پژوهش در برنامه‌ریزی درسی
سال هجدهم، دوره دوم، شماره ۴۱ (پیاپی ۶۸)
بهار ۱۴۰۰، صفحات ۱۴۱-۱۲۴

بررسی درک دانش‌آموزان دورهٔ دوم ابتدایی شهر تهران از زیر ساختار جزء به‌کل مفهوم کسر بر اساس نظریهٔ APOS و SOLO، با استفاده از یک تکلیف غیرمعمول

مهدی ایزدی، ابراهیم ریحانی*
[1] دانشجوی دکتری رشته آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، ایران.
[2] دکتری رشته آموزش ریاضی، دانشیار و عضو هیئت‌علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.

چکیده
این پژوهش با هدف بررسی درک دانش‌آموزان دورهٔ دوم ابتدایی شهر تهران از مفهوم کسر (زیر ساختار جزء به کل) بر اساس دو نظریهٔ APOS و SOLO انجام شد. روش انجام این مطالعه، توصیفی – پیمایشی، جامعهٔ آماری آن، دانش‌آموزان دورهٔ دوم ابتدایی شهر تهران در سال تحصیلی ۱۳۹۸– ۱۳۹۷ و نمونهٔ آن، ۵۹۸ نفر از جامعهٔ آماری بود که با روش نمونه‌گیری تصادفی چندمرحله‌ای انتخاب شدند. برای جمع‌آوری داده‌ها، از آزمونی با یک تکلیف غیرمعمول استفاده شد. روایی محتوایی آزمون از نظر متخصصان آموزش ریاضی مورد تأیید قرار گرفت و پایایی ابزار پژوهش بر اساس ضریب آلفای کرونباخ، ۰/۷ به دست آمد. نتایج این مطالعه نشان داد که دانش‌آموزان، درک محدودی از مفهوم کسر (زیر ساختار جزء به کل) دارند و در خصوص این مفهوم، بدفهمی های مشترکی دارند. رایج‌ترین بدفهمی های به‌دست‌آمده در این مطالعه شامل ۱– عدم توجه به مساوی بودن قسمت‌ها؛ ۲– درک کسر به‌عنوان نسبت جزء‌به‌جزء و ۳– استفاده از تقسیم‌بندی تقریبی برای تعیین مقدار کسری دقیق، بود. تحلیل پاسخ‌ها بر اساس نظریه APOS مشخص کرد که دانش‌آموزان توانایی استفاده از این مفهوم را در مواجهه با تکالیف و موقعیت‌های غیرمعمول ندارند. در تحلیل پاسخ‌ها بر اساس مدل SOLO نیز مشخص شد بیش از ۶۰ درصد پاسخ‌ها، در سطح چند ساختاری بود. پیشنهاد این تحقیق، عدم تأکید بیش‌ازحد بر زیر ساختار جزء به کل، ارائه فرصت‌های برابر برای توسعهٔ سایر زیر ساختارها و تأکید بر یادگیری مفهومی رویه‌ها و الگوریتم‌های مرتبط با مفهوم کسر در محتواها و فرصت‌های آموزشی ارائه‌شده به دانش‌آموزان است.

واژه‌های کلیدی: تکلیف غیرمعمول، دانش‌آموزان دورهٔ دوم ابتدایی، زیر ساختار جزء به کل، مفهوم کسر، نظریهٔ APOS و SOLO.

*. **نویسندهٔ مسئول**: e_reyhani@yahoo.com

وصول: ۹۸/۰۵/۰۵ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۳۰

Research in Curriculum Planning
Vol 18. No 41 (continus 68)
spring 2021, Pages 124-141

Investigating the understanding of Tehran's second elementary school students of the fraction's part- whole subconstruct, based on APOS and SOLO theories with using an unusual task

Mehdi Izadi, Ebrahim Reyhani
[1] Mathematics Group, Basic Science Faculty, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.
[2] Mathematics Group, Basic Science Faculty, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

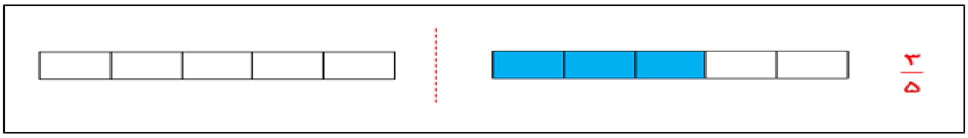
Abstract
The aim of this research was investigating understanding of Tehran's second elementary school students of the fraction concept (part-whole subconstruct) based on APOS and SOLO theories. This study's method was descriptive-survey method, its statistical population was Tehran's second elementary school students in the academic year 1397-1398 and its sample was 598 people of the statistical population that selected by multistage sampling method. A test with an unusual task used for collecting data. The content validity of the research tools were confirmed by experts and scholars of mathematics education, and the reliability of the research tools was obtained based on Cronbach's alpha of 0.7. Results of this study showed that students have a limited understanding of fraction's concept and they have common misconceptions. The most common misconceptions found include: (1) Disregarding the requirement of equal parts in part-whole subconstruct; 2- Understanding fraction in part-whole subconstruct as the part-to-part ratio & 3- Using approximate partitioning to determine the exact fraction of the specified part. Analyzing the responses based on the APOS theory also revealed students did not have ability to use this concept in dealing with unusual situations. In analyzing the responses based on the Solo model, more than 60% of the responses were in the multistructural level. The suggestions of this research are not to over-emphasize the part -whole subconstruct, creating equal opportunities for developing other subconstruct s of fraction and emphasizing on conceptual learning of procedures and algorithms relative to fraction concept in content and opportunities presented to students.

Keywords: APOS and SOLO theories, fraction concept, part-whole subconstruct second elementary school students, unusual task.

مقدمه

مفهوم کسر، یکی از انتزاعی‌ترین مفاهیم ریاضی دوره ابتدایی است که بنا بر دلایل مختلف ازجمله ۱) بودن به‌عنوان مبنایی برای درک مفاهیم مختلف ریاضی و توسعه درک جبری افراد و ۲) فراهم‌کنندهٔ زمینه‌ای برای رشد عقلانی و مواجههٔ مناسب افراد با مسائل زندگی واقعی، دارای اهمیت و کاربرد فراوان در ریاضی و زندگی روزمره است (Reyhani, Bakhshalizadeh & Dosti, 2014; Obersteiner, Dresler, Bieck & Moeller, 2019; Čadež & Kolar 2018; Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Rafiepour, Kazemi & Fadaee, 2019). با وجود چنین اهمیتی، نتایج مطالعات مختلف طی چند دهه اخیر، نشان‌دهندهٔ مشکلات و بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در یادگیری و کار با کسر، عدم توفیق در حل مشکلات دانش‌آموزان در کار با آن و فراگیر بودن این عدم توفیق در کشورها و فرهنگ‌های مختلف است (Obersteiner et al., 2019).

محققین مختلف، دلایل متعددی را برای مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری کسر بیان کردند. از نظر آنان، بخشی از مشکلات دانش‌آموزان در مواجهه با این مفهوم، مربوط به پیچیدگی ذاتی آن بر اساس ساختار چندلایه آن است. کی‌یرن (Kieren, 1976)، پنج زیر ساختار (subconstruct) ۱- جزء به‌کل (part-whole)؛ ۲- اندازه (measure)؛ ۳- خارج‌قسمت (quotient)؛ ۴- عملگر (operator) و ۵- نسبت (ratio) را برای کسر توصیف کرد. مفهوم کسر در هر یک از این زیر ساختارها دارای معنایی خاص است. زیر ساختار جزء به‌کل، به‌عنوان موقعیتی تعریف می شود که در آن، یک کمیت پیو سته یا مجموعه‌ای از اشیاء گسسته به قسمت‌های هم‌اندازه افراز (partition) می‌شوند. کسر در این زیر ساختار، بازنمایی کنندهٔ تعداد قسمت‌های مطلوب به تعداد کل قسمت‌ها در واحد افراز شده است (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). درک مفهوم کسر در این زیر ساختار، نیاز به شناسایی یک واحد (واحد سازی)، افراز واحد به قسمت‌های مساوی و در نظر گرفتن تعدادی از قسمت های افرازشده و ایده شمول (inclusion or embeddedness) توسط دانش‌آموزان دارد. ایده شمول به معنی در نظر گرفتن اجزاء به‌عنوان بخش‌هایی از کل است. دانش‌آموزانی که درکی از ایده شمول ندارند، تعداد قسمت‌های رنگ‌شده را برای صورت و مجموع تعداد قسمت‌های رنگ‌شده و تعداد کل قسمت‌های افرازشده را برای مخرج در نظر می‌گیرند (Charalambous et al., 2007; Doosti, 2013). به‌عنوان‌مثال چنین دانش‌آموزانی در شکل ۱، کسر مربوط به قسمت رنگ شده را $\frac{۳}{۸}$ بیان می‌کنند. شکل ۱، این زیر ساختار را به همراه پیش‌نیازهایش نشان می‌دهد:



شکل ۱. ارائه مثالی از زیر ساختار جزء به کل به کمک شکل

بر اساس مطالعات صورت گرفته، یکی دیگر از علل مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری و کار با این مفهوم، حاکم بودن رویکرد جزء به کل در آموزش آن است (Park, Güçler & McCrory, 2013; Lamon, 2001). تسلط این رویکرد در آموزش مفهوم کسر موجب می‌شود تا دانش‌آموزان درکی از کسرها به‌عنوان اعداد نداشته باشند و به جای اینکه کسر را به‌عنوان یک عدد مستقل درک کنند، به‌عنوان دو عدد مجزا از هم که مخرج آن، یک عدد حسابی و صورت آن به‌عنوان بخشی از مخرج است درک کنند (Park et al., 2013). چنین درکی از

