فلسفه تحلیلی، شماره سی و چهار، پاییز و زمستان ۱۳۹۷، ص۶۹-۱۰۸

تحلیل مفهومی اثبات ریاضیاتی[1]

حسین بیات[2]
دکتری فلسفه‌ی علم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

چکیده

وجه یا وجوه اشتراک اثبات‌های ریاضیاتی کدامند؟ تاکنون پاسخ‌های مختلفی به این پرسش ارائه شده است. برخی هر نوع اشتراک مفهومی بین اثبات‌ها را انکار می‌کنند، برخی دیگر اما قائل به دوگانگی یا چندگانگی مفهومی اثبات‌های ریاضی هستند. یعنی اثبات‌ها را در ذیل دو یا چند هسته مفهومی اساساً متمایز قرار می‌دهند. در این مقاله نشان می‌دهم که اولاً اثبات‌های ریاضی و غیر ریاضی از یک مقوله‌ی واحد یعنی استدلال موفق هستند؛ ثانیاً در همه اثبات‌های ریاضیاتی و در همه تلقی‌هایی که از این افراد بیان شده، استدلال ارائه شده باید درست باشد؛ یعنی متضمن الگویی وارسی‌پذیر، دقیق و اعتمادپذیر باشد. اگر دو شرط وارسی‌پذیر و دقت برقرار باشند استدلال مذکور می‌تواند متصف به صفت «ریاضیاتی» شود؛ و اگر شرط اعتمادپذیری برقرار باشد استدلال ریاضی مذکور می‌تواند متصف به صفت «درست» شود. بنابراین در همه اثبات‌های ریاضی و در همه تلقی‌ها از اثبات‌های ریاضی چهار مؤلفه مفهومی مشترک هستند: استدلال، وارسی‌پذیری، دقت و اعتمادپذیری. ثالثاً اختلاف‌نظرها درباره مفهوم اثبات ریاضی ریشه در تعبیرها و تفسیرهای مختلف فیلسوفان و ریاضی‌دانان از این مؤلفه‌ها دارد.

واژگان کلیدی: استدلال، درستی، اجماع، قانع‌کنندگی، مقبولیت نهادی، دقت، وارسی‌پذیری.

---

۱. تاریخ وصول: ۱۳۹۶/۳/۲؛ تاریخ تصویب: ۱۳۹۶/۷/۱۶

۲. پست الکترونیک: logicbay@yahoo.com

تلقی‌های مختلفی از مفهوم اثبات ریاضی وجود دارد. برخی مثل هیلبرت اثبات ریاضی را نوعی ساختار نشانه‌شناختی معین، می‌دانند و بنابراین منکر هر نوع اشتراک یا قرابت مفهومی با اثبات‌های غیرریاضی (مثل اثبات‌های علمی، فلسفی، و حقوقی) هستند. اما عده‌ای دیگر، مثل منطق‌گرایان، تلاش می‌کنند نشان دهند که اثبات‌های ریاضی هسته مفهومی یکسانی با سایر انواع اثبات‌ها دارند و فصل ممیّز آن‌ها از سایر انواع اثبات‌ها صوری بودن یا نظام‌مندی خالص آن‌ها است.[۱] برخی دیگر، مثل لاکاتوش، با تمایز دو نوع اثبات‌های صوری و غیر صوری در ریاضیات، اثبات‌های صوری را فاقد اشتراک مفهومی با سایر انواع اثبات می‌دانند اما نوع غیرصوری اثبات‌ها را با سایر انواع اثبات‌ها هم جنس می‌شمارند.[۲] دسته چهارم، یعنی شهودگرایان، اصرار دارند که اساساً اثبات‌های ریاضی باید منجر به یک ساختمان ذهنی معینی در ذهن ریاضی‌دان شوند و بنابراین با سایر انواع اثبات‌های غیر ریاضی قابل قیاس نیستند.[۳] این افراد نیز مانند دسته نخست، معتقدند «اثبات» در «اثبات ریاضی» و «اثبات غیر ریاضی» مشترک لفظی است و ما نباید به دنبال قدر مشترک مفهومی بین آن‌ها باشیم. اما آب خود این دو گروه به یک جو نمی‌ریزد و هر کدام مؤلفه‌های مفهومی خاصی را برای اثبات‌های ریاضی لازم می‌شمارند.

در این‌جا این پرسش اساسی مطرح می‌شود که آیا همه چیزهایی که به عنوان «اثبات ریاضی» گفته یا شناخته می‌شود، می‌توانند در ذیل یک مفهوم واحد قرار گیرند؟ پاسخ به این پرسش آیایی، در واقع پیش فرض فلسفی ما خواهد بود: بله، می‌توان اثبات‌ها را در ذیل یک مفهوم قرار داد. اما معقولیت این پاسخ بستگی به نحوه‌ی دفاع از استلزامات فلسفی آن دارد. بخصوص به نحوه پاسخ به این پرسش دارد که کدام

۱. همپل، کارل، ماهیت راستی ریاضی، ترجمه شاپور اعتماد، نشر مرکز، ۱۳۸۷ش، ص ۲۰۸.

