

## کنترل وفقی ژيروسکوپ‌های غیرخطی با رفتار آشوبناک با وجود عدم قطعیت در ضرایب مدل دینامیکی

سید شهاب عاملیان<sup>۱</sup>، حمیدرضا کوفیگر<sup>۲</sup>  
amelian@naeiniu.ac.ir

پذیرش مقاله: ۸۹/۱۱/۰۱

دریافت مقاله: ۸۹/۰۷/۱۵

### چکیده

در این مقاله، کنترل ژيروسکوپ‌ها با میرایی خطی و غیرخطی مرتبه سوم مد نظر قرار می‌گیرد. باید توجه داشت که در کاربردهای مختلف، ضرایب مدل دینامیکی ژيروسکوپ‌ها دقیقاً مشخص نیستند. از طرف دیگر، به ازای مقادیر خاصی از ضرایب، ژيروسکوپ‌ها رفتاری آشوبناک خواهند داشت. از این رو، یک کنترل‌کننده وفقی برای تخمین پارامترهای مدل پیشنهاد می‌گردد. کنترل‌کننده طراحی شده، تعقیب یک سیگنال حالت مطلوب و پایداری سیستم حلقه بسته را با وجود عدم قطعیت در ضرایب مدل تضمین می‌نماید. با توجه به اینکه تخمین هر یک از پارامترها به طور جداگانه از اهداف مسئله کنترل نیست، نسخه‌ای تکمیلی از الگوریتم پیشنهادی ارائه می‌گردد که صرفاً با یک قانون تطبیق خواسته‌های مسئله را برآورده می‌سازد. این طراحی باعث کاهش قابل توجه حجم عملیات محاسباتی شده و از دیدگاه عملی اهمیت زیادی دارد. برای نشان دادن عملکرد الگوریتم کنترل، شبیه‌سازی‌های متعددی انجام می‌گردد. بررسی نتایج بدست آمده صحت عملکرد مکانیزم تطبیق، همگرایی خطای تعقیب به صفر و پایداری سیستم حلقه بسته را تأیید می‌کند.

### کلیدواژه:

آشوب - پارامترهای نامعین - ژيروسکوپ - کنترل وفقی - میرایی مرتبه سوم

۱- کارشناس ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نایین، دانشکده مهندسی مکانیک، نایین، ایران

۲- استادیار، دانشگاه اصفهان، دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی برق، اصفهان، ایران koofigar@eng.ui.ac.ir

## ۱- مقدمه

استفاده از ژيروسکوپ‌ها در کاربردهای مختلف نظامی، سیستم‌های هوا فضا، نجوم و مخابرات نوری اهمیت تحلیل مدل دینامیکی ژيروسکوپ‌ها و لزوم طراحی یک سیستم کنترل مناسب را به خوبی نشان می‌دهد. با توجه به اینکه در سیستم‌های هدایت، کنترل و ناوبری دقت در اندازه‌گیری و اعمال سیگنال کنترلی مناسب نقش اساسی داشته و کوچکترین خطا می‌تواند باعث بروز خسارات جبران ناپذیری گردد ارائه یک روش مقاوم در برابر عدم قطعیت‌های سیستم ضروری به نظر می‌رسد.

ژيروسکوپ‌ها در شرایط خاصی می‌توانند رفتارهای آشوبناک از خود نشان دهند. به عبارت دیگر، به ازای مقادیری از پارامترهای مدل دینامیکی حالت‌های سیستم پاسخ آشوبناک دارند. در این موارد، مسئله کنترل و نیز همزمان‌سازی آشوب مطرح می‌گردد. کنترل آشوب سعی بر آن دارد که با اعمال سیگنال کنترلی مناسب پاسخ آشوبناک سیستم را به صورت کنترل شده درآورد [۱ و ۲]. حال آنکه طراحی یک سیستم همزمان‌ساز آشوب به منظور هماهنگ کردن دو ژيروسکوپ با پاسخ آشوبناک با ساختار مشابه است [۳]. از روش‌هایی که در زمینه برخورد با سیستم‌های آشوبناک مطرح شده است می‌توان به روش‌های خطی‌سازی با فیدبک [۴ و ۵]، گام به عقب [۶ و ۷]، کنترل بهینه [۸]، کنترل‌کننده‌های PID [۹]، کنترل مد لغزشی [۱] و روش‌های فازی [۱۰] اشاره کرد. هر یک از روش‌های مذکور با در نظر گرفتن فرضیاتی روی نامعینی پارامترهای سیستم روشی را برای دسته‌ای از سیستم‌های آشوبناک مطرح نموده‌اند.

به طور کلی، با فرض معلوم بودن پارامترهای سیستم یا وجود کران معلوم برای نامعینی‌ها قابلیت طراحی کنترل‌کننده از روش‌های مختلف امکان‌پذیر است [۱۱]. از آنجا که در نظر گرفتن واقعیت‌های مسئله در دستیابی به بهترین نتیجه نقش اساسی دارد، روش‌هایی می‌توانند در حل مسئله تحت بررسی مؤثر واقع شوند که عدم قطعیت‌های سیستم و سایر محدودیت‌های عملی را در طراحی در نظر بگیرند. در مرجع [۱۲]، با فرض معلوم بودن تمام ضرایب مدل و بدون در نظر گرفتن هیچگونه نامعینی، یک کنترل‌کننده جهت برآورده شدن اهداف مسئله پیشنهاد گردیده ولی با این وجود، اثبات پایداری آن دارای اشکال است [۱۳]. باید توجه داشت فرض معلوم بودن کران نامعینی‌های مدل که در بسیاری از مراجع مطرح گردیده یک شرط محدودکننده است که در عمل همیشه قابل قبول نمی‌باشد.

اشکالات مهمی که در روش‌های مطرح شده قبلی وجود دارند عبارتند از (۱) در نظر گرفتن یک مدل نامی با فرض معلوم بودن پارامترهای مدل دینامیکی، (۲) طراحی سیگنال کنترل برای مدل نامی بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت‌ها، (۳) فرض یک کران معلوم برای نامعینی‌های مدل و استفاده از آن در مراحل طراحی.