کسرها موجب زمینه‌سازی برای عدم توانایی افراد در حل مسائل غیرمعمول در خصوص کسرها می‌شود (Pitkethly & Hunting, 1996; Tzur, 2019) و موجب مشکلات و بدفهمی‌های مختلفی در دانش‌آموزان ازجمله موارد زیر می‌شود:

۱- دشواری در تشخیص صورت به‌عنوان جزء و مخرج به‌عنوان کل و همچنین تعیین صورت به‌عنوان کل و مخرج به‌عنوان جزء؛ ۲- در نظر گرفتن قسمت‌های رنگ‌شده به‌عنوان صورت کسر و قسمت‌های رنگ نشده به‌عنوان مخرج کسر و بالعکس؛ ۳- عدم توانایی در برقراری اتصال بین بازنمایی‌های مختلف کسر؛ ۴- عدم توانایی جانمایی اعداد کسری بر روی محور اعداد به دلیل درک نکردن کسرها به‌عنوان عدد؛ ۵- مقایسه دو کسر با استفاده از راهبرد مقایسه صورت کسرها با هم و مقایسه مخرج آن‌ها با هم، به جای مقایسه اندازه هر کسر با کسر دیگر؛ ۶- انجام جمع و تفریق کسرها از طریق جمع و تفریق صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم (Hart, 1987; Davis, 1989; Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993; Erlwanger, 1973; Mack, 1990; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Reyhani et al., 2014; Doosti, 2013).

از نظر دیویس (Davis, 1989)، یکی دیگر از دلایل این مشکلات، طرح‌واره‌های اعداد حسابی (Whole number schemes) دانش‌آموزان است که موجب مداخله در یادگیری کسر توسط آن‌ها می‌شود. محققین از این مداخله به‌عنوان جانبداری اعداد طبیعی (NNB: Natural Number Bias) نام می‌برند (Obersteiner et al., 2019; Tzur, 2019).

با توجه به این مطالب و بر اساس نتایج مطالعات مختلف، مهم‌ترین دلایل مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری مفهوم کسر شامل ۱) پیچیدگی ذاتی این مفهوم به دلیل داشتن ساختاری چندلایه؛ ۲) تداخل دانش قبلی دانش‌آموزان در خصوص اعداد طبیعی (حسابی) با این مفهوم و تکیه دانش‌آموزان بر مفاهیم اعداد طبیعی در کار با کسرها؛ ۳) حاکم بودن رویکرد جزء به کل در فرایند آموزش مفهوم کسر؛ ۴) تأکید بیش‌از حد محتوای کتاب های درسی ریاضی بر زیرساختار جزء به کل مفهوم کسر و ۵) ناکافی بودن صلاحیت‌های معلمان برای تدریس آن، است (Behr et al., 1983; Davis, 1989; Son & Senk, 2010; Empson, Levi & Carpenter, 2011; Pantziara & Philippou, 2012; Depaepe, Torbeyns, Vermeersch, Janssens, Janssens et al., 2015; Kazemi & Rafiepour, 2018; Obersteiner et al., 2019; Tzur, 2019).

اولین گام در جهت شناسایی و اصلاح مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در خصوص هر مفهومی ازجمله مفهوم کسر، مطلع شدن از میزان درک واقعی آن‌ها در خصوص مفهوم موردنظر است. تاکنون تحقیقات مختلفی در خصوص کسر انجام شده است. به‌عنوان‌مثال، یکی از تحقیقات صورت گرفته در این خصوص، تحقیقی است که توسط کارالامبوس و همکاران (Charalambous et al., 2007) با هدف بررسی عملکرد دانش‌آموزان پایه پنجم و ششم کشور قبرس از کسرها بر اساس مدل نظری بهر و همکاران (Behr et al., 1983) انجام شد. این تحقیق که عملکرد ۶۴۶ نفر از دانش‌آموزان پایه پنجم و ششم در مورد زیرساختارهای مختلف کسر را موردبررسی قرارداد، مشخص کرد که عملکرد دانش‌آموزان در زیر ساختار جزء به کل، نسبت به زیرساختارهای دیگر بهتر بوده و دانش‌آموزان ضعیف‌ترین عملکرد را در خصوص زیر ساختار اندازه داشتند.

مطالعهٔ دیگری با همین روش توسط لیونگ (Leung, 2009) بر روی دانش‌آموزان کشور هنگ‌کنگ انجام شد و عملکرد ۴۴۰۰ نفر از دانش‌آموزان پایه پنجم و ششم ابتدایی این کشور در خصوص مفهوم کسر موردبررسی قرار گرفت. نتایج این مطالعه نیز همانند نتایج مطالعه کارالامبوس و همکاران (Charalambous et al., 2007) مشخص کرد که بهترین عملکرد دانش‌آموزان در خصوص زیر

ساختار جزء به کل و ضعیف‌ترین عملکرد در مورد زیر ساختار اندازه بود.

تزور (Tzur, 2019) با استفاده از یک تکلیف غیرمعمول در خصوص کسر ها، دانش معلمان در خصوص مفهوم کسر را موردبررسی قرارداد. نتیجه مطالعه او، مشخص کرد که بیش از ۵۰درصد معلمان شرکت‌کننده، درک محدودی از مفهوم کسر دارند و به همین دلیل، قادر به حل مسائل غیرمعمول در خصوص کسرها نیستند.

اسکندری (Eskandari, 2013) در تحقیقی با عنوان "مطالعه بدفهمی های دانش‌آموزان در رابطه با اعداد کسری و تبیین راهکارهایی برای رفع آن‌ها" به بررسی درک دانش‌آموزان سال اول متوسطه از اعداد کسری پرداخت. جامعه مورد مطالعه او، دانش‌آموزان سال اول متوسطه یکی از نواحی شهر تهران بود. او برای انجام این مطالعه، نمونه‌ای ۱۸۰ نفره انتخاب کرد. نتایج مطالعه او نشان داد که نمونهٔ مورد مطالعه، دارای بدفهمی‌های قابل‌توجهی در مفهوم کسر، ساده کردن کسرها، عملیات ریاضی روی اعداد کسری و تفکر نسبیتی هستند.

در مطالعهٔ دیگری که توسط ریحانی و همکاران (Reyhani et al., 2014) با عنوان "بررسی درک مفهوم کسر توسط دانش‌آموزان پایه ششم دورهٔ ابتدایی" انجام شد، درک دانش‌آموزان پایه ششم شهرستان ساوه از مفهوم کسر موردبررسی قرار گرفت. نمونه انتخاب شده این تحقیق، ۳۶۶ نفر از دانش‌آموزان پایهٔ ششم ابتدایی شهرستان ساوه بودند که به روش نمونه‌گیری خوشه‌ای تصادفی انجام شده بود. نتایج این مطالعه نشان داد که دانش‌آموزان درک متوسطی از کسرها دارند و بهترین عملکرد آن‌ها به تفکیک زیرساختارها، در زیرساختار جزء به کل و ضعیف‌ترین عملکرد آن‌ها در زیرساختار اندازه بود.

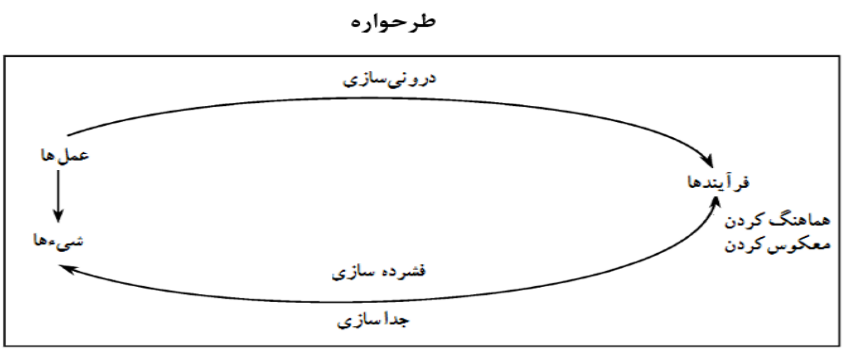
رفیع پور و همکاران (Rafiepour et al., 2019)، مطالعه‌ای را با عنوان "بررسی دانش محتوا و دانش پداگوژی محتوای معلمان ابتدایی و ارتباط آن با توانایی حل مسائل کسرهای ریاضی دانش‌آموزان" انجام دادند. این مطالعه روی معلمان مدارس ابتدایی یکی از استان‌های غربی ایران و دانش‌آموزان آن‌ها در فاصله سال‌های ۱۳۹۵-۱۳۹۴ صورت گرفت. نمونه آماری این تحقیق، ۲۵۶ نفر از معلمان پایه‌های پنجم و ششم و ۵۱۷۹ نفر از دانش‌آموزان همان معلم‌ها بود که معلم‌ها به روش نمونه‌گیری تصادفی انتخاب‌شده بودند. نتایج این مطالعه در خصوص درک دانش‌آموزان از مفهوم کسر مشخص کرد که دانش‌آموزان به دلیل داشتن درک محدود و مشکلات و بدفهمی های فراوان در مورد کسرها، توانایی محدود و ضعیفی برای حل مسائل کسرها و به‌خصوص مسائل مفهومی دارند.