۲. لاکاتوش، ایمره، اثبات ریاضیاتی چیست؟، ترجمه شاپور اعتماد، نشر مرکز، ۱۳۸۷ش، ص ۲٦۸.

۳. فان آتن، مارک، فلسفهٔ براوئر، ترجمه محمد اردشیر، انتشارات هرمس، ۱۳۸۷ش، ص ۵۹.

مؤلفه‌های مفهومی در همه اثبات‌ها و در همه تلقی‌ها از اثبات‌ها مشترک‌اند؟ چرا با وجود اشتراک مفهومی، تلقی‌ها و تعریف‌های مختلفی از اثبات وجود دارد؟

در این مقاله نشان داده می‌شود که اولاً اثبات‌های ریاضی و غیر ریاضی از یک مقوله‌اند: استدلال‌های موفق. ثانیاً در همه اثبات‌های ریاضی و همه تلقی‌ها از اثبات‌های ریاضی چهار مؤلفه مفهومی مشترک هستند: استدلال، وارسی‌پذیری، دقت و اعتمادپذیری. ثالثاً اختلاف‌نظرها درباره مفهوم اثبات ریاضی ریشه در تعبیرها و تفسیرهای مختلف فیلسوفان و ریاضی‌دانان از این مؤلفه‌ها دارد. یعنی ریاضی‌دانان و فیلسوفان، به دلیل اختلاف در نگرش‌ها (باورهای مبنایی) و گرایش‌ها (ارزش‌ها)، درباره هر کدام از این چهار مؤلفه اساسی تلقی‌ها و معیارهای مختلفی را معرفی کرده‌اند.

برای دفاع از مدعیاتم نیز از روش تحلیل مفهومی استفاده خواهم کرد. تحلیل هر مفهومی، مثل F، به بیان دقیق عبارت است از:

کشف و تمییز مؤلفه‌های مفهومی[۱] F؛ این مؤلفه‌ها چیزی جز ویژگی‌های مشترک و اجتناب‌ناپذیر مصادیق F نیستند و بر اساس قاعده تصورناپذیری (یا بیان‌ناپذیری) قابل کشف و تمییزند: ویژگی G برای اعضای F اجتناب‌ناپذیر است اگر و تنها اگر همه مصادیق F واجد ویژگی G باشند و نتوان خلاف آن را تصور یا بیان کرد.

این فرآیند و بخصوص آن‌چه که ما قاعده تصورناپذیری یا بیان ناپذیری نامیدیم در آثار فیلسوفان و نویسندگان تحلیلی به تعابیر مختلف توصیف شده است.[۲]

انواع اثبات: اثبات‌ها را به جهات مختلف می‌توان به انواع مختلف تقسیم کرد. مثلاً آن‌ها به جهت روش منطقی به دو نوع عمده‌ی اثبات‌های مستقیم و غیرمستقیم، و به

---

۱. گاهی معنا و مفهوم مترادف هم‌اند. در این‌صورت مؤلفه‌های مفهومی را می‌توانیم مترادف با مؤلفه‌های معنایی meaning components بگیریم. روشن است که در این صورت معنا صرفاً کاربرد قراردادی یک نشانه نیست. بلکه هویت نسبتاً مستقلی است که مؤلفه‌های آن را به هر نحو دل‌خواهی نمی‌توان ترکیب کرد. در این‌صورت ما معنا را صرفاً بلد نیستیم بلکه به آن معرفت گزاره‌ای هم داریم.

۲. رک. هاسپرس، جان، درآمدی بر تحلیل فلسفی، ترجمه موسی اکرمی، طرح نو ، ۱۳۸۷ش، ص۴۹.

