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2.75 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3.583333 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2.75 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3.583333 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2.75 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2.75 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2.75 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3.583333 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2.75 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2.75 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2.75 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3.583333 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3.583333 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2.75 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3.583333 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3.583333 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2.75 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3.583333 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3.583333 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3.583333 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3.583333 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3.583333 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 4.416667 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2.75 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2.75 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2.75 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3.583333 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3.583333 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4.416667 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3.583333 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5.25 |

## ٦- مراجع


[1] M. J. Osborne, *A Course in Game Theory*, vol. 29, no. 3. MIT press, 1995.
[2] R. J. Aumann, “Game theory,” in *Game Theory*, Springer, 1989, pp. 1–53.
[3] P. Morris, *Introduction to game theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
[4] Y. Suh and J. Vijg, “Maintaining genetic integrity in aging: a zero sum game,” *Antioxid. Redox Signal.*, vol. 8, no. 3–4, pp. 559–571, 2006.
[5] P. Duersch, J. Oechssler, and B. C. Schipper, “Pure strategy equilibria in symmetric two-player zero-sum games,” *Int. J. Game Theory*, vol. 41, no. 3, pp. 553–564, 2012.
[6] A. Penta, “Higher order uncertainty and information: Static and dynamic games,” *Econometrica*, vol. 80, no. 2, pp. 631–660, 2012.
[7] A. Iqbal, J. M. Chappell, Q. Li, C. E. M. Pearce, and D. Abbott, “A probabilistic approach to quantum Bayesian games of incomplete information,” *Quantum Inf. Process.*, vol. 13, no. 12, pp. 2783–2800, 2014.
[8] H. Liu and W. Xiong, “Dynamic consistency in incomplete information games under ambiguity,” *Int. J. Approx. Reason.*, vol. 76, pp. 63–79, 2016.
[9] A. Romano, C. O. Mosso, and U. Merlone, “The role of incomplete information and others’ choice in reducing traffic: a pilot study,” *Front. Psychol.*, vol. 7, 2016.
[10] M. Scalabrin, V. Vadori, A. V Guglielmi, and L. Badia, “A Zero-Sum Jamming Game with Incomplete Position Information in Wireless Scenarios,” in *European Wireless 2015; 21th European Wireless Conference; Proceedings of*, 2015, pp. 1–6.
[11] M. Egesdal, Z. Lai, and C.-L. Su, “Estimating dynamic discrete-choice games of incomplete information,” *Quant. Econom.*, vol. 6, no. 3, pp. 567–597, 2015.
[12] O. Malafeyev, G. Alferov, and M. Andreyeva, “Group strategy of robots in game-theoretic model of interception with incomplete information,” in *Mechanics-Seventh Polyakhov’s Reading, 2015 International Conference on*, 2015, pp. 1–3.
[13] J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou, and R. Han, “Experimental realization of quantum games on a quantum computer,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, no. 13, p. 137902, 2002.
[14] A. P. Flitney and D. Abbott, “Quantum games with decoherence,” *J. Phys. A. Math. Gen.*, vol. 38, no. 2, p. 449, 2004.
[15] T. Cheon and A. Iqbal, “Bayesian Nash equilibria and Bell inequalities,” *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 77, no. 2, p. 24801, 2008.
[16] A. O. Ahmed, S. A. Bleiler, and F. S. Khan, “Octonionization of three player, two strategy maximally entangled quantum games,” *Int. J. Quantum Inf.*, vol. 8, no. 03, pp. 411–434, 2010.
[17] M. Houshmand, M. Houshmand, and H. R. Mashhadi, “A Game Theoretic Approach to Study the Quantum Key Distribution BB84 Protocol,” *Int. J. Quantum Inf.*, vol. 9, no. 04, pp. 1133–1146, 2011.
[18] P. M. Pardalos, A. Migdalas, and L. Pitsoulis, *Pareto optimality, game theory and equilibria*, vol. 17. Springer Science & Business Media, 2008.
[19] V. I. Zhukovskiy and K. N. Kudryavtsev, “Pareto-optimal Nash equilibrium: Sufficient conditions and existence in mixed strategies,” *Autom. Remote Control*, vol. 77, no. 8, pp. 1500–1510, 2016.
[20] A. Iqbal, J. M. Chappell, and D. Abbott, “Social optimality in quantum Bayesian games,” *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 436, pp. 798–805, 2015.
[21] K. Binmore, *Playing for real: a text on game theory*. Oxford university press, 2007.
[22] N. Brunner and N. Linden, “Connection between Bell nonlocality and Bayesian game theory,” *Nat. Commun.*, vol. 4, 2013.