از طرفی آموزش مفهوم کسر در نظام آموزشی ایران از پایه سوم ابتدایی به‌طور رسمی شروع می‌شود و آموزش زیرساختارهای مختلف آن تا پایهٔ ششم ابتدایی ادامه دارد. از طرفی دیگر، محتوای کتاب‌های درسی ریاضی ایران از سال ۱۳۹۰، مورد بازنگری اساسی قرار گرفتند. با توجه به متمرکز بودن نظام آموزشی کشور ما و تأثیر محتوای برنامه و کتاب‌های درسی ریاضی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان (Gooya, 2006; Raffia poor gatabi, 2010; Izadi, Reyhani & Ahmadi, 2015)، انجام مطالعه‌ای با هدف مشخص کردن درک دانش‌آموزان مقطع ابتدایی از مفهوم کسر می‌تواند کمک قابل‌توجهی برای تشخیص اصلاحات موردنیاز در محتوای برنامه و کتاب های درسی ریاضی کند. همان‌گونه که ملاحظه شد بیشتر مطالعات داخلی صورت گرفته محدود به یک یا دو پایهٔ تحصیلی بود و تحقیق داخلی جامعی تاکنون در این خصوص انجام نشده است. همچنین این بررسی باید به‌صورت جامع و نظام‌مند صورت گیرد. یکی از ابزارهایی که می‌تواند به بررسی نظام‌مند درک افراد از مفاهیم مختلف ریاضی ازجمله مفهوم کسر، کمک قابل‌توجهی کند، مدل‌ها و نظریه‌های رشد شناختی موجود در حوزهٔ آموزش ریاضی هستند. این نظریه‌ها به‌طورکلی به دو دسته نظریه‌های مربوط به چارچوب‌های عمومی رشد بلندمدت (مانند نظریهٔ رشد پیاژه) و نظریه‌های مربوط به چارچوب‌های

موضعی رشد مفهومی تقسیم‌بندی می‌شوند (Pegg & Tall, 2005). نظریه‌های موضعی رشد شناختی، به جنبه‌ی مفهومی خاصی مرتبط است که در آن، یادگیرنده تلاش می‌کند تا اطلاعات موجود را بفهمد و با استفاده از تمام ساختارهای شناختی در دسترس خود در آن زمان، ارتباطاتی ایجاد نماید (Pegg et al., 2005).

نظریهٔ APOS (Action, Process, Objec, Schema) یکی از نظریه‌های مربوط به چارچوب‌های موضعی رشد مفهومی است که به دلیل دارا بودن اجزای نظری (theoretical)، روش‌شناسی (methodological) و آموزشی (pedagogical) می‌تواند در ابعاد گسترده در انجام تحقیقات و توسعه برنامه درسی آموزش ریاضی موردا ستفاده قرار گیرد (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes et al., 2014; Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews et al., 1997). بر اساس این نظریه، فرد برای یادگیری مفاهیم مختلف، ازجمله مفاهیم ریاضی، سازوکارهای ذهنی معینی را برای ساختن ساختارهای ذهنی به کار می‌برد و سپس از این ساختارها، برای پرداختن به موقعیت مسئله گونه در ریاضی استفاده می‌کند. با توجه به این اصل، فرد برای هر مفهوم ریاضی، می‌تواند ساختاری ذهنی بسازد که برای آن مفهوم مناسب و برای درک، یادگیری و به‌کارگیری آن مفهوم قابل‌استفاده باشد (Dubinsky & Moses, 2016, translated by Gholamazad). ساختارهای ذهنی نظریه APOS عبارت‌اند از: ۱- عمل (action): تغییر دادن اشیاء از پیش شناخته‌شده توسط فرد است، درصورتی‌که راه این تغییر به یادگیرنده نشان داده‌شده باشد؛ ۲- فرایند (process): انجام عمل با بازتاب مشخص و به‌صورت درونی بدون نیاز به هدایت محرک خارجی است؛ ۳- شیء (object): آگاهی شخص از فرآیند به‌عنوان یک کلیت و توانایی تغییر اعمال و خلاصه‌سازی فرآیند است؛ ۴- طرحواره (schema): سازمان‌دهی مجموعه‌ای از فرآیندها و اشیاء و توانایی حرکت روبه‌جلو و رو به عقب میان سطوح عمل، فرایند و اشیاء است (Dubinsky & McDonald, 2001).

سازوکارهای ذهنی مورداستفاده برای تولید ساختارهای ذهنی، شامل درونی سازی (interiorization)، هماهنگ کردن (coordination)، معکوس کردن (reversal)، فشرده‌سازی (encapsulation)، بسط دادن (de-encapsulation) و موضوع‌بندی (thematization) است. شکل ۲، فرآیند ساخت دانش ریاضی و نحوه ارتباط بین ساختارها و سازوکارهای نظریهٔ APOS را نشان می‌دهد (Asiala et al., 1997).



شکل ۲. فرایند ساخت دانش ریاضی (Asiala et al., 1997)

درک یک مفهوم ریاضی با دست ورزی (manipulating) اشیاء ذهنی یا فیزیکی ساخته‌شده قبلی شروع می‌شود تا عمل‌ها را شکل دهند؛ سپس عمل‌ها درونی می شوند تا فرآیندهایی را شکل دهند که

پس از فشرده‌سازی تبدیل به شیءها می‌شوند. شیءها می‌توانند طوری جداسازی شوند که به فرآیندهایی که خود آن‌ها را شکل داده‌اند، برگردند. سرانجام، عمل‌ها، فرآیندها و شیءها می‌توانند در طرح‌واره‌ها سازمان‌دهی شوند (Izadi & Reyhani, 2019).

طبقه بندی SOLO (Structure of Observed Learning Outcome) یکی دیگر از کاربردی‌ترین نظریه‌ها است که در زمرهٔ چارچوب‌های عمومی و موضعی رشد شناختی قرار می‌گیرد (Pegg, 1992). این نظریه به دلیل اینکه می‌تواند در همه مقاطع و سنین، درک و فهم دانش‌آموزان از یک موضوع را مورد ارزیابی قرار دهد، از اهمیت بسیاری برخوردار است (Hagh joo & Reyhani, 2019). SOLO را ساختار نتایج یادگیری قابل‌مشاهده تعریف می‌کنند. منظور از **نتایج یادگیری**، حقایقی است که نشان می‌دهد درنهایت، دانش‌آموزان چه چیزی را خواهند دانست، مورد اهمیت قرار خواهند داد و قادر به انجام آن خواهند بود. **نتایج یادگیری قابل‌مشاهده**، پاسخ‌هایی هستند که فراگیران به سؤالات ارزیابی می‌دهند و **ساختار نتایج یادگیری قابل‌مشاهده**، ارزیابی پاسخ‌های فراگیران به سؤالات ارزشیابی بر اساس دو جنبه نوع تفکر و کیفیت پاسخ است. تحلیل پاسخ‌ها بر اساس نوع تفکر، مربوط به چارچوب عمومی رشد شناختی و تحلیل آن‌ها بر اساس کیفیت پاسخ، مربوط به چارچوب موضعی رشد شناختی این نظریه است. به کمک این نظریه می‌توان کیفیت پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات را با استفاده از پنج سطح پیش‌ساختاری (prestructural)، تک‌ساختاری (unistructural)، چندساختاری (multistructural)، رابطه‌ای (relational) و انتزاع تعمیم‌یافته (extended abstract) مورد تحلیل قرار داد. در مرحلهٔ **تک ساختاری**، فرد بر مسئله متمرکز شده است، اما فقط از یک بخش از دادهٔ مرتبط استفاده می‌کند. در سطح **چند ساختاری**، پاسخ فرد بر دو یا چند داده، بدون برقراری هیچ‌گونه رابطه یا ایجاد تلفیق بین آن‌ها، تمرکز دارد. در سطح **رابطه‌ای**، پاسخ فرد به‌گونه‌ای بر تمام داده‌های در دسترس متمرکز است که هر داده، در موزاییک کلی روابط تنیده شده است تا به کل، ساختاری منسجم دهد. این سطوح، در داخل زمینه‌ای و سیع‌تر تدوین می شود که با یک سطح مقدم **پیش ساختاری** (پاسخ به یک مسئلهٔ خاص که حتی به سطح تک ساختاری نرسیده، یا یک فرایند یا دادهٔ نادرست، یا یک راه ساده که ممکن است به یک نتیجهٔ بی‌ربط منجر شود و یا حتی ممکن است موجب شکست فرد در مسئله شود) و یک سطح کلی **انتزاع تعمیم‌یافته** (که در آن، کیفیت سطح رابطه‌ای در داخل تصویری بزرگ‌تر که ممکن است پایهٔ چرخهٔ بعدی ساخت‌وساز باشد) قرار می‌گیرد (Biggs & Collis, 1980).