جهت روش ریاضیاتی، به دو نوع عمده‌ی قیاسی و استقرایی قابل تقسیم هستند. در هر کدام از این انواع نیز می‌توان انواع فرعی‌تر را از هم متمایز کرد. مثلاً اثبات‌های غیر مستقیم گاهی از نوع برهان خلف و گاهی از نوع عکس نقیض[1] هستند؛ اثبات‌های استقرایی نیز گاهی از نوع ناقص و گاهی از نوع تام‌اند. به همین ترتیب، اثبات‌ها گاهی ساختی و گاه غیرساختی‌اند، گاه تقلیلی[2] گاه حذفی و گاه به گونه‌ای دیگراند. اما در هر حال، آن‌ها از هر نوعی که باشند و در هر قلمروی ریاضیاتی، مثل حسابان، هندسه، جبر، منطق، و غیره، به کار روند بی‌تردید متضمن یک مجموعه از مقدمات (یا معلومات)، یک نتیجه (یا مجهول) و یک فرآیند گذر از مقدمات (یا معلومات) به نتیجه (یا مجهول) هستند. این فرآیند گذر از مقدمات به نتیجه، یا تحصیل نتیجه از مقدمات، را اصطلاحاً استنتاج[3] می‌گویند. به تعبیر دیگر، «یک استنتاج عبارت است از عمل به دست آوردن نتیجه از یک مجموعه از مقدمات، اطلاعات یا شواهد».[4] از آن‌جایی‌که در اغلب موارد[5] مقدمات و نتیجه در قالب جمله‌ها یا ناظر به گزاره‌ها بیان می‌شوند، می‌توان رابطه بین مقدمات و نتیجه را به گونه‌ای دیگر نیز صورت‌بندی کرد: «زنجیره‌ای از گزاره‌هایی که دقیقاً یکی از آن‌ها نتیجه و مابقی مقدمات هستند، یا گام‌هایی که از مقدمات به نتیجه منتهی می‌شوند».[6] معمولاً این تلقی از رابطه بین مقدمات و نتیجه را استدلال[7] می‌نامند. گاهی نیز البته استدلال به معنای وسیع‌تری به کار می‌رود و افزون بر فرآورده، یعنی دنباله جملات، فرآیند گذر را نیز شامل می‌شود. اگرچه در کاربرد استدلال و استنتاج وحدت رویه کاملی در کار نیست اما معمولاً این تمایزها در متون دقیق‌تر به

1. Proof by contraposition
2. Proof by exhaustion
3. Inference
4. Williamson, J., Federica Russo (eds), *Key Terms in Logic*, Continuum Press, 2010, p.37.

۵. به جز استنتاج‌های غیرنمادی، مثل استنتاج‌های تصویری.

6. Ibid, p.5.
7. Argument

چشم می‌خورد. اگر بخواهیم یکی از این معانی را به عنوان مؤلفه اساسی اثبات ترجیح دهیم باید ملاحظات فلسفی خاصی داشته باشیم. مثلاً از نظر صورت‌گرایان و منطق‌گرایان دنباله‌ای که بین مقدمات و نتیجه برقرار است مهم است تا فرآیند گذر از مقدمات به نتیجه و بنابراین شاید «استدلال به معنای خاص» ارجح خواهد بود. اما برای شهودگرایان و شبه تجربه‌گرایانی مثل لاکاتوش بیشتر فرآیند استنتاج مهم است تا فرآورده آن یعنی استدلال. ما در این‌جا «استدلال» را به معنای اعم[۱] در نظر می‌گیریم: فرآیند شناختی یا منطقی یا زبانی گذر از مقدمات به نتیجه که با هدف معینی انجام می‌شود. در یک بیان کلی می‌توان گفت که هدف مشترک در همه استدلال‌ها نشان دادن درستی یا مطلوبیت[۲] (یعنی، کارایی، یا مقبولیت،[۳] یا صادق[۴] بودن، یا درست ساخت[۵] بودن) است. همین جا دو مؤلفه‌ی مفهومی اساسی در اثبات‌های ریاضیاتی و بلکه در هر اثباتی بر ما آشکار می‌شود: استدلال و درستی (یا مطلوبیت).

استدلال: طبق قاعده تصورناپذیری، استدلال یک مؤلفه اساسی برای اثبات است. زیرا نمی‌توان اثباتی را تصور کرد که در آن هیچ استدلالی به کار نرفته باشد. در واقع همه اثبات‌های ریاضیاتی متضمن یک مدعا و یک تلاش با هدف نشان دادن مطلوبیت آن مدعا هستند و این تلاش چیزی جز گام‌های استدلال نیست.

ما در این‌جا به همین توصیف کلی از استدلال بسنده می‌کنیم زیرا اگر بخواهیم توضیح بیشتری درباره ماهیت استدلال، یعنی کارکردها یا اهداف یا ویژگی‌های آن، بدهیم پای سایر ملاحظات به میان خواهد آمد و ما را درگیر مناقشه‌های دیگر خواهد کرد. مثلاً از نظر واقع‌گرایان، یعنی ریاضی‌دانانی مثل لیتلوود، هاردی، گودل و فرگه،

۱. این معنای عام استدلال را «تعقل» (reasoning)، نیز می‌توان نامید.