در این مقاله، کنترل رفتار ژيروسکوپ‌ها با ضرایب مدل نامعلوم در حضور پدیده آشوب مد نظر قرار می‌گیرد. با توجه به آن‌که در کاربردهای مختلف، پارامترهای مدل ژيروسکوپ‌ها دقیقاً مشخص نیست، کلیت شرایط طراحی و سهولت پیاده‌سازی از ویژگی‌های روش مذکور به شمار می‌رود. بدین منظور در بخش دوم، مدل دینامیکی ژيروسکوپ‌ها معرفی گردیده و شرایط ایجاد پدیده آشوب در این سیستم‌ها بررسی می‌شود. با تعریف مسئله کنترل در بخش سوم و فرمول‌بندی مسئله، الگوریتم وفقی پیشنهادی برای تخمین پارامترهای مدل و تضمین پایداری سیستم حلقه بسته در بخش چهارم معرفی می‌گردد. با توجه خاص به لزوم کاربردی بودن نتایج، کنترل‌کننده طراحی شده در چند مرحله بهبود می‌یابد. با ارائه نتایج شبیه‌سازی و تحلیل نتایج در بخش پنجم، نهایتاً نکاتی به عنوان نتیجه‌گیری مقاله در بخش ششم مطرح می‌گردد.

در متن مقاله، برای یک بردار دلخواه  $V_{n \times 1}$ ،  $\|V\|$  نرم اقلیدسی و  $V^T Q V := \|V\|_Q^2$  نرم با ماتریس وزنی  $Q$  تعریف می‌شود. همچنین، بردار  $V$  متعلق به فضای  $L_2$  ( $V \in L_2$ ) شناخته می‌شود اگر  $T \in [0, \infty)$  و  $\int_0^T \|V(t)\|^2 dt < \infty$ ، و متعلق به فضای  $L_\infty$  ( $V \in L_\infty$ ) است اگر برای هر  $t \in [0, \infty)$  داشته باشیم  $\|V(t)\| < \infty$ .

## ۲- توصیف مدل دینامیکی ژيروسکوپ‌ها

معادله دینامیکی یک ژيروسکوپ غیرخطی با ساختار متقارن را به صورت

$$\ddot{\theta} + g(\theta) + h(\theta, \dot{\theta}) = f \sin \omega t \sin \theta \quad (1)$$

در نظر بگیرید [۱]، که در آن  $g$  به فرم

$$g(\theta) = \alpha^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} - \beta \sin \theta \quad (2)$$

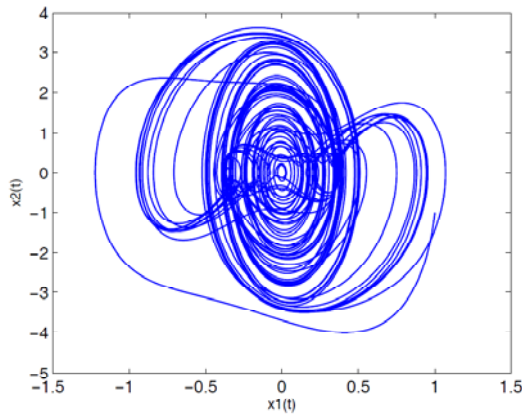
و تابع  $h$  که شامل جملات میرایی خطی و غیرخطی مرتبه ۳ است با ضابطه

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \gamma_1 \dot{\theta} + \gamma_2 \dot{\theta}^3 \quad (3)$$

تعریف شده و  $f \sin \omega t$  بیانگر تحریک اعمال شده به سیستم است. با توجه به اینکه با ارائه یک مدل فضای حالت می‌توان مراحل تحلیل سیستم و طراحی کنترل‌کننده را به نحو مؤثرتری انجام داد، بردار حالت  $X = [x_1, x_2]^T$  تعریف می‌گردد که در آن  $x_1 = \theta$  و  $x_2 = \dot{\theta}$ . بنابراین، معادله دینامیکی

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha^2 \frac{(1 - \cos x_1)^2}{\sin^3 x_1} + \beta \sin x_1 - \gamma_1 x_2 - \gamma_2 x_2^3 \\ &\quad + f \sin \omega t \sin x_1 + u(t) \end{aligned} \quad (4)$$

کوچکترین تغییر در هر یک از حالات سیستم باعث رفتاری کاملاً متفاوت نسبت به قبل می‌گردد.



شکل (۲): منحنی فاز  $x_1$  بر حسب  $x_2$  در زیرسکوپ با شرایط آشوبی

باید توجه داشت که سیستم تحت بررسی به ازای مقادیر  $\alpha^2 = 100$  ،  $\beta = 1$  ،  $\gamma_1 = 0.5$  ،  $\gamma_2 = 0.05$  ،  $w = 2$  و  $f = 35.5$  ، از خود رفتار آشوب‌گونه نشان می‌دهد. در شکل (۱)، پاسخ زمانی حالت‌های سیستم به ازای دو شرط اولیه متفاوت یعنی  $(x_1, x_2) = (1, -1)$  و  $(x_1, x_2) = (-0.5, -1)$  ترسیم گردیده که متفاوت بودن پاسخ سیستم و عدم همگرایی آنها در اثر پدیده آشوب را نشان می‌دهد. همچنین در شکل (۲)، مسیر فاز سیستم آشوبناک در صفحه  $x_1 - x_2$  نشان داده شده است.

### ۳- تعریف مسئله کنترل

کنترل رفتار آشوبناک و غیر قابل پیش‌بینی زیرسکوپ‌های غیرخطی معرفی شده با مدل (۴)، مستلزم طراحی یک ورودی کنترلی برای همگرا کردن پاسخ است. به عبارت دیگر، مسئله کنترل شامل تعیین سیگنال کنترل  $u(t)$  است به نحوی که بردار حالت سیستم آشوبناک به یک بردار مطلوب همگرا گردد.