تاکنون مطالعات مختلفی انجام شده است که به کمک این دو نظریه، درک افراد از مفاهیم مختلف ریاضی موردبررسی قرار گرفته است. یکی از مطالعات صورت گرفته در خصوص کاربرد نظریهٔ APOS در آموزش ریاضی دورهٔ ابتدایی مربوط به مطالعهٔ آرنون (Arnon, 1998) است. این مطالعه با هدف مقایسهٔ یک روش آموزش مبتنی بر نظریهٔ APOS در دورهٔ ابتدایی با یک روش آموزش استاندارد (standard) انجام شد. در این مطالعه که در خصوص درک دانش آموزان از مفهوم "جز به کل" کسر در پایه چهارم بود، عملکرد دو کلاس پایهٔ چهارم که به دو روش مختلف آموزش دیده بودند (یکی بر اساس روش تجربی (experimental) و یکی بر اساس روش استاندارد) موردبررسی قرار گرفت. بررسی نتایج درونی‌سازی هر یک از چهار مفهوم مورد تحلیل بر اساس سه طبقه‌بندی ارائه‌شده نشان داد که کلاسی که با روش تجربی آموزش دیده بود، در هر چهار مفهوم عملکرد بهتری نسبت به کلاس دیگر داشت. نتایج این مطالعه همچنین تائید کننده وجود دو سطح (level) بین مرحلهٔ (stage) عمل و فرایند بود. تفاوت بین سطح و مرحله در این است که مرحله، مربوط به یکی از ساختارهای ذهنی عمل، فرآیند، شیء و طرح‌واره است و مستقل از مفاهیم است، درحالی‌که سطح، نقطه اتصال

ر شدی بین دو مرحله متوالی ا ست و با توجه به مفاهیم مختلف، ســـطوح نیز می‌توانند تغییر کنند (Arnon et al., 2014).

مطالعهٔ دیگری در خ صوص کاربرد نظریهٔ APOS در آموزش ریاضـــی دورهٔ ابتدایی، توســـط آرنون، نشـــر و نیرنبرگ (Arnon, Nesher & Nirenburg, 2001) انجام شـــد. هدف این مطالعه بررســـی کاربرد این نظریه در تدریس مفاهیم صـــوری ریاضـــیات پیشـــرفته در دوره ابتدایی بود. نتایج این تحقیق نشـــان داد که مفاهیم ریاضـیات پیشـرفته، مانند کلاس‌های هم‌ارزی کسـرها، می‌تواند برای سطح دوره ابتدایی به‌و سیله ا شیاء واقعی منا سب و عمل‌های کافی، سازگار شود و نظریه APOS می‌توانـد بـه‌منظور تولیـد یـک رونـد آموزشـــی کـه دانش‌آموزان را قادر می‌کند تا مفاهیم معنادار را در خ صوص مو ضوع موردبحث تو سعه دهند، موردا ستفاده قرار گیرد.

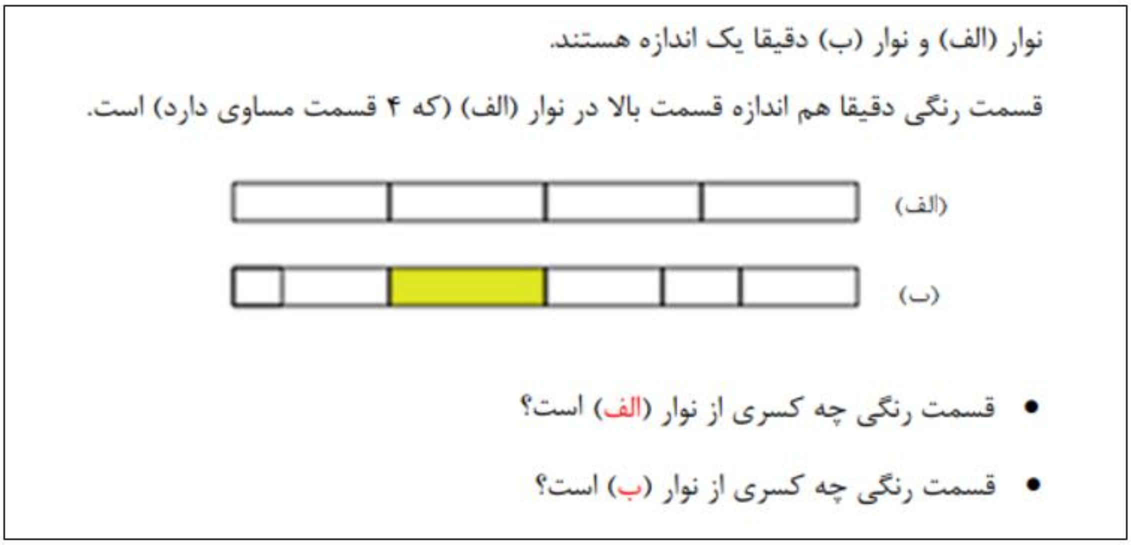
در پژوه شی، حق‌جو و همکاران (Hagh joo et al., 2019) توانایی مهارت‌های فضایی دانش‌آموزان در حل یک تکلیف را بر اساس طبقه‌بندی SOLO موردبررسی قراردادند. نتایج مطالعه آن‌ها که بر روی ۴۹۸ نفر از دانش‌آموزان پایه دهم، یازدهم و دوازدهم مدارس نظری و فنی‌وحرفه‌ای شهر ستان بو شهر انجام شد، م شخص کرد که ۵۹درصد دانش‌آموزان مدارس معمولی، در سطح تک‌ســـاختاری بودند و هیچ‌یک از دانش‌آموزان مدارس فنی و حرفه‌ای در ســـطح چند ســـاختاری و رابطه‌ای نبودند.

با توجه به این مطالب، هدف این تحقیق بررســـی میزان درک دانش‌آموزان دوره دوم ابتدایی شهر تهران از مفهوم کسـر (زیر سـاختار جزء به کل) با اسـتفاده از دو نظریه APOS و SOLO بود.

روش پژوهش

این تحقیق کـه از نظر هـدف، در زمره پژوهش‌هـای کاربردی اســـت باهدف بررســـی درک دانش‌آموزان دوره دوم ابتدایی شهر تهران از مفهوم کسر (زیر ساختار جزء به کل) و با روش تو صیفی- پیمایشی انجام شد. جامعه آماری، دانش‌آموزان دوره دوم ابتدایی شـــهر تهران در سـال تحصـیلی ۱۳۹۸- ۱۳۹۷ بودند. برای تعیین حجم نمونه با توجه به معلوم بودن اندازه تقریبی حجم جامعه ($N = ۳۲۰۰۰۰$) از فرمول $n = \frac{Nz^{۲}pq}{Nd^{۲} + z^{۲}pq}$ با در نظر گرفتن $p = ۰/۵$ (برآورد ن سبت صفت متغیر بر ا ساس م طالعات قبلی)، $q = ۱ - p = ۰/۵$، $z = ۱/۹۶$ (م قدار متغیر نرمال واحد متناظر با ســـطح اطمینان ٪۹۵) و $d = ۰/۰۴$ (مقدار خطای مجاز) ا ستفاده شد که حجم نمونه بر این ا ساس ۵۹۸ نفر به د ست آمد. برای انتخاب این نمونه‌ها، از روش نمونه‌گیری تصـادفی چندمرحله‌ای استفاده شد. مراحل انجام نمونه‌گیری به این صورت بود که در مرحلهٔ اول، پنج منطقه از مناطق آموزش‌وپرورش شـهر تهران به‌صـورت تصـادفی انتخاب شـد. در مرحلهٔ دوم، از هر منطقه، شـش مدرسـه به‌صـورت تصـادفی انتخاب شد (سه مدر سه دخترانه و سه مدر سه پسرانه). در مرحلهٔ ســوم، دو کلاس پا یهٔ چهارم (یک کلاس دخترانه و یک کلاس پسرانه)، دو کلاس پایهٔ پنجم (یک کلاس دخترانه و یک کلاس پســـرانه) و دو کلاس پایهٔ شـــشـــم (یک کلاس دخترانه و یک کلاس پســـرانه) به صورت ت صادفی از هر منطقه و از مدارس انتخاب شده در مرحلهٔ قبل، انتخاب شد. در مرحلهٔ چهارم، از هر یک از ۳۰ مدرسه انتخاب‌شده در مراحل قبل، ۲۰ دانش‌آموز به‌طور تصـــادفی انتخاب شـــد. پس از انتخاب نمونه‌ها، درک آن ها از مفهوم کســـر با اســـت فاده از آزمونی موردبررسی قرار گرفت (شکل ۳). روایی محتوایی آزمون باآنکه به دلیل اســـتفاده در مطالعه‌ای دیگر (Tzur, 2019)، قبلاً مورد تأیید قرار گرفته بود، اما مجدداً برای اسـتفاده در این مطالعه توسـط تعدادی از متخصـصـین آموزش ریاضـــی موردبررســـی و تأیید قرار گرفت. برای برر سی پایایی آزمون نیز از آلفای کرونباخ ا ستفاده شد که ضـریب ۰/۷ نشـــان از پایایی مناســـب آن بود. برای تحلیل داده‌ها از دو روش تحلیل کمی و کیفی اســـتفاده شد. در تحلیل کیفی داده‌ها، پا سخ‌های دانش‌آموزان بر اساس "مبتنی بر استدلال درست بودن یا نبودن"، مدل

APOS و چارچوب موضعی رشد شناختی SOLO مورد تحلیل و طبقه‌بندی قرار گرفت. همچنین بر اساس تحلیل کیفی داده‌ها، رایج‌ترین بدفهمی‌های شرکت‌کنندگان استخراج و مورد دسته‌بندی قرار گرفت. در تحلیل کمی داده‌ها نیز، فراوانی و درصد فراوانی نسبی مربوط به هر یک از طبقات و دسته‌بندی‌های استخراج شده در تحلیل کیفی، تعیین و ارائه گردید. به همین منظور، ابتدا پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس درست یا نادرست بودن و استدلال به‌کاررفته در آن، مورد تحلیل قرار گرفتند و اشتباهات و بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در پاسخگویی به سؤال آزمون، مشخص گردید. برای استخراج شیوهٔ استدلال دانش‌آموزان در پاسخگویی به سؤال آزمون، از توضیحات کلامی و ترسیمی ارائه شده توسط آن‌ها در برگهٔ آزمون استفاده شد. سپس پاسخ‌ها بر اساس مدل APOS و چارچوب موضعی رشد شناختی SOLO مورد تحلیل قرار گرفتند تا از این طریق درکی عمیق‌تر از ساختارهای ذهنی دانش‌آموزان در خصوص این مفهوم حاصل شود. دلیل استفاده از این دو مدل برای تحلیل داده‌ها، قابلیت این دو مدل برای دستیابی به شناخت دقیق از ساختارهای ذهنی و فهم افراد نسبت به مفاهیم ریاضی بود که توسط مطالعات مختلف مورد تائید قرارگرفته است (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1997; Haghjoo et al., 2019; Pegg, 1992).