2. favorability
3. admissibility
4. true
5. Well form

مهم‌ترین کارکرد استدلال ریاضیاتی تضمین صدق مدعیات ریاضیاتی است، و از این نظر تنها فرق استدلال ریاضیاتی و غیر ریاضیاتی در نوع مدعیات و نوع توجیه است. در حالی که از نظر ناواقع‌گرایان، مثل هیلبرت، براوئر، ویتگنشتاین و دیگران، توقع چنین کارکردی از استدلال ریاضیاتی نتیجه یک سوءتفاهم است. هدف استدلال‌گر، از نظر واقع‌گرایان و ناواقع‌گرایان، به ترتیب، نشان دادن صدق یا درست ساختی نتیجه است. هیچ اجماعی بر سر این اهداف و کارکردها وجود ندارد به‌طوری‌که فرگه تلقی ناواقع‌گرایانه هیلبرت را به باد انتقاد می‌گیرد[1] و در مقابل، ویتگنشتاین تلقی واقع‌گرایانه از استدلال را مهلک[2] می‌شمارد.[3] به همین ترتیب، اگر بخواهیم به ویژگی مقدمات و نتیجه و ویژگی خود این گام‌ها تصریح کنیم به معنای مشخص‌تری از استدلال می‌رسیم؛ اما در این‌جا نیز اختلافات بیشتر آشکار می‌شود. به عنوان مثال، کوپی تصریح می‌کند که هم مقدمه و نتیجه و هم گام‌هایی که برای گذر از مقدمه به نتیجه برداشته می‌شود، از جنس «جملات» هستند.[4] تلقی جمله‌ای یا گزاره‌ای از استدلال مطمئناً به مذاق صورت‌گرایان و منطق‌گرایان خوش خواهد آمد. اما شهودگرایان نظر دیگری دارند. فان آتن در توصیف این گام‌ها و تفاوت تلقی شهودگرایان با دیگران می‌گوید: «برای شهودگرا، اثبات عبارت است از گام‌هایی که ساختمان‌پذیری را حفظ می‌کند؛ [اما] برای ریاضی‌دان کلاسیک، اثبات عبارتست از گام‌هایی که حقیقت مستقل از ذهن را حفظ می‌کند».[5] در هر حال، هر اثباتی متضمن یک یا چند گذر استدلالی[6] است، حال چه این «گذر» به معنای

۱. نقل قول از Shapiro, S., *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2005, p.302.

2. fatal

3. Frascolla, P., *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Routledge, New York, 2006, p.72.

4. Copi, I. M., and Carl Cohn, *Introduction to Logic*, Macmillan Publishing Company, 1990, p.16.

۵. فان آتن، فلسفه براوئر، ترجمه محمد اردشیر، ص ۵۹.

6. argumentative passage

گذشتن از یک نشانه به نشانه‌ی دیگر تعبیر شود (یعنی، تعبیر صورت‌گرایانه)، یا از یک گزاره به گزاره دیگر (یعنی، تعبیر منطق‌گرایانه) یا از یک عمل ذهنی به عمل ذهنی دیگر (یعنی، تعبیر شهودگرایانه). به همین ترتیب، هر گذر استدلالی با هدف نیل به یک امر مطلوب انجام می‌شود، حال، این امر مطلوب، چه تبدیل درست نشانه‌ها[1] باشد، یا تضمین صدق نتیجه، یا ساختن یک ساختمان ریاضیاتی در ذهن.

گرچه هر اثباتی متضمن یک گذر استدلالی است، اما روشن است که هر گذر استدلالی لزوماً درست نیست، یعنی لزوماً به امر مطلوب منجر نمی‌شود. مثلاً گذرهای استدلالی در دو استدلال زیر را با هم مقایسه کنید:

مدعا (۱): جمع دو عدد زوج، مثل a وb، زوج است.

استدلال (۱): اگر a و b دو عدد زوج باشند آنگاه دو عدد طبیعی مثل k_1 و k_2 وجود دارند به نحوی که $a=2k_1$ و $b=2k_2$. بنابراین $a+b = 2k_1+2k_2$، که بنابر قاعده‌ی توزیع‌پذیری داریم: $a+b= 2k_1+ 2k_2 = 2(k_1+k_2)= 2k_3$؛ یعنی عدد a+b زوج است و این همان نتیجه مطلوب است.

استدلال (۲): فرض کنیم E مجموعه همه اعداد زوج باشد. حال زوج بودن حاصل جمع دو عدد زوجرا بر روی اعضای مختلف مجموعه E، مثل a و b، آزمایش می‌کنیم:

$$(a=2 , b= 2) \rightarrow a+b= 4$$
$$(a=2 , b= 4) \rightarrow a+b= 6$$
$$(a=4 , b= 6) \rightarrow a+b= 10$$
$$\vdots$$
$$(a\in E , b\in E) \rightarrow a+b \in E$$

بنابراین به حکم استقراء تجربی، جمع دو عدد زوج زوج است.

1. Correct transformation of signs

استدلال ۲ از الگویی پیروی می‌کند که در زندگی روزمره و حتی علوم تجربی می‌تواند به عنوان الگوی درستی پذیرفته شود. اما مطمئناً برای ریاضی‌دانان چنین نیست. یعنی در ریاضیات به عنوان یک گذر صحیح یا معتبر پذیرفته نمی‌شود. با تأمل در این مثال روشن می‌شود که اثبات‌ها «استدلال‌های ریاضیاتی درست» هستند و نمی‌توان خلاف آن را تصور کرد. بنابراین مفهوم درستی را نیز باید به عنوان یک خصیصه‌نما برای اثبات ریاضیاتی به حساب آورد.