بر این اساس، بردار خطا را به صورت  $E = X - X_d = [e, \dot{e}]^T$  تعریف کنید که در آن  $X_d = [x_d, \dot{x}_d]$  بردار حالت مطلوب و  $e = x_1 - x_d$  خطای تعقیب را نشان می‌دهد. حال برای نمایش دینامیک خطا تعریف می‌کنیم:

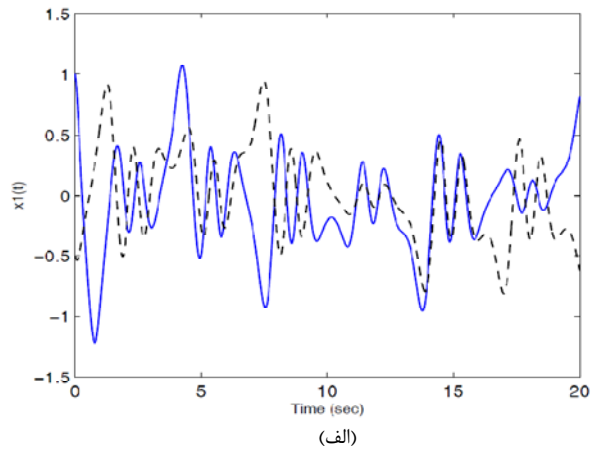
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

بنابراین با توجه به معادله (۴) می‌توان نوشت:

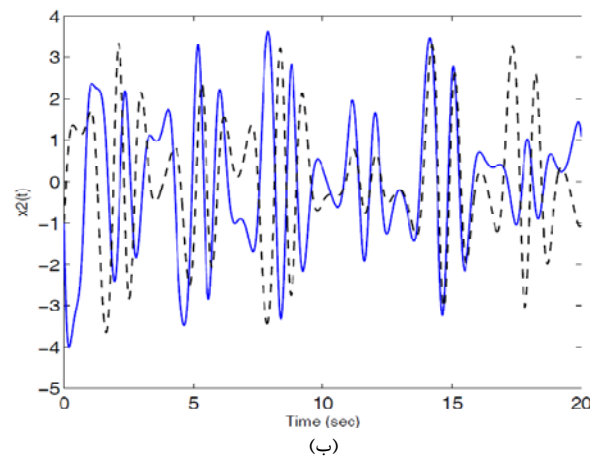
$$\dot{E} = A_1 E - B[g(X) + h(X) + f \sin \omega t \sin x_1 + u(t) - \ddot{x}_d] \quad (6)$$

به عنوان مدل فضای حالت سیستم معرفی می‌گردد که در آن  $u(t)$  نشان‌دهنده ورودی کنترلی است.

تحقیقات انجام گرفته نشان می‌دهد که سیستم زیرسکوپ به ازای مقادیر خاصی از پارامترهای مدل (۱)، پاسخ آشوبناک خواهد داشت [۱]. تعاریف مختلف ارائه شده در مراجع مربوط به سیستم‌های آشوبی، هر یک به نوعی خصوصیات رفتاری آنها را نشان می‌دهد. رفتار آشوب‌گونه به این معناست که رفتار دراز مدت یک سیستم دینامیکی حتی در صورت عدم وجود تغییرات در پارامترهای سیستم و یا وجود نویز و اغتشاش، قابل پیش‌بینی نباشد [۱۴].



(الف)



(ب)

شکل (۱): عدم همگرایی حالت‌های سیستم آشوبناک با شرایط اولیه مختلف،

الف- پاسخ زمانی حالت  $x_1$ ، ب- پاسخ زمانی حالت  $x_2$

در بکار بردن عبارت عدم قابلیت پیش‌بینی در رفتار سیستم‌های آشوبی باید دقت داشت که مانند هر سیستم معین دیگر، با اطلاع دقیق از حالات سیستم در زمان شروع به کار  $t = t_0$ ، رفتار دینامیکی برای  $t > t_0$  به طور منحصر به فرد مشخص می‌گردد. تفاوت اصلی سیستم‌های آشوبی با سایر سیستم‌های دینامیکی غیرخطی، حساسیت بسیار زیاد به شرایط اولیه می‌باشد. به عبارت دیگر، اگرچه رفتار سیستم با شرایط اولیه قابل پیش‌بینی است،

را در نظر بگیرید. همچنین، با توجه به معادله (۴) و تعاریف (۸) و (۹)، مدل فضای حالت سیستم به فرم

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \varphi^T(X)\eta + f \sin \omega t \sin x_1 + u(t) \end{aligned} \quad (13)$$

قابل بیان است.

**قضیه ۱:** ژيروسکوپ غیرخطی با ضرایب مدل نامعین را با معادله دینامیکی (۱۳) در نظر بگیرید. سیگنال کنترل با ضابطه

$$u = -M(X) + \hat{\alpha} \frac{(1 - \cos x_1)^2}{\sin^3 x_1} - \hat{\beta} \sin x_1 + \hat{\gamma}_1 x_2 + \hat{\gamma}_2 x_2^3 \quad (14)$$

که بردار  $\hat{\eta}$  شامل ضرایب  $\hat{\alpha}$ ،  $\hat{\beta}$ ،  $\hat{\gamma}_1$  و  $\hat{\gamma}_2$  از قانون تطبیق

$$\dot{\hat{\eta}} = \Gamma \varphi(X) B^T P E \quad (15)$$

بدست می‌آیند، همگرایی خطای تخمین پارامترها، همگرایی خطای تعقیب و پایداری سیستم حلقه بسته را نتیجه می‌دهد (  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  ماتریس بهره تطبیق و  $P = P^T$  یک ماتریس معین مثبت است).

**اثبات:** جهت استفاده از قضیه لیاپانف برای اثبات پایداری سیستم حلقه بسته، تابع لیاپانف با تعریف

$$V(E, E_\eta) = \frac{1}{2} E^T P E + \frac{1}{2} E_\eta^T \Gamma^{-1} E_\eta \quad (16)$$

را در نظر بگیرید که در آن

$$E_\eta = \eta - \hat{\eta} = [\alpha^2 - \hat{\alpha} \quad \beta - \hat{\beta} \quad \gamma_1 - \hat{\gamma}_1 \quad \gamma_2 - \hat{\gamma}_2]^T \quad (17)$$

برداری خطای تخمین را نشان می‌دهد و ماتریس  $P$  حل معادله لیاپانف

$$A^T P + P A = -W \quad (18)$$

به ازای یک ماتریس معین مثبت داده شده مانند  $W = W^T$  می‌باشد.

مشتق‌گیری از تابع لیاپانف (۱۶) در راستای دینامیک خطای (۱۰) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \dot{V}(E, E_\eta) &= \frac{1}{2} E^T (A^T P + P A) E + (K^T E + \varphi^T(X)\eta \\ &+ f \sin \omega t \sin x_1 + u - \ddot{x}_d) B^T P E + E_\eta^T \Gamma^{-1} \dot{E}_\eta \end{aligned} \quad (19)$$

با توجه به روابط (۱۱) و (۱۸) و جایگذاری سیگنال کنترل (۱۴) می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(E, E_\eta) = -\frac{1}{2} E^T W E + E_\eta^T \varphi(X) B^T P E - E_\eta^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\eta}} \quad (20)$$

در ادامه، به منظور سهولت در نمایش معادلات، بیان بهتر مراحل طراحی کنترل‌کننده و نیز اثبات پایداری سیستم حلقه بسته، تعاریف نوشتاری زیر را در نظر می‌گیریم.