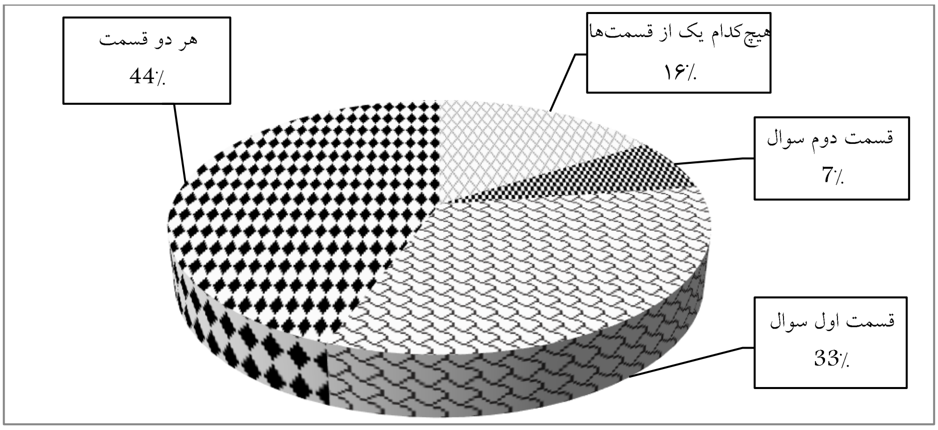
شکل ۳: سؤال ارائه‌شده جهت بررسی درک دانش‌آموزان دوره ابتدایی از مفهوم کسر (زیر ساختار جزء به کل) (Tzur, 2019)

یافته‌های پژوهش

همان‌طور که در روش تحقیق بیان شد، پاسخ‌های شرکت‌کنندگان بر اساس درست بودن یا نبودن، استفاده از استدلال درست یا نادرست و دو نظریهٔ APOS و SOLO مورد تحلیل قرار گرفت. در ادامه، نتایج این بررسی‌ها در قالب پاسخ به سؤالات پژوهش ارائه می‌گردد.

۱- دانش‌آموزان دوره دوم ابتدایی شهر تهران در مواجهه با یک تکلیف غیرمعمول در خصوص مفهوم کسر (زیر ساختار جزء به کل) چگونه عمل می‌کنند و خطاها و بدفهمی‌های رایج آن‌ها چیست؟

در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان، مشخص شد که ۴۴درصد (۲۶۵ نفر) به کل سؤال، پاسخ درست، ۴۰درصد (۲۳۷ نفر) فقط به یکی از قسمت‌های سؤال، پاسخ درست و ۱۶درصد (۹۶ نفر) به هیچ‌یک از قسمت‌های سؤال، پاسخ درست دادند (نمودار ۱).

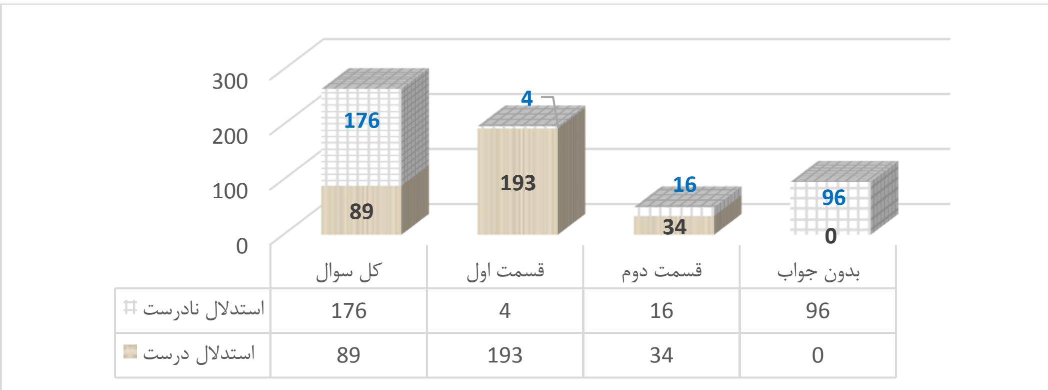


نمودار ۱. درصد فراوانی پاسخ‌های درست دانش‌آموزان به هر یک از قسمت‌های سؤال آزمون

در تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس صحت استدلال به‌کاررفته برای پاسخگویی نیز مشخص شد که از بین ۲۶۵ نفری (۴۴٪) که به هر دو قسمت سؤال پاسخ درست دادند، فقط ۸۹ نفر (۱۵٪ کل دانش‌آموزان) از استدلال درست استفاده کردند و مابقی، یعنی ۱۷۶ نفر (۲۹٪ کل دانش‌آموزان)، از استدلال نادرست استفاده کردند. درمجموع، ۳۱۶ نفر (۵۳٪)، از استدلال درست و ۱۹۶ نفر (۳۳٪) از استدلال نادرست برای پاسخ دادن به سؤال (به هر دو قسمت یا فقط به یکی از قسمت‌ها) استفاده کردند. جدول ۱ و نمودار ۲، تحلیل پاسخ‌های درست دانش‌آموزان بر اساس درست یا نادرست بودن استدلالشان را نشان می‌دهد:

جدول ۱. تحلیل پاسخ‌های درست دانش‌آموزان بر اساس درست یا نادرست بودن استدلال آن‌ها

قسمت‌های سؤال	پاسخ‌های درست		استدلال درست		استدلال نادرست	
	فراوانی	درصد فراوانی نسبی (نسبت به‌کل)	فراوانی	در صد فراوانی نسبی (نسبت به‌کل)	فراوانی	درصد فراوانی نسبی (نسبت به‌کل)
هر دو قسمت سؤال	۲۶۵	٪۴۴	۸۹	٪۱۵	۱۷۶	٪۲۹
قسمت اول	۱۹۷	٪۳۳	۱۹۳	٪۳۲	۴	٪۱
قسمت دوم	۴۰	٪۷	۳۴	٪۶	۱۶	٪۳
مجموع	۵۰۲	٪۸۴	۳۱۶	٪۵۳	۱۹۶	٪۳۳



نمودار ۲. تحلیل پاسخ‌های درست دانش‌آموزان بر اساس درست یا نادرست بودن شیوه استدلال آن‌ها

در تحلیل پاسخ‌ها و استدلال‌های دانش‌آموزان، محدود بودن آن‌ها به چند قالب مشخص، آشکار بود. تحلیل این قالب ها نیز، برخی از بدفهمی های رایج دانش‌آموزان در خصوص زیر ساختار جزء به‌کل را مشخص کرد. جدول ۲ و ۳، طبقه‌بندی پاسخ‌ها و استدلال‌های دانش‌آموزان را به همراه بدفهمی‌های آن‌ها و فراوانی‌شان با توجه به قسمت اول و دوم سؤال آزمون نشان می‌دهد.

جدول ۲. طبقه‌بندی پاسخ‌ها و استدلال‌های دانش‌آموزان و بدفهمی‌های رایج آن‌ها در پاسخگویی به قسمت اول سؤال

سؤال	ردیف	پاسخ	استدلال	نوع استدلال	بدفهمی رایج	فراوانی
قسمت رنگی، چه کسری از نوار (الف) است؟	۱	$\frac{۱}{۴}$	بر اساس متن سؤال	درست	–	۴۵۷
	۲	$\frac{۰}{۴}$	چون هیچ قسمتی از نوار (الف) رنگ نشده است.	نادرست	محدود بودن توانایی نوشتن کسر بر اساس قسمت‌های رنگ شده از شکل و عدم توجه به اطلاعات ارائه شده در مسئله با استفاده از سایر بازنمایی‌ها (مانند بازنمایی کلامی)	۴۹
	۳	کسری نادرست مانند $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۱}{۶}$، $\frac{۳}{۱۳}$ و ...	بدون توجیه منطقی و فقط بر اساس حدس	نادرست	درک از کسر به‌عنوان نوشتن عددی به صورت کسری، بدون هیچ‌گونه توجیه منطقی	۲۱
	۴	$\frac{۰}{۷}$، $\frac{۰}{۸}$ و $\frac{۰}{۱۲}$	تقسیم‌بندی نوار الف بر اساس نوار (ب) و نوشتن کسری با صورت صفر، به دلیل رنگ نشدن هیچ‌یک از قسمت‌های نوار (الف)	نادرست	محدود بودن توانایی نوشتن کسر بر اساس قسمت‌های رنگ شده از شکل و عدم توجه به اطلاعات ارائه شده در مسئله با استفاده از سایر بازنمایی‌ها (مانند بازنمایی کلامی)	۱۴
	۵	کسر مساوی $\frac{۱}{۴}$، مانند $\frac{۳}{۱۲}$، $\frac{۴}{۱۶}$ و ...	تقسیم‌بندی نوار الف بر اساس نوار (ب) به قسمت‌های به‌طور تقریبی مساوی	نادرست	استفاده از تقریب برای نوشتن مقدار دقیق کسر مربوط به هر قسمت مشخص‌شده	۵
	۶	سایر	–	–	–	۲۸
	۷	بدون جواب	–	–	–	۲۴