درستی:[1] استدلال درست (یعنی، مشروع[2] یا صحیح[3] یا معتبر[4]) طبق تعریف تصریحی ما از استدلال و توضیحی که درباره هدف استدلال گفتیم، عبارتست از فرآیند گذر از مقدمات به نتیجه به‌طوری‌که مطلوبیت نتیجه را نشان دهد. مطلوبیت نیز در رویکردهای مختلف تعابیر مختلف یافته است: معقولیت، درست اجرایی، مقبولیت، صدق، درست ساختی و ساختمان‌پذیری. هر کدام از این‌ها مورد توجه برخی از فیلسوفان قرار گرفته است. مثلاً از نظر منطق‌گرایان و شبه تجربه‌گرایان، استدلال درست استدلالی است که صحیح باشد؛ یعنی، صدق مقدمات، صدق نتیجه را تضمین کند. بنابراین درستی استدلال از نظر آنان یعنی صدق نگهداری.[5] صورت‌گرایان و شهودگرایان نیز، به ترتیب، با اعتبار نحوی و حفظ ساختمان‌پذیری، مفهوم درستی استدلال ریاضیاتی را توضیح خواهند داد. در رویکرد نهادگرایانه یا جامعه‌شناختی نیز درستی با مقبولیت نهادی یا اجماع مساوق است. در این‌جا به دو تعبیر معقولیت و درست اجرایی،[6] که به ترتیب به‌وسیله جاناتان کوهن و ویتگنشتاین ارائه شده‌اند، می‌پردازیم.

1. correctness
2. legitimate
3. sound
4. valid
5. truth preservation
6. performance correctness

درستی ریاضیاتی به‌مثابه معقولیت ریاضیاتی

جاناتان کوهن مشروعیت استدلال‌ها را تابع معیارها و نظریه‌های عقلانیت می‌داند، او ۹ نوع معیار یا «قاعده برای قوه تعقل» را بطور مشخص متمایز می‌کند و درستی یک استدلال را در مطابقت با آن‌ها توضیح می‌دهد. مثلاً عقلانیت قیاسی نوعی عقلانیت است که بر انطباق استدلال با قواعد قیاسی استوار است. بر این اساس استدلال ۱ برخلاف ۲، درستی قیاسی دارد چون گذر استدلالی در ۱ مطابق با قواعد منطق قیاسی است اما در استدلال ۲ چنین نیست. البته درستی ریاضیاتی فراتر از درستی قیاسی است. مثلاً استنتاج «$x>12$» از دو مقدمه «x عدد اول است» و «$x>11$» معقول و بنابراین درست است. می‌توان گفت که درستی اثبات ریاضیاتی، در این تعبیر، عبارتست از مطابقت با معیارها یا قواعدی که نتایج ریاضیاتی معقولی را موجب می‌شوند.

درستی ریاضیاتی به‌مثابه درستی اجرا

شاید پیشتر و بیشتر از همه ویتگنشتاین درباره مفهوم درستی اثبات ریاضیاتی مداقه کرده است. او در سخنرانی سوم، از مجموعه سخنرانی‌ها درباره مبانی ریاضیات، تحلیل بدیعی از مفهوم اثبات ریاضیاتی ارائه می‌دهد و یک تعبیر شبه صورت‌گرایانه از درستی اثبات ریاضیاتی پیشنهاد می‌کند: درستی اثبات ریاضیاتی یعنی درستی انجام تبدیلات علائم معین. او در طی این سخنرانی و گفت‌وگو با تورینگ می‌پرسد: وقتی کسی از تو می‌خواهد اثبات کنی که ۷۵۶=۳۶ × ۲۱ چه می‌کنی؟ آیا جز این است که برای اثبات این مدعای ریاضیاتی ترکیبی از نمادها را به این شکل (figure): (استدلال ۳)

$$\begin{array}{r} ۲۱ \\ \underline{۳۶} \\ ۱۲۶ \\ \underline{۶۳} \\ ۷۵۶ \end{array}$$