الف- یک بردار  $K = [k_1, k_2]^T$  به نحوی انتخاب می‌شود که ماتریس

$$A := A_1 - B K^T \quad (7)$$

هرویتز (پایدار) باشد.

ب- بردار پارامتر  $\eta$  و بردار رگرسیون  $\varphi(X)$  به ترتیب به صورت

$$\eta = [\alpha^2 \quad \beta \quad \gamma_1 \quad \gamma_2]^T \quad (8)$$

و

$$\varphi = \left[ -\frac{(1 - \cos x_1)^2}{\sin^3 x_1} \quad \sin x_1 \quad -x_2 \quad -x_2^3 \right]^T \quad (9)$$

تعریف می‌شوند.

حال می‌توان معادله (۶) را با توجه به روابط (۷) تا (۹) به فرم

$$\begin{aligned} \dot{E} &= A E - B [K^T E + \varphi^T(X)\eta + f \sin \omega t \sin x_1 \\ &+ u(t) - \ddot{x}_d] \end{aligned} \quad (10)$$

بازنویسی نمود.

بنابراین، هدف از طراحی کنترل‌کننده تعیین  $u(t)$  به نحوی است که با وجود نامعینی در ضرایب، سیستم حلقه بسته پایدار بوده و بردار حالت  $X$  با کوچکترین خطای ممکن بردار مطلوب  $X_d$  را دنبال کند.

#### ۴- طراحی کنترل‌کننده وفقی پیشنهادی

در این بخش، الگوریتم طراحی کنترل‌کننده وفقی پیشنهادی به منظور برآورده شدن اهداف مسئله تحت بررسی ارائه می‌گردد. در واقع، کنترل‌کننده طراحی شده توانایی تخمین پارامترهای سیستم توسط یک مکانیزم وفقی را دارا بوده و پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین می‌نماید. در ادامه، الگوریتم طراحی در قالب چند قضیه بیان گردیده و در هر مرحله تکمیل می‌گردد. این تقسیم‌بندی می‌تواند ایده روش پیشنهادی و نیز مراحل اثبات پایداری سیستم را به نحو مؤثرتری نشان دهد. در مراحل طراحی و اثبات قضایا، تابع  $M(X)$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M(X) = f \sin \omega t \sin x_1 + K^T E - \ddot{x}_d \quad (11)$$

#### ۴-۱- کنترل وفقی ژيروسکوپ با تخمین ضرایب نامعین مدل

حال با هدف تخمین هر یک از درایه‌های بردار  $\eta$  و همگرایی خطای تعقیب به صفر به طراحی کنترل‌کننده می‌پردازیم. به این منظور، بردار تخمین

$$\hat{\eta} = [\hat{\alpha} \quad \hat{\beta} \quad \hat{\gamma}_1 \quad \hat{\gamma}_2]^T \quad (12)$$

با مشتق‌گیری از تابع لیاپانف (۲۶) و جایگذاری دینامیک خطای (۱۰)، عبارت مشتق به صورت

$$\dot{V}(E, e_\zeta) = \frac{1}{2} E^T (A^T P + PA) E + M(X) B^T P E + \eta^T \varphi(X) B^T P E + u B^T P E + \frac{1}{\gamma} e_\zeta \dot{e}_\zeta \quad (27)$$

بدست می‌آید. با توجه به معادله (۱۸) و تعریف (۲۲) می‌توان نوشت:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} E^T W E + M(X) B^T P E + \zeta \|\varphi(X) B^T P E\| + u B^T P E - \frac{1}{\gamma} e_\zeta \dot{\zeta} \quad (28)$$

حال، جایگذاری کنترل‌کننده (۲۴) نتیجه می‌دهد:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} E^T W E + \zeta \|\varphi(X) B^T P E\| - \hat{\zeta} \|\varphi(X) B^T P E\| - \frac{1}{\gamma} e_\zeta \dot{\zeta} \quad (29)$$

در نهایت با جایگذاری قانون تطبیق (۲۵)، نامساوی

$$\dot{V}(E, e_\zeta) \leq -\frac{1}{2} E^T W E \quad (30)$$

برای مشتق تابع لیاپانف بدست می‌آید. بنابراین طبق قضیه پایداری لیاپانف، سیستم حلقه بسته پایدار بوده و بردار خطای تعقیب به صفر همگرا می‌گردد.

همانگونه که نشان داده شد، اهداف مسئله کنترل با اعمال هر یک از کنترل‌کننده‌های (۱۴) یا (۲۴) برآورده می‌شود. آنچه از دیدگاه عملی اهمیت دارد، وجود تابع  $sign(\cdot)$  در قانون کنترل (۲۴) است که می‌تواند باعث ایجاد پرش یا ناپیوستگی در سیگنال ورودی گردد. از این رو، جایگزینی تابع علامت با تابع دیگری که پیوستگی ورودی کنترل را حفظ نماید از نظر پیاده‌سازی ارزشمند است. در ادامه برای برآورده شدن این هدف، عبارت اصلاح شده‌ای برای کنترل‌کننده (۲۴) پیشنهاد می‌شود. پیش از ارائه قضیه‌ای برای طراحی، بیان ۲

لم زیر ضروری به نظر می‌رسد.

**لم ۱:** برای هر دو عدد حقیقی و نامنفی  $p$  و  $q$  با شرط  $p^2 + q^2 \neq 0$ ، نامساوی

$$-\frac{p^2}{p+q} < -p+q \quad (31)$$

برقرار است.

**لم ۲:** (از نتایج لم باربالت [۱۵]): اگر  $E, \dot{E} \in L_\infty$  و  $E$  و  $\dot{E}$  کراندار بوده و به علاوه،  $E \in L_2$  آنگاه داریم  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ .

**قضیه ۳:** معادله دینامیکی (۱۳) را برای ژيروسکوپ با ضرایب نامعین در نظر بگیرید. قانون کنترل وفقی

حال با اعمال قانون تطبیق (۱۵)، عبارت مشتق تابع لیاپانف عبارتست از:

$$\dot{V}(E, E_\eta) = -\frac{1}{2} E^T W E \quad (21)$$

با توجه به معین مثبت بودن ماتریس  $W$ ، بر اساس قضیه پایداری لیاپانف، سیستم حلقه بسته پایدار بوده و خطای تخمین پارامترها و نیز خطای تعقیب سیگنال مرجع به صفر همگرا می‌گردد.