جدول ۳. طبقه‌بندی پاسخ‌ها و استدلال‌های دانش‌آموزان و بدفهمی‌های رایج آن‌ها در پاسخگویی به قسمت دوم سؤال

سؤال	ردیف	پاسخ	استدلال	نوع استدلال	بدفهمی رایج	فراوانی
قسمت رنگی، چه کسری از نوار (ب) است؟	۱	۱/۴	بر اساس متن سؤال	درست	-	۱۱۳
	۲	کسر مساوی ۱/۴، مانند ۳/۱۲، ۴/۱۶ و ...	تقسیم‌بندی نوار (ب) با پیش‌فرض‌های نادرست (مانند اینکه در نوار ب، حتماً تعداد طبیعی از قسمت کوچک مشخص‌شده در سمت چپ شکل وجود دارد) به قسمت‌های مساوی	نادرست	در هر واحدی، حتماً تعداد طبیعی از هر قسمت مشخص‌شده از آن، وجود دارد.	۱۸۷
	۳	۳/۱۳، ۳/۱۴ و ...	تقسیم‌بندی نوار (ب) به‌طور تقریبی و نادرست	نادرست	استفاده از تقسیم تقریبی برای نوشتن مقدار دقیق کسر مربوط به هر قسمت مشخص‌شده	۱۰۸
	۴	۱/۶	نوشتن کسر بر اساس نسبت قسمت رنگی به‌کل قسمت، بدون توجه به‌شرط مساوی بودن قسمت‌ها	نادرست	عدم توجه به‌شرط مساوی بودن قسمت‌ها در نوشتن کسرها	۹۴
	۵	۱/۵	نوشتن کسر بر اساس نسبت قسمت رنگی به قسمت‌های غیر رنگی و عدم توجه به شرط مساوی بودن قسمت‌ها برای نوشتن کسر	نادرست	درک کسر به‌عنوان مقایسه جزء با جزء به جای درک کسر به‌عنوان مقایسه جزء با کل و عدم توجه به‌شرط مساوی بودن قسمت‌ها در نوشتن کسرها	۳۳
	۶	کسر نادرست	تقسیم‌بندی نوار (ب) به‌طور تقریبی و نادرست	نادرست	استفاده از تقسیم تقریبی برای نوشتن مقدار دقیق کسر مربوط به هر قسمت مشخص‌شده	۱۳
	۷	۱/۱۰ یا ۶/۴	در نظر گرفتن قسمت های نوار (الف) و (ب) باهم به‌عنوان مخرج کسر و قسمت رنگی به‌عنوان صورت کسر، یا در نظر گرفتن قسمت های نوار (ب) به‌عنوان صورت کسر و قسمت‌های نوار (الف) به‌عنوان مخرج کسر	نادرست	عدم درک درست از واحد و دیدن کسر به‌عنوان دو عدد مجزا	۹
	۸	بدون جواب	-	-	-	۲۹
	۹	سایر	-	نادرست	-	۱۲

۲- میزان درک دانش‌آموزان دورهٔ دوم ابتدایی شهر تهران از مفهوم کسر (زیر ساختار جزء به کل) بر اساس مدل APOS چگونه است؟

در تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس مدل APOS، مشخص شد که درک ۵۳درصد (۳۱۳) از دانش‌آموزان در سطح عمل، ۲۹درصد (۱۷۱) در سطح فرایند، ۱۵درصد (۸۹) در سطح شیء و ۰درصد در سطح طرح‌واره بودند. همچنین ۴درصد (۲۵ نفر) از آن‌ها در هیچ‌یک از سطوح ارائه‌شده در نظریهٔ APOS قرار نداشتند. جدول ۴، نتایج تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس نظریهٔ APOS را به همراه نمونه‌هایی از آن‌ها با بیشترین فراوانی در هر یک از ساختارهای ذهنی نشان می‌دهد. همان‌گونه که بیان شد، هیچ‌یک از پاسخ‌های دانش‌آموزان در سطح طرح‌واره نبود که این امر می‌تواند به این دلیل باشد که سؤال آزمون این ظرفیت را نداشت که دانش‌آموزان پاسخی را در سطح طرح‌واره ارائه کنند.

۳- میزان درک دانش‌آموزان دوره دوم ابتدایی شهر تهران از مفهوم کسر (زیر ساختار جزء به کل) بر اساس مدل SOLO چگونه است؟

در تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس مدل SOLO، مشخص شد که ۸ در صد پاسخ‌ها در سطح

پیش ساختاری، ۱۴در صد در سطح تک ساختاری، ۶۳ در صد در سطح چند ساختاری و ۱۵در صد در سطح رابطه‌ای بود. همچنین مشخص شد که هیچ پاسخی در سطح انتزاع تعمیم‌یافته نبود که این امر می‌تواند مربوط به این باشد که سؤال ارائه‌شده چنین ظرفیتی را در سطح دورهٔ دوم ابتدایی ندارد و انتظاری غیرواقعی است که دانش‌آموزان دوره دوم ابتدایی بتوانند به چنین سؤالی، پاسخی در این سطح دهند. جدول ۵، نتایج این تحلیل را به همراه متداول‌ترین نمونه پاسخ‌ها در هر سطح نشان می‌دهد.

جدول ۴. تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس سطوح نظریه APOS به همراه نمونه‌های پاسخ‌های دانش‌آموزان با بیشترین فراوانی

ساختار ذهنی	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان به قسمت اول سؤال (دلیل ارائه آن پاسخ)	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان به قسمت اول سؤال (دلیل ارائه آن پاسخ)	فراوانی		درصد فراوانی نسبی
عمل	$\frac{1}{4}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	$\frac{3}{13}$، $\frac{3}{14}$ و ... (بر اساس تقسیم‌بندی تقریبی نادرست به قسمت‌های مساوی)	۹۴	۳۱۳	٪۵۲
		$\frac{1}{6}$ (نسبت قسمت رنگ‌شده به کل شکل بدون در نظر گرفتن شرط مساوی بودن قسمت‌ها)	۶۶		
	$\frac{0}{4}$ یا هیچ‌کدام (چون هیچ قسمتی از نوار الف رنگ نشده است)	$\frac{1}{4}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	۱۹		
	$\frac{1}{4}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	$\frac{1}{5}$ (درک کسر به‌عنوان نسبت قسمت‌های رنگ‌شده به قسمت‌های رنگ نشده)	۱۸		
		بدون جواب کسری (با این استدلال که نوار "ب" به قسمت های مساوی تقسیم‌نشده، نمی‌توانیم کسری بنویسیم)	۱۴		
	بدون جواب	بدون جواب کسری (چون نوار "ب" به قسمت‌های مساوی تقسیم‌نشده، نمی‌توانیم کسری بنویسیم)	۱۴		
	سایر موارد	سایر موارد	۸۸		
فرایند	$\frac{1}{4}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	کسری مساوی با $\frac{1}{4}$ (مانند $\frac{3}{12}$، $\frac{4}{16}$ و...) (تقسیم‌بندی نوار "ب" به‌صورت نادرست و تقریبی به قسمت‌های مساوی)	۱۷۱	۱۷۱	٪۲۹
شیء	$\frac{1}{4}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	$\frac{1}{4}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	۸۶	۸۹	٪۱۵
		کسری مساوی با $\frac{1}{4}$ (مانند $\frac{3}{12}$، $\frac{4}{16}$ و ...) (رسم مجدد نوار "ب" و تقسیم‌بندی درست شکل به‌طور تقریبی)	۳		
طرحواره	–	–	۰	۰	۰
–	$\frac{0}{4}$ (چون هیچ قسمتی از نوار الف رنگ نشده است)	جواب نادرست مانند $\frac{6}{4}$ (بدون ارائه هیچ توجیهی)	۸	۲۵	٪۴
	جواب نادرست (بدون ارائه هیچ توجیهی)	جواب نادرست (بدون ارائه هیچ توجیهی)	۱۰		
	بدون جواب	بدون جواب	۷		

جدول ۵. تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس سطوح نظریه SOLO به همراه نمونه‌های پاسخ‌های دانش‌آموزان با بیشترین فراوانی