نشان می‌دهی؟ «اما چرا به چنین شکلی یک اثبات می‌گوییم؟» او مطابق با نظریه بازی‌های زبانی خودش این‌گونه پاسخ می‌دهد: چون ما از کلاس درس یاد گرفته‌ایم واژه‌های «اثبات»، «تساوی»، «بیشتر» و غیره را این‌گونه به کار ببریم و لزومی ندارد که بدانیم چرا باید آن‌ها را این‌گونه به کار برد. او در توضیح این پاسخ از یک آزمایش فکری استفاده می‌کند. فرض کنید ما عده‌ای از نوآموزان را آموزش می‌دهیم تا یک کاغذ دیواری بسازند و روی آن را با اثبات‌های ریاضیاتی، یعنی شکل‌هایی شبیه به آن‌چه که در بالا آوردیم، پر کنند. برای این کار هنگام یاد دادن اثبات‌ها می‌گوییم که «ثابت کن فلان و فلان» به‌طوری‌که منظور ما از فلان و فلان در واقع همان جمله‌های ریاضیاتی باشد. و فرض کنید که آن‌ها این روندها را یاد بگیرند اما آن‌قدر باهوش نباشند که بتواند در ساده‌ترین مسائل عملی نیز از آن‌ها استفاده کنند. یعنی مثلاً نتوانند به این پرسش پاسخ دهند که اگر قیمت یک آلوچه فلان قدر باشد آن‌گاه قیمت ۶ آلوچه چقدر است؟ حال آیا نمی‌توان گفت که آن‌ها ریاضیات را یاد گرفته اند؟ خود ویتگنشتاین جواب مثبت می‌دهد و توضیح می‌دهد که آن‌ها حسابان را یاد گرفته‌اند بدون آن‌که بتوانند آن‌را به کار گیرند. معنای اثبات ریاضیاتی چیزی بیش از همین تبدیل صحیح علائم نیست. فرسکولا تلقی ویتگنشتاین از اثبات ریاضیات را این‌گونه صورت‌بندی می‌کند: اجرای درست تبدیلات علائم معین.[1] ویتگنشتاین برای درک بهتر این معنا از «اثبات» از ما می‌خواهد که آن را با کاربرد «اثبات» در بازی زبانی دیگری که در زندگی روزمره انجام می‌دهیم مقایسه کنیم. مثلاً وقتی کسی می‌گوید «جاناتان قاتل است چون او را در صحنه جرم در حالی‌که دستش تپانچه بود دیده‌اند». در این‌جا «اثبات» را به‌مثابه راستی آزمایی یک مدعا به کار برده‌ایم. از نظر ویتگنشتاین اگر ما معنای «اثبات ریاضیاتی» را هم به معنای راستی آزمایی بگیریم مرتکب یکی از مهلک‌ترین خطاها شده‌ایم: «برای فهم فلسفی هیچ چیز

1. Frascolla, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, p.138.

کشنده‌تر از این تلقی درباره اثبات ریاضیاتی و آزمایش نیست که آن‌ها را به عنوان دو روش متفاوت و در عین حال قیاس‌پذیری از راستی آزمایی بدانیم». [۱]

ویتگنشتاین گرچه برداشت شبه صورت‌گرایانه‌ای از استدلال و اثبات ریاضیاتی دارد اما برخلاف صورت‌گرایان منبع درستی اثبات‌ها را نه اصول نظام بخش [۲] فراریاضیاتی مثل تمامیت و سازگاری بلکه بازی زبانی آموخته شده می‌داند. یعنی اگر از او بپرسیم که چه چیزی درستی این تبدیلات را تعیین می‌کند؟ او خواهد گفت: قواعدی که قبلاً آموزش داده شده‌اند. مثلاً ما قبلاً نحوه نوشتن شکل بالا را برای اثبات ۷۵۶=۳۶×۲۱ در کلاس حساب یادگرفته‌ایم و اگر آن آموخته‌ها را به درستی پیاده کنیم تبدیلات ما درست خواهند بود. [۳]

پس تاکنون برای ما روشن شد که اثبات ریاضیاتی یعنی استدلال ریاضیاتی درست. توجه کنید که استدلال در معنای عامی که ما گرفتیم شامل تعبیر «اجرای تبدیل علائم» ویتگنشتاین هم می‌شود. چون ما نیز استدلال را «فرآیند گذر از مقدمات به نتیجه» تعریف کردیم و گفتیم که مقدمات و نتایج می‌توانند مجموعه‌ای از علائم هم باشند. هم‌چنین این نکته نیز روشن شد که درستی، در هر تعبیری، بر تبعیت از قواعد و روندهای معینی که از پیش معین شده‌اند استوار است. تبعیت از قواعد و معیارها در واقع نیل به امر مطلوب در استدلال، یعنی توجیه یا معقولیت یا نظایر آن را، تضمین می‌کند به همین دلیل است که آن (یعنی، تبعیت استدلال‌ها از قواعد و روندهای معین) را با درستی استدلال‌ها هم معنا می‌گیریم.

حال این پرسش خودنمایی می‌کند که خود این روندها و معیارها اعتبارشان را از کجا می‌گیرند؟ همواره دو پاسخ نهایی می‌توان به این پرسش داد: اجماع (یا مقبولیت

1. Frascolla, *Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics*, p.72.
2. regulative
3. Diamond, C., *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca, NewYork, 1976, p.38.

نهادی) و قانع کنندگی. مثلاً صورت‌گرایان گرچه منبع درستی را اصول نظام بخش فراریاضیاتی معرفی می‌کنند اما اگر از آنان بخواهیم توضیح دهند که چرا مصداق این اصول باید مثلاً سازگاری و نه ناسازگاری نظام باشد، حتی آن‌ها نیز با توسل به یکی از این دو مؤلفه یا هر دو، به عنوان منبع درستی یا مشروعیت استدلال‌های فراریاضیاتی، به پرسش ما پاسخ خواهند داد.