#### ۲-۴ طراحی کنترل‌کننده با تخمین نرم بردار پارامترهای نامعین

در بحث طراحی کنترل‌کننده، توجه به این نکته ضروری است که تخمین هر پارامتر مدل بطور جداگانه از اهداف مسئله کنترل نبوده و استخراج قوانین تطبیق متعدد برای کنترل رفتار آشوبناک سیستم که با همگرا کردن حالات سیستم به حالت مطلوب و پایداری سیستم حلقه بسته بدست می‌آید ضرورتی ندارد. از این رو، نرم بردار  $\eta$  برابر یک عدد نامعین مانند  $\zeta > 0$  در نظر گرفته شده، یعنی

$$\zeta = \|\eta\| \quad (22)$$

و مقدار آن تخمین زده می‌شود. در واقع، خطای تخمین به صورت

$$e_\zeta = \zeta - \hat{\zeta} \quad (23)$$

تعریف می‌شود که  $\hat{\zeta}$  مقدار تخمین را نشان می‌دهد و سیگنال کنترل همگرایی آن به مقدار واقعی را تضمین خواهد کرد.

**قضیه ۲:** کنترل‌کننده وفقی با قانون

$$u = -M(X) - \hat{\zeta} \|\varphi(X)\| \text{sign}(B^T P E) \quad (24)$$

و مکانیزم تطبیق

$$\dot{\hat{\zeta}} = \gamma \|\varphi(X) B^T P E\| \quad (25)$$

که در آن  $sign(\cdot)$  معرف تابع علامت و  $\gamma > 0$  بهره تطبیق می‌باشد، پایداری سیستم حلقه بسته و همگرایی خطای تخمین به صفر را در ژيروسکوپ غیرخطی با معادله (۱۳) تضمین می‌نماید.

**اثبات:** تابع لیاپانف با تعریف

$$V(E, e_\zeta) = \frac{1}{2} E^T P E + \frac{1}{2\gamma} e_\zeta^2 \quad (26)$$

را که در آن ماتریس  $P$  مشابه قضیه ۱ و بر اساس رابطه (۱۸) به دست می‌آید، در نظر بگیرید.

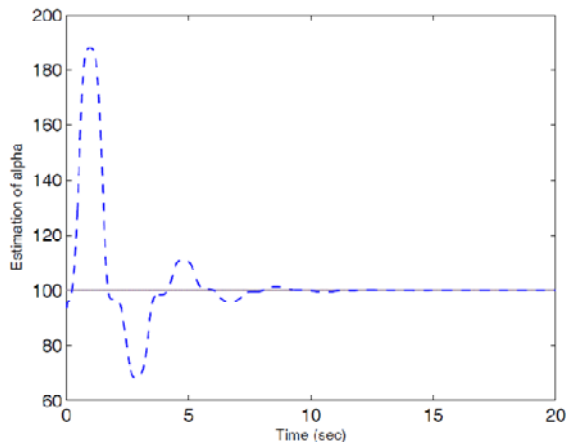
$$\lambda_w > \frac{2\sigma}{\varepsilon^2} \quad (39)$$

عددی مانند  $\kappa > 0$  وجود دارد که اگر  $\|E\| > \varepsilon$  آنگاه

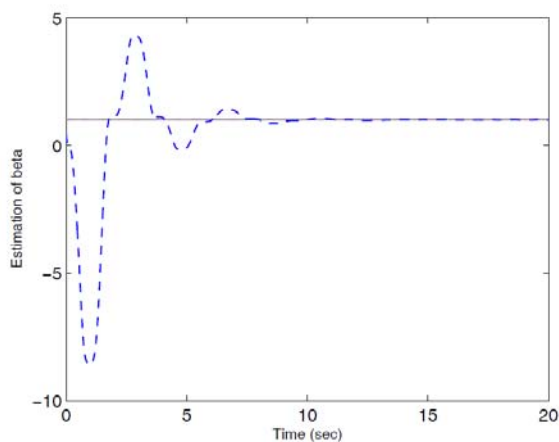
$$\dot{V} \leq -\kappa \|E\|^2 < 0 \quad (40)$$

بنابراین، زمان محدودی وجود دارد که برای زمان‌های بعد از آن مشتق تابع لیاپانف منفی شده و خطا کاهش می‌یابد و  $\|E\| \leq \varepsilon$  برقرار می‌شود. با این توضیح، سیگنال خطا و نیز سایر سیگنال‌های سیستم حلقه بسته کراندار می‌گردد یعنی  $E \in L_\infty$  و با توجه به دینامیک خطای (۱۰) و کراندار متغیرهای سمت راست معادله،  $\dot{E} \in L_\infty$  نتیجه می‌شود. حال با توجه به برقراری شرایط لم ۲، می‌توان نتیجه گرفت که بردار خطای تعقیب به صفر همگرا می‌گردد.

تذکره: عبارت‌نمایی که در مخرج سیگنال کنترل (۳۲) وجود دارد پیوستگی ورودی کنترلی را تضمین می‌کند، بدون آنکه همگرایی خطای تعقیب از دست برود.



(الف)



(ب)

$$u = -M(X) - \hat{\zeta}^2 \frac{\phi^T(X)\phi(X)B^T PE}{\|\phi(X)B^T PE\| \hat{\zeta} + \sigma e^{-rt}} \quad (32)$$

با مکانیزم تطبیق پارامتر

$$\dot{\hat{\zeta}} = \gamma \|\phi(X)B^T PE\| \quad (33)$$

که در آن  $\gamma > 0$  بهره تطبیق را نشان می‌دهد، همگرایی خطای تعقیب به سمت صفر و پایداری سیستم حلقه بسته را نتیجه می‌دهد ( $\sigma$  و  $r$  اعداد مثبت کوچکی هستند که توسط طراح انتخاب می‌شوند).