کیفیت پاسخ	نمونه‌هایی از پاسخ‌های قسمت اول سؤال به همراه دلیل آن	نمونه‌هایی از پاسخ‌های قسمت دوم سؤال به همراه دلیل آن	فراوانی		درصد فراوانی نسبی
پیش‌ساختاری	جواب نادرست (بدون ارائه هیچ توجیهی)	جواب نادرست (بدون ارائه هیچ توجیهی)	۱۰	۵۰	٪۸
	$\frac{۰}{۴}$ یا هیچ‌کدام (چون هیچ قسمتی از نوار "الف" رنگ نشده است)	$\frac{۱}{۵}$ (درک کسر به‌عنوان نسبت قسمت‌های رنگ‌شده به قسمت‌های رنگ نشده)	۹		
		$\frac{۱}{۶}$ (نسبت قسمت رنگ‌شده به کل شکل بدون در نظر گرفتن شرط مساوی بودن قسمت‌ها)	۹		
		جوابی نادرست مانند $\frac{۶}{۴}$ (بدون ارائه هیچ توجیهی)	۸		
	سایر موارد	سایر موارد	۱۴		
تک‌ساختاری	$\frac{۱}{۴}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	$\frac{۱}{۵}$ (درک کسر به‌عنوان نسبت قسمت‌های رنگ‌شده به قسمت‌های رنگ نشده)	۱۸	۸۱	٪۱۴
	بدون جواب	بدون جواب کسری (چون نوار ب به قسمت‌های مساوی تقسیم نشده، نمی‌توانیم کسری بنویسیم)	۱۴		
	$\frac{۰}{۱۲}$، چون هیچ قسمتی از نوار "الف" رنگ نشده است (تقسیم‌بندی نوار "الف" بر اساس نوار "ب").	$\frac{۳}{۱۲}$ (تقسیم‌بندی نوار ب به‌صورت نادرست و تقریبی به قسمت‌های مساوی)	۹		
	کسری نادرست مانند $\frac{۵}{۴}$	$\frac{۱}{۶}$ (نسبت قسمت رنگ‌شده به کل شکل بدون در نظر گرفتن شرط مساوی بودن قسمت‌ها)	۵		
	جوابی نادرست (تقسیم‌بندی تقریبی بر اساس نوار "ب")	جوابی نادرست (بر اساس تقسیم‌بندی تقریبی)	۵		
	سایر موارد	سایر موارد	۳۰		
چندساختاری	$\frac{۱}{۴}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	کسری مساوی با $\frac{۱}{۴}$ (مانند $\frac{۳}{۱۲}$، $\frac{۴}{۱۶}$ و ...) (تقسیم‌بندی نوار "ب" به‌صورت نادرست و تقریبی به قسمت‌های مساوی)	۱۷۱	۳۷۸	٪۶۳
		$\frac{۳}{۱۳}$، $\frac{۳}{۱۴}$ و ...) از طریق تقسیم‌بندی تقریبی نادرست به قسمت‌های مساوی	۹۴		
		$\frac{۱}{۶}$ (نسبت قسمت رنگ‌شده به کل شکل بدون در نظر گرفتن شرط مساوی بودن قسمت‌ها)	۶۶		
	$\frac{۰}{۴}$ یا هیچ‌کدام، چون هیچ قسمتی از نوار "الف" رنگ نشده است.	$\frac{۱}{۴}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	۱۹		
	$\frac{۱}{۴}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	بدون جواب کسری (چون نوار ب به قسمت‌های مساوی تقسیم نشده، نمی‌توانیم کسری بنویسیم)	۱۴		
	سایر موارد	سایر موارد	۱۴		
رابطه‌ای	$\frac{۱}{۴}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	$\frac{۱}{۴}$ (بر اساس اطلاعات ارائه‌شده در سؤال)	۸۶	۸۹	٪۱۵
		کسری مساوی با $\frac{۱}{۴}$ ($\frac{۳}{۱۲}$، $\frac{۴}{۱۶}$ و ...) (رسم مجدد نوار "ب" و تقسیم‌بندی تقریبی و درست شکل به قسمت‌های مساوی)	۳		
انتزاع تعمیم یافته	-	-	۰	۰	٪۰

بحث و نتیجه‌گیری

این تحقیق با هدف بررسی درک دانش‌آموزان دوره دوم ابتدایی شهر تهران از زیر ساختار جزء به‌کل مفهوم کسر و شناسایی بدفهمی‌های رایج آنان در این خصوص انجام شد. نتایج این مطالعه نشان داد که دانش‌آموزان در مواجهه با موقعیت‌های غیرمعمول مرتبط با مفهوم کسر، نمی‌توانند به‌طور مناسب از مفهوم کسر برای استدلال درست کردن و پاسخ دادن استفاده کنند. این امر می‌تواند گواهی بر محدود بودن درک دانش‌آموزان از مفهوم کسر (زیر ساختار جزء به‌کل) باشد. این نتیجه با نتیجه مطالعه رفیع پور و همکاران (Rafiepour et al., 2019) مطابقت داشت. همچنین نتایج این مطالعه نشان داد که دانش‌آموزان در این زیرساختار دارای بدفهمی‌هایی هستند که رایج‌ترین آن‌ها شامل موارد ذیل بود:

۱. عدم توجه به شرط مساوی بودن قسمت‌ها در زیر ساختار جزء به کل؛

۲. درک کسر در زیر ساختار جزء به کل، به‌عنوان نسبت جزء‌به‌جزء (مانند نسبت قسمت‌های رنگ‌شده به رنگ نشده) به‌جای درک آن به‌عنوان نسبت جزء به کل؛

۳. در هر واحدی، حتماً تعداد طبیعی از قسمت مشخص‌شده وجود دارد؛

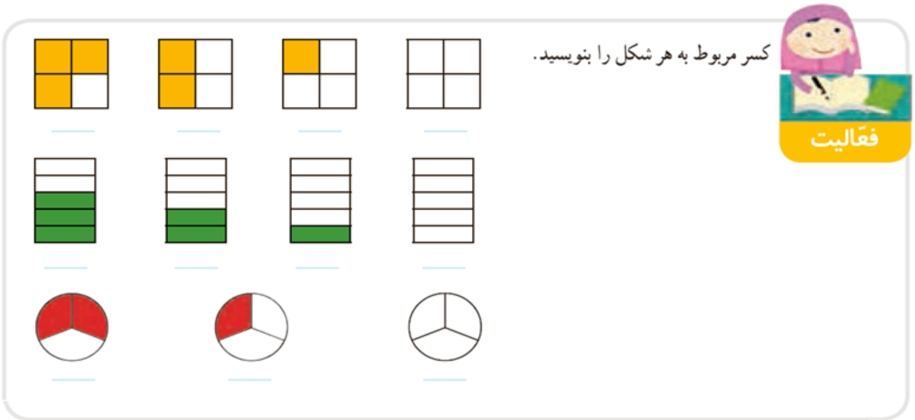
۴. استفاده از تقسیم‌بندی تقریبی شکل برای تعیین مقدار کسری دقیق قسمت مشخص‌شده.

این نتیجه با نتایج مطالعه دوستی (Doosti, 2013) مطابقت داشت و تعدادی از بدفهمی‌های مشخص شده در این مطالعه، با بدفهمی‌های مشخص‌شده در آن مطالعه، یکسان بود، اما تعدادی نیز همانند موارد ۳ و ۴ بدفهمی‌هایی بودند که در این مطالعه آشکار شدند. نتایج به‌دست‌آمده در این تحقیق با نتایج مطالعه کارالامبوس و همکاران (Charalambous et al., 2007) و لیونگ (Leung, 2009) مطابقت نداشت. یکی از دلایل احتمالی این عدم مطابقت می‌تواند مربوط به هدف انجام مطالعه باشد. هدف این مطالعه، به چالش کشیدن درک دانش‌آموزان از زیر ساختار جزء به‌کل با استفاده از یک موقعیت غیرمعمول و مشخص کردن عمق درک آن‌ها از این زیر ساختار و بدفهمی‌های رایج آن‌ها بود، درحالی‌که در سه مطالعه ذکرشده، هدف مقایسه درک دانش‌آموزان از زیرساختارهای مختلف کسر بود.

در بررسی دلایل احتمالی محدود بودن درک دانش‌آموزان از این مفهوم، همان‌گونه که توسط تحقیقات مختلف ازجمله پارک و همکاران (Park et al., 2013) و دیویس (Davis, 1989) مورد تأکید قرار گرفته است، حاکم بودن رویکرد جزء به کل در فرآیند آموزش و تأکید بیش‌ازحد بر زیر ساختار جزء به‌کل در محتوای برنامه و کتاب‌های درسی ریاضی می‌تواند یکی از دلایل اصلی این مشکل باشد. همچنین استفاده از رویه‌ها و الگوریتم‌ها بدون درک مفهومی آن‌ها می‌تواند یکی دیگر از دلایل احتمالی این مشکل باشد.

بررسی بدفهمی‌های آشکارشده در این مطالعه نشان داد که این بدفهمی‌ها می‌تواند ناشی از دلایل مختلف همانند ۱- عدم درک درست از مفهوم واحد در کسر، ۲- درک کسر به‌عنوان دو عدد مجزا، ۳- عدم رعایت اصل شمول، ۴- تداخل دانش حسابی دانش‌آموزان با دانش آن‌ها در مورد کسر، ۵- عدم توجه به اطلاعات ارائه‌شده در سؤال بر اساس بازنمایی‌هایی به‌غیراز بازنمایی تصویری و ۶- تأکید بیش‌ازاندازه محتوای کتاب‌های درسی ریاضی بر زیر ساختار جزء به کل و توجه به قسمت‌های برابر در نوشتن کسر، باشد. با یک بررسی اجمالی بر روی محتوای کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی توسط محققین این مطالعه مشخص شد که بیشترین تأکید این کتاب‌ها در ارائهٔ مفهوم کسر، بر روی زیر ساختار جزء به کل آن است و در بیشتر جاهایی که شکلی داده شده است تا کسر مربوط به آن نوشته شود، توجه به مساوی بودن قسمت‌بندی شکل از طریق بازنمایی تصویری ارائه شده است و در موارد اندکی از بازنمایی کلامی برای تأکید بر این شرط (مساوی بودن قسمت‌ها) استفاده شده است. شکل ۴، نمونه‌ای از این تأکید کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی را نشان می‌دهد. این موضوع می‌تواند القاءکنندهٔ این درک نادرست باشد که برای مشخص کردن کسر

مربوط به هر مقداری، حتماً باید شکل به‌طور آ شکار به قسمت‌های مساوی تقسیم‌شده باشد و در غیر این صورت امکان نوشتن کسر برای آن مقدار با هیچ اطلاعات دیگری وجود ندارد.