مقبولیت[۱] یا اجماع[۲]

فرض کنید مریم ادعا کند که حدس گلدباخ را اثبات کرده است. با بررسی ادعای مریم متوجه می‌شویم که او در استدلال خود از قواعد و الگوهایی استفاده کرده است که تاکنون هیچ گروه یا جامعه ریاضیاتی آن‌ها را به کار نبرده است. آیا او واقعاً حدس گلدباخ را اثبات کرده است؟ به تعبیر دیگر، آیا در چنین شرایطی ممکن است ریاضی‌دانان بگویند: «مریم حدس گلدباخ را اثبات کرده است»؟ پاسخ مسلماً منفی است. در واقع او ممکن است از قواعد و معیارهای خصوصی خود تبعیت کرده باشد، و از این جهت استدلال او واجد نوعی «درستی خصوصی» باشد، اما چنین تبعیتی برای دیگران قابل اعتناء نیست. زیرا جمله «حدس گلدباخ دارای درستی خصوصی است» حتی اگر با معنا باشد، قابل بررسی و داوری همگانی نیست و بنابراین توقع قبول آن نامعقول است. دوباره تصور کنید که عده‌ای از ریاضی‌دانان در حوزه نظریه اعداد، مدعای مریم را قابل اعتناء بیابند و معنای علائم و قواعد به کار رفته در اثبات او را یاد بگیرند اما باز هم استدلال او را درست تشخیص ندهند، آیا می‌توان گفت که «مریم حدس گلدباخ را اثبات کرده است؟» این‌جا نیز پاسخ منفی است. پس می‌توان گفت که فهم و پذیرش اجتماعی یکی دیگر از مؤلفه‌های اثبات است.

1. acceptability
2. consensus

اجماع، از نظر نهادگرایان، یعنی طرفداران تبیین جامعه‌شناختی اثبات، نه تنها شرط لازم بلکه شرط کافی درستی ریاضیاتی است. یعنی از نظر آن‌ها ما هر چه در دلایل درستی استدلال ۱ و نادرستی استدلال ۲ کند و کاو کنیم در نهایت به یک توجیه جامعه‌شناختی خواهیم رسید: یک ارزش یا احساس یا باور یا قرارداد جمعی بین اعضای یک جامعه ریاضیاتی به یک استدلال مشروعیت می‌دهد. بنابراین «برای این‌که بفهمیم چرا جامعه ریاضی‌دانان راه حلی را به عنوان یک اثبات ریاضی می‌پذیرد یا نمی‌پذیرد، باید به سراغ فهم ارزش‌هایی برویم که ریاضی‌دانان بدان ارج می‌نهند».[1] گفتیم که ویتگنشتاین درستی اثبات را بر اساس بازی زبانی آموخته شده در جامعه ریاضیاتی توضیح می‌دهد، اگر از نظر او جامعه ریاضیاتی در تعیین درستی استدلال یک نقش تام و فیصله بخش ایفاء می‌کند می‌توان او را نیز در زمره قائلین به نظریه اجماعی اثبات در نظر گرفت. برخی چنین تلقی از ویتگنشتاین دارند اما در همین جا خواهیم دید که دیدگاه ویتگنشتاین در این باره چندان قاطع و صریح نیست.

در هر حال، برای کسانی که اجماع را منبع اصلی مشروعیت اثبات‌ها معرفی می‌کنند، اثبات یعنی استدلال ریاضیاتی که به اجماع ریاضی‌دانان رسیده باشد (نهادگرایی قوی) یا استدلالی که بر اساس الگوها یا قواعد متفق فیه ارائه شده باشد (نهادگرایی ضعیف). اما ریاضی‌دان، چه در مقام ارائه اثبات و چه در مقام داوری درباره یک اثبات، به چیزی بیش از اجماع نیاز دارد. زیرا اولاً اجماع همیشه بر سر موضوعی است که از قبل محقق است و نمی‌توان بر سر هیچ به توافق رسید. درباره اثبات یا الگوهای اثبات نیز باید از پیش اموری با ویژگی‌ها و کارکردهای معین در کار باشند تا عده‌ای بر سر آن‌ها به اجماع برسند. ثانیاً تاریخ اثبات نشان می‌دهد که مفهوم و الگوی اثبات بارها دگرگون شده است. اگر اجماع همه‌ی آن چیزی باشد که به یک اثبات مشروعیت می‌بخشد، پس چگونه این تحول مجال تحقق یافته است؟ چگونه

---

۱. مقدم حیدری، غلامحسین، جامعه شناسی ریاضی، تهران، انتشارات سمت، ۱۳۸۷ش، ص۱۴۵.