اثبات: با در نظر گرفتن تابع لیاپانف (۲۶) و طی مراحل مشابه قضیه ۲، نامساوی (۲۸) برای مشتق تابع لیاپانف بدست می‌آید. با جایگذاری کنترل‌کننده (۳۲) در آن و استفاده از نتیجه لم ۱ یعنی نامساوی (۳۱) نتیجه می‌شود:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} E^T W E + \zeta \|\phi(X)B^T PE\| - \hat{\zeta} \|\phi(X)B^T PE\| + \sigma e^{-rt} - \frac{1}{\gamma} e_\zeta \dot{\hat{\zeta}} \quad (34)$$

سپس با اعمال قانون تطبیق (۳۳)، نامساوی

$$\dot{V}(E, e_\zeta) \leq -\frac{1}{2} E^T W E + \sigma e^{-rt} \quad (35)$$

برای مشتق تابع لیاپانف بدست می‌آید.

حال با هدف استفاده از لم ۲ برای نشان دادن همگرایی بردار خطا، از دو طرف نامساوی (۳۵) از  $t=0$  تا  $t=T$  انتگرال‌گیری می‌شود لذا رابطه

$$V(E(T), e_\zeta(T)) - V(E(0), e_\zeta(0)) \leq -\frac{1}{2} \int_0^T \|E\|_W^2 dt + \frac{\sigma}{r} (1 - \sigma e^{-rt}) \quad (36)$$

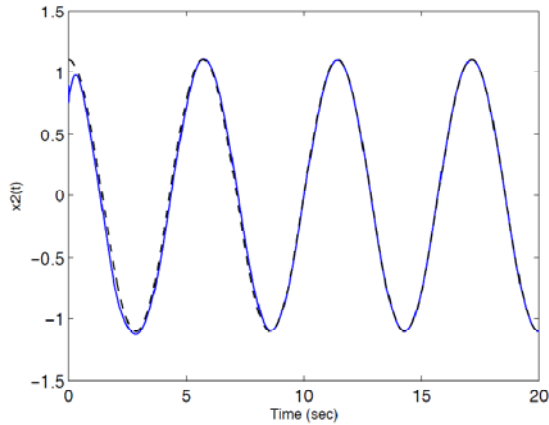
و یا به طور معادل نامساوی

$$\frac{1}{2} \int_0^T \|E\|_W^2 dt + V(E(T), e_\zeta(T)) \leq V(E(0), e_\zeta(0)) + \frac{\sigma}{r} (1 - \sigma e^{-rt}) \quad (37)$$

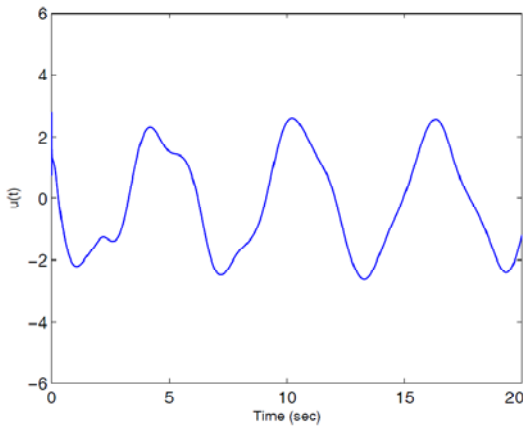
به ازای هر  $0 \leq T < \infty$  بدست می‌آید و  $E \in L_2$  را نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر، با توجه به نامساوی (۳۵) می‌توان نوشت:

$$\dot{V} \leq -\lambda_w \|E\|^2 + \sigma \quad (38)$$

که  $\lambda_w$  کوچکترین مقدار ویژه ماتریس معین مثبت  $W$  را نشان می‌دهد. حال اگر به ازای هر مقدار  $\varepsilon > 0$ ، ماتریس  $W$  به نحوی انتخاب گردد که

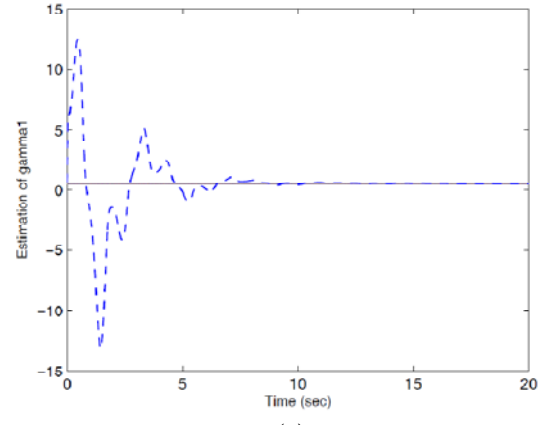


(ب)

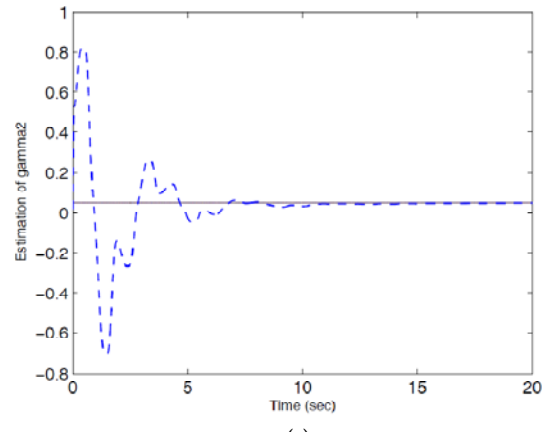


(ج)

شکل (۴): کنترل رفتار ژيروسکوپ آشوبناک، الف) سیگنال مطلوب (-) و سیگنال حالت  $x_1$  (-)، ب) حالت مطلوب (-) و سیگنال  $x_2$  (-)، ج) ورودی کنترل  $u(t)$



(ج)



(د)

شکل (۳): تخمین پارامترهای مدل دینامیکی ژيروسکوپ غیرخطی،

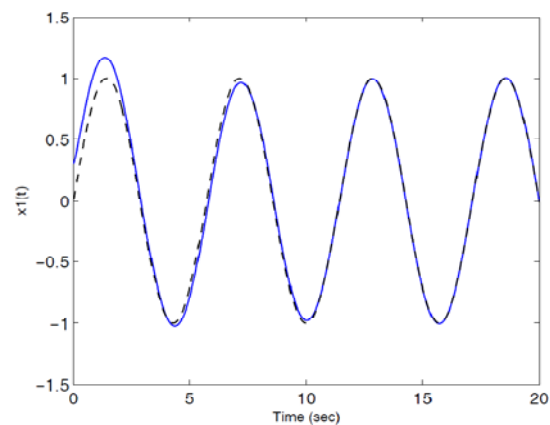
$$\text{الف) } \hat{\alpha}, \text{ ب) } \hat{\beta}, \text{ ج) } \hat{\gamma}_1, \text{ د) } \hat{\gamma}_2$$