شکل ۴: استفاده از بازنمایی تصویری برای تأکید بر شرط مساوی بودن تقسیم‌بندی شکل در زیر ساختار جزء به کل کسرها (کتاب ریاضی پایه چهارم ابتدایی، ۱۳۹۸، ص. ۲۸)

با توجه به این مطالب، یکی از پیشنهادهای اساسی این تحقیق در خصوص محتوای برنامه و کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی، تمرکززدایی از تأکید بر زیر ساختار جزء به کل مفهوم کسر و فراهم آوردن فرصت‌های مناسب برای تعمیق سایر زیرساختارهای کسر است. یکی دیگر از پیشنهادهای این مطالعه، تأکید بر یادگیری مفهومی رویه‌ها و الگوریتم‌های مرتبط با مفهوم کسر در فرصت‌های آموزشی ارائه‌شده توسط معلمان است.

در تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس دو مدل APOS و SOLO مشخص شد که برخی از پاسخ‌های دانش‌آموزان در هیچ یک از ساختارهای ذهنی مدل APOS قرار نمی‌گیرد، درحالی‌که با استفاده از مدل SOLO، این امکان فراهم شد تا تمامی پاسخ‌های دانش‌آموزان در یکی از سطوح این مدل قرار گیرند و مورد تحلیل قرار گیرند. این امر می‌تواند نشان‌دهنده برتری مدل SOLO نسبت به مدل APOS ازلحاظ کارایی در انجام تحقیقات مرتبط با حوزه آموزش ریاضی باشد. البته تائید این نتیجه‌گیری، نیازمند مطالعات پژوهشی بیشتر و عمیق‌تر است. نتایج این مطالعه همچنین تائیدکننده نتایج مطالعه آرنون (Arnon, 1998)، مبنی بر وجود سطوح به‌عنوان نقاط اتصال رشدی بین مراحل مختلف نظریهٔ APOS است. به همین دلیل در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان، برخی از آن‌ها در هیچ‌یک از ساختارهای ذهنی بیان‌شده در مدل APOS قرار نگرفتند.

این پژوهش در شهر تهران و با هدف بررسی درک دانش‌آموزان دورهٔ دوم ابتدایی از زیر ساختار جزء به کل مفهوم کسر انجام شد. انجام تحقیقی جامع در سطح ملی با هدف بررسی درک دانش‌آموزان مقطع ابتدایی از زیرساختارهای مختلف مفهوم کسر و استخراج مشکلات و بدفهمی‌های رایج آن‌ها می‌تواند در ارزیابی محتوای برنامه و کتاب‌های درسی ریاضی و استخراج نقاط قوت و ضعف این محتواها مؤثر باشد. یکی از محدودیت‌های موجود در این مطالعه، عدم نمونه‌گیری از مدارس غیردولتی بود. بر همین اساس نمی‌توان نتایج حاصل از این مطالعه را به دانش‌آموزان دورهٔ دوم ابتدایی مدارس غیردولتی شهر تهران تعمیم داد.

منابع

Math, volume 6.Iran: General Department printing and distribution of textbooks. [in Persian]

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., et al. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*, 82-92.

Doosti, M. (2013). *A Study on Sixth Grade Students' understanding of Fractions* (Unpublished master's thesis). Shahid Rajaee Teacher Training University, Faculty of Science Branch, Tehran, Iran. [in Persian]

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275-282). Springer, Dordrecht.

Dubinsky, E., & Moses R. P. (2016). Philosophy, Math Research, Math Ed Research, K-16 Education, and the Civil Rights Movement: A Synthesis. (S. Gholamazad, Trans.). *Culture and mathematics thought*, 58, 67-88. (Original work published 2011)

Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In *Early algebraization* (pp. 409-428). Springer, Berlin, Heidelberg.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, *1*(2), 7-26.

Eskandari, N. (2013). *Studying Students' Misconceptions of Fractions Numbers and Explanation Solutions for Fix Them* (Unpublished master's thesis). Shahid

Beheshti University, Faculty of Science Branch, Tehran, Iran. [in Persian]

Arnon, I. (1998). In the mind's eye: How children develop mathematical concepts—Extending Piaget's theory. *Unpublished doctoral dissertation, School of Education, Haifa University*.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS theory. *A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, 5-15.

Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do Fractions Encounter their Equivalents?–Can this Encounter Take Place in Elementary-School?. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(2), 167-214.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Maa Notes*, 37-54.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126.

Biggs, J., & Collis, K. F. (1980). SOLO taxonomy. *Education News*, *17*(5), 19-23.

Čadež, T. H., & Kolar, V. M. (2018). How fifth-grade pupils' reason about fractions: a reliance on part-whole subconstructs. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(3), 335-357.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational studies in mathematics*, *64*(3), 293.

Davis, G. E. (1989). Attainment of rational number knowledge. *1989). To challenge to change. Victoria: Mathematical Ass. of Victoria*.

Davoodi, KH., Rastgar, A., Reyhani, E. Safari Azar, Sh., & Alamian, V. (2019). *Grade 4*

Gooya, Z. (2006). The process of change the content of the school mathematics curriculum.

Roshd Mathematics Education Journal, 12(46), 8-12. Teaching-Aids Publications Office, Organization of Research& Educational Planning, Ministry of Education. [in Persian]

Hagh joo, S., & Reyhani, E. (2019). A study on performance of secondary school students in solving a spatial ability task based on SOLO theory. *Technology of Education*, 13(4), 639-653. [in Persian]

Hart, K. M. (1987). Practical work and formalisation, too great a gap. In *Proceedings of the eleventh international conference Psychology of Mathematics Education (PME-XI)* (Vol. 2, pp. 408-415).

Izadi, m., & Reyhani, E. (2019). An Analysis on APOS Theory and its Application to Primary Mathematics Education. 4th National Conference of Research in Basic Science Education. Tehran. Iran. [in Persian]

Izadi, M., Reyhani, E., & Ahmadi, G. A. (2015). Teaching addition and subtraction: A comparative study on the math curriculum goals and the content of the first-grade math textbook in Iran, Japan, and the USA. *Research in Curriculum Planning*, 12(46), 55-74. [in Persian]

Kazemi, F., & Rafiepour, A. (2018). Developing a Scale to Measure Content Knowledge and Pedagogy Content Knowledge of In-Service Elementary Teachers on Fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(4), 737-757.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh, & D. A. Bradbard (Eds.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (Vol. 7418491, pp. 101–144). Retrieved from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf

Lamon, S. J. (2001). Enculturation in mathematical modelling. In *Modelling and Mathematics Education* (pp. 335-341). Woodhead Publishing.

Leung, C. K. E. (2009). A preliminary study on Hong Kong students' understanding of fraction.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 16-32.

Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S. M., & Moeller, K. (2019). Understanding fractions: integrating results from mathematics education, cognitive psychology, and neuroscience. In *Constructing Number* (pp. 135-162). Springer, Cham.

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students'"conception" of fractions. *Educational Studies in mathematics*, *79*(1), 61-83.

Park, J., Güçler, B., & McCrory, R. (2013). Teaching prospective teachers about fractions: historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 455-479.

Pegg, J. (1992). Assessing students' understanding at the primary and secondary level in the mathematical sciences. *Reshaping assessment practice: Assessment in the mathematical sciences under challenge*, 368-385.

Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *ZDM*, *37*(6), 468-475.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational studies in Mathematics*, *30*(1), 5-38.

Post, T. R., Cramer, K. A., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum indications from research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts: Multiple research perspective. *Learning, teaching and assessing rational number concepts: Multiple research perspective. Madison: University of Wisconson*.

Rafia poor gatabi, A. (2010). *Designing framework for creating balance in Secondary mathematics curriculum of Iran* (Unpublished doctoral dissertation). Shahid Beheshti University, Tehran, Iran. [in Persian]

Rafiepour, A., Kazemi, F., Fadaee, M. (2019). Investigate content knowledge and pedagogy content knowledge of the primary school teachers and its relation with the students' problem-solving ability at mathematical fractions. *Research in Curriculum Planning*, 16(60), 104-120. Doi: 10.30486/jsre.2019.546264

Reyhani, E., Bakhshalizadeh, Sh., & Dosti, M. (2014). Grade 6th Students Understanding of Fraction. *Journal of Curriculum Studies*, 9(34), 133-164. [in Persian]

Son, J.-W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2), 117–142. https://doi. org/10.1007/s10649-010-9229-6.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, *14*(5), 503-518.

Tzur, R. (2019). Developing Fractions as Multiplicative Relations: A Model of Cognitive Reorganization. In *Constructing Number* (pp. 163-191). Springer, Cham.