ریاضی‌دانان پیشگام موفق شده‌اند الگوها، قواعد و مفاهیم متفاوتی از اثبات را خلق و نامزد اجماع کنند؟ پس ریاضی‌دان به چیزی بیش از اجماع نیاز دارد و آن عبارتست از معیار یا دلیل رسیدن به یک اجماع. اما این معیار یا دلیل چه می‌تواند باشد؟ یک پاسخ ساده می‌تواند قدرت قانع‌کنندگی استدلال‌ها باشد: استدلال ۱، بر خلاف استدلال ۲، قانع‌کننده است. قانع‌کنندگی اثبات‌ها ارتباط وثیقی با مشروعیت آن‌ها دارد. این ارتباط در واقع یک ارتباط دوسویه و تبیینی است. یعنی اولاً آن‌چه برای یک جامعه، یا در راستای ارزش‌ها و اهداف یک جامعه، قانع‌کننده است، مشروع است و برعکس. ثانیاً علت اجماع بر سر یک اثبات یا الگوی استدلالی قدرت قانع‌کنندگی آن است. بنابراین باید از کسانی که وسوسه می‌شوند تا درستی اثبات‌ها را صرفاً بر اساس مقبولیت جمعی یا اجماع توضیح دهند بپرسیم: آیا ما قواعد تبدیل علائم را رعایت نمی‌کنیم تا کسی را قانع کنیم؟ اتفاقاً تورینگ این سؤال را از ویتگنشتاین می‌پرسد و او جواب مثبت می‌دهد[1] (همین پاسخ ویتگنشتاین است که ما را در مورد اجماع محوری و نهادگرا بودن او مردد می‌کند). در مثال مریم نیز دلیل به اجماع نرسیدن ریاضی‌دانانی که معنای علائم و قواعد مریم را یاد گرفته بودند اما حاضر نبودند بگویند «او حدس گلدباخ را اثبات کرده است»، در واقع، قانع نشدن آنان بود.

قانع‌کنندگی[2]

طبق آن‌چه تاکنون گفتیم، یک اثبات هر چه باشد باید اسباب اقناع جامعه ریاضیاتی، اعمّ از شخص اثبات‌کننده یا سایر وارسی کننده‌ها، را فراهم آورد. قانع‌کنندگی نیز مانند اجماع یک ویژگی تشکیکی و وابسته به هدف یا ارزش است. یعنی مثلاً استدلال ۲ بر اساس الگویی ارائه شده است که در اقناع مخاطبان ریاضیاتی ناتوان است اما ممکن

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, p.127.
2. persuasive effect

است برای یک کارآگاه یا دانشمند تجربی کافی باشد. حتی همه‌ی استدلال‌های قانع کننده در ریاضیات برای همه‌ی ریاضی‌دانان قانع‌کننده نیست. مثلاً استدلال‌هایی که در آن‌ها از اصل طرد شق ثالث استفاده شده است برای شهودگرایان قانع‌کننده نیست، چون آن را ضامن ساختنی بودن نتیجه نمی‌دانند. شاید ما دلیل آن‌ها را نپذیریم، اما بر اساس مولّفه قانع‌کنندگی می‌فهمیم که آن‌ها نسبت به چنین استدلال‌هایی چه حس و رأیی دارند. آن‌ها همان حس و رأیی را دارند که ما درباره استدلال ۲ داریم. ما بر اساس مؤلفه‌ی قانع‌کنندگی می‌فهمیم که شهودگرایان چرا نمی‌پذیرند استدلال‌های غیرساختی یک اثبات نیست. این فهم ما مدیون قدرت فراتبیینی مفهوم «قانع‌کنندگی» است. ما با این مؤلفه می‌توانیم درباره مشروعیت اثبات‌ها یا الگوهای استدلالی نوظهور نیز تصمیم عقلانی و نقادانه‌ای اتخاذ کنیم.

هم‌چنین قانع‌کنندگی نیز مانند اجماع متضمّن یک جنبه مهمی از اثبات‌ها است که بسیاری از فیلسوفان ما را به آن توجه داده‌اند. تیموچکو آن را جنبه انسان‌شناختی[1] اثبات‌ها می‌داند: «این واقعیت کلید فهم ریاضیات به عنوان یک فعالیت انسانی[2] است. اثبات‌ها به این دلیل برای یک ریاضی‌دان دل‌خواه قانع‌کننده هستند که می‌توانند نقش خودشان را به عنوان قاضی در جامعه ریاضیاتی ایفا کنند».[3] به بیان مشخص‌تر، مشروعیت و قانع‌کنندگی، به‌ترتیب، مؤلفه‌های جامعه‌شناختی و روان‌شناختی اثبات‌ها هستند. فیلسوفان در نیم قرن اخیر توجه خاصی به این مؤلفه‌های اثبات کرده‌اند. مثلاً اولسکر، ضمن پذیرش تمایز دو معنای متفاوت اثبات صوری[4] و عملی[5] که توسط روبن هرش[6]

1. Anthropologic feature
2. Human activity
3. Tymoczko, Th., “The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance”, *The Journal of Philosophy*, vol.76, no.2, 1979.
4. formal
5. practical
6. Ruben Hersh

انجام گرفته است، معنای عملی را متضمّن جنبه ذهنی[1] اثبات می‌داند:

معنای عملی اثبات‌ها مستلزم این است که اثبات