### ۵- شبیه‌سازی و بررسی نتایج

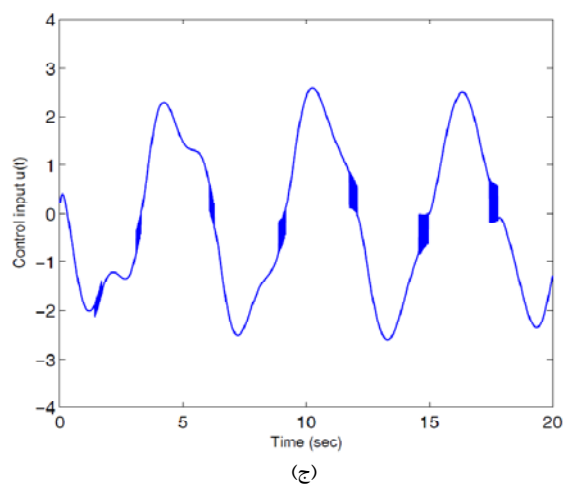
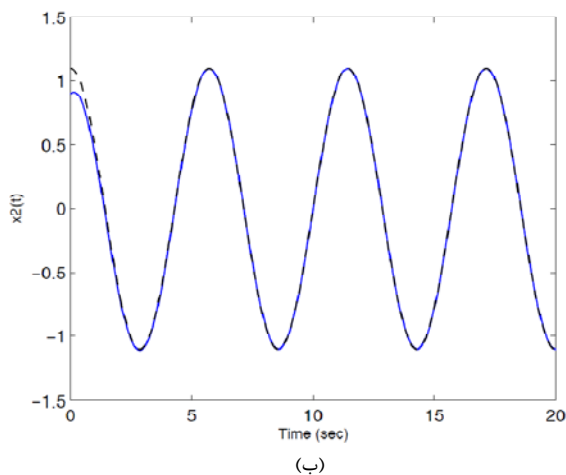
در این بخش، الگوریتم‌های کنترلی معرفی شده در بخش ۴ به سیستم اعمال گردیده و عملکرد هر یک از آنها بررسی و با یکدیگر مقایسه می‌گردد. شبیه‌سازی‌های انجام گرفته در دو حالت کلی ارائه می‌شود.

در حالت اول، کارایی روش در تخمین پارامترهای مدل و تعقیب سیگنال مرجع ارزیابی گردیده و در حالت دیگر، بدون در نظر گرفتن هدف تخمین پارامترها صرفاً همگرایی خطای تعقیب به صفر که هدف اصلی مسئله کنترل است مورد توجه قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که در هر حالت، کنترل‌کننده طراحی شده با وجود شرایط آشوب یعنی  $\eta = (100, 1, 0.5, 0.05)$  به سیستم اعمال می‌گردد.

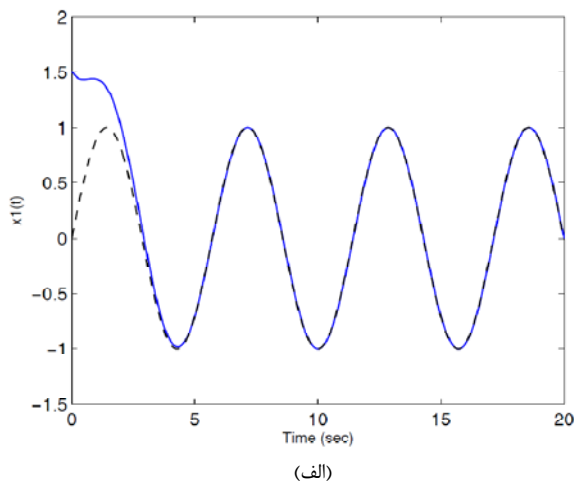
**حالت ۱)** با فرض شرایط اولیه  $(x_1(0), x_2(0)) = (0.2, 0.9)$  برای حالت‌های سیستم و  $\hat{\eta}(0) = (95, 0.5, 0.6, 0.02)$  برای پارامترهای مدل و انتخاب  $K = [2 \ 2]^T$ ،  $P = I_{2 \times 2}$  (ماتریس همانی) و  $\Gamma = \text{diag}(1, 0.5, 0.5, 0.5)$ ، عملکرد الگوریتم کنترل معرفی شده در قضیه ۱ بررسی می‌گردد. شکل (۳) همگرایی مقادیر تخمین ضرایب مدل به مقادیر بردار  $\eta = (100, 1, 0.5, 0.05)$  را نشان می‌دهد. همچنین، تعقیب سیگنال‌های حالت مرجع و سیگنال کنترل اعمال شده به سیستم در شکل (۴) نشان داده شده است.



(الف)



شکل (۵): تعقیب سیگنال‌های مرجع با اعمال ورودی کنترل قضیه ۲، الف) سیگنال حالت  $x_1$  (-) و سیگنال مطلوب (- -)، ب) سیگنال  $x_2$  (-) و حالت مطلوب (- -)، ج) ورودی کنترل  $u(t)$

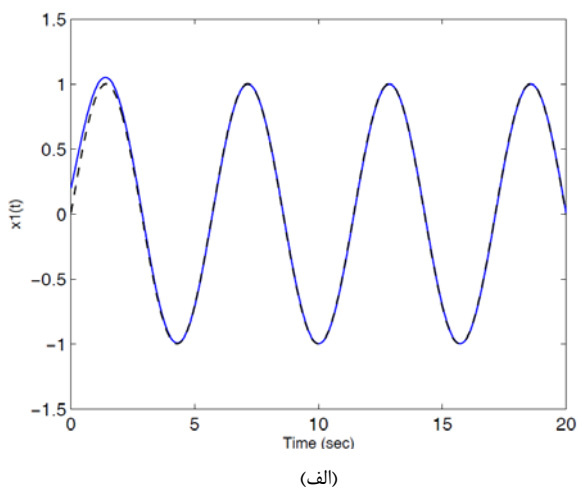


شبیه‌سازی‌های انجام گرفته نشان می‌دهد کنترل ژيروسکوپ با رفتار آشوبناک با تخمین پارامترهای مدل و تعقیب سیگنال مرجع بدست آمده است.

**حالت ۲)** با توجه به اینکه تخمین پارامترها از اهداف مسئله کنترل نیست، قانون کنترل معرفی شده در قضیه ۲ به سیستم اعمال و نتایج آن بررسی می‌گردد. با انتخاب شرایط حالت ۱ و بهره تطبیق  $\gamma = 0.5$ ، همگرایی حالت‌های سیستم به سیگنال‌های مطلوب با اعمال ورودی کنترل طراحی شده در شکل (۵) مشخص شده است. با توجه به وجود پرش در سیگنال کنترل، کنترل‌کننده پیشنهادی در قضیه ۳ به سیستم اعمال گردیده و نتایج آن با فرض  $(x_1(0), x_2(0)) = (1.5, 0.5)$  در شکل (۶) آمده است. در مقایسه با شکل (۵) نتایج بدست آمده نشان می‌دهد علاوه بر برآورده شدن هدف تعقیب سیگنال مرجع، پیوستگی ورودی کنترل نیز در این حالت بدست آمده است.

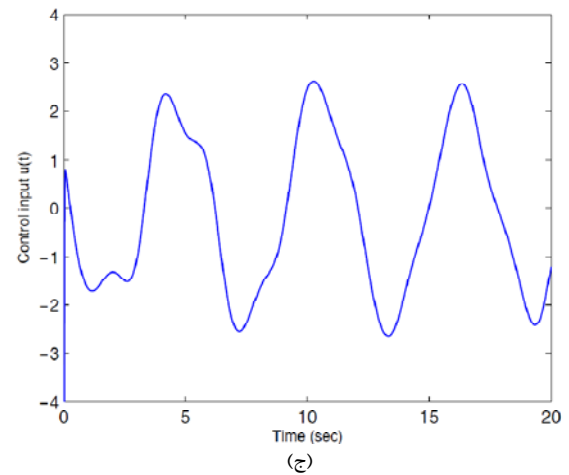
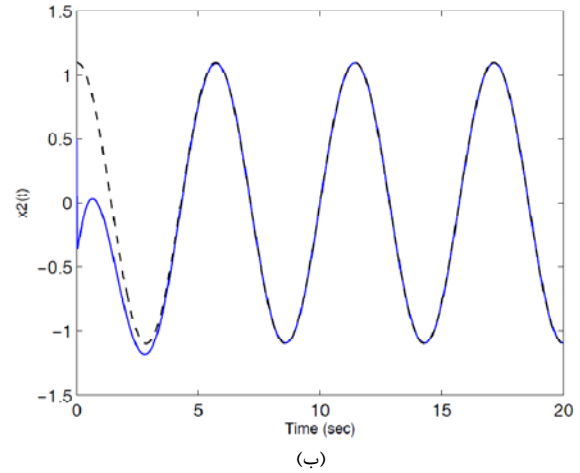
#### ۶- نتیجه‌گیری

مسئله کنترل ژيروسکوپ‌های غیرخطی با رفتار آشوبناک معرفی و استراتژی کنترل وفقی برای برآورده شدن اهداف مسئله پیشنهاد گردید. الگوریتم طراحی شده، همگرایی خطای تخمین پارامترهای نامعین مدل و نیز خطای تعقیب سیگنال مرجع به صفر را تضمین می‌نماید. با استفاده از قضیه پایداری لیاپانف، همگرایی خطای تخمین و پایداری سیستم حلقه بسته اثبات گردید. شبیه‌سازی‌های عددی مختلف انجام گرفته در مقاله، عملکرد مناسب کنترل‌کننده طراحی شده را نشان می‌دهد.





- Single-Axis Gyroscope Systems", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 51, 2008, pp. 355-364.
- [3] Chen H., "Chaos and Chaos Synchronization of a Symmetric Gyro with Linear-Plus-Cubic Damping", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255, No. 4, 2002, pp. 719-740.
- [4] Gallegos J., "Nonlinear Regulation of a Lorenz System by Feedback Linearization techniques", *Dynamics and Control*, Vol. 4, 1994, pp. 277-298.
- [5] Ge M., and Chen H., "Stability and Chaotic of a Rate Gyro with Feedback Control", *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 36, 1997, pp. 5373-5381.
- [6] Idowu B., Vincent U., and Njah A., "Control and Synchronization of Chaos in Nonlinear Gyros via Backstepping Design", *International Journal of Nonlinear Science*, Vol. 5, 2008, pp. 11-19.
- [7] Zhang J., Li C., and Zhang H., "Chaos Synchronization Using Single Variable Feedback Based on Backstepping Method", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 21, 2004, pp. 1183-1193.
- [8] Piccardi C., and Ghezzi L., "Optimal Control of a Chaotic map: Fix Point Stabilization and Attractor Confinement", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 7, 1997, pp. 437-446.
- [9] Polo M., and Molina M., "Regular Self-Oscillating and Chaotic Behavior of a PID Controlled Gimbal Suspension Gyro", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 21, 2004, pp. 1057-1074.
- [10] Yau H., "Nonlinear Rule-Based Controller for Chaos Synchronization of Two Gyros with Linear-Plus-Cubic Damping", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 34, 2007, pp. 1357-1365.
- [11] Chen G., and Dong X., *From Chaos Order: Methodologies, Perspective and Applications*, World Scientific, Singapore, 1998.
- [12] Lei Y., Xu W., and Zheng H., "Synchronization of Two Chaotic Nonlinear Gyros Using Active Control", *Phys. Lett. A*, Vol. 343, 2005, pp. 153-158.
- [13] Salarieh, H., "Comment on Synchronization of Two Chaotic Nonlinear Gyros Using Active Control", *Phys. Lett. A*, Vol. 372, 2008, pp. 2539-2540.
- [14] Pikovsky A., Rosenblum M., and Kurths J., *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge university press, United Kingdom, 2003.
- [15] Ioannou P., and Sun J., "Robust Adaptive Control", NJ: Prentice Hall, 1996.



شکل (۶): کنترل ژيروسکوپ غیرخطی با رفتار آشوبناک با اعمال ورودی کنترل قضیه ۳، الف) پاسخ زمانی  $x_1$  (-) و حالت مطلوب (-)، ب) پاسخ زمانی  $x_2$  (-) و سیگنال حالت مطلوب (-)، ج) ورودی کنترل  $u(t)$

## ۷- مراجع

- [1] Yan J., Hung M., and Lin J., "Controlling Chaos of a Chaotic Nonlinear Gyro Using Variable Structure Control", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, 2007, pp. 2515-2522.
- [2] Tsai N., and Wu B., "Nonlinear Dynamics and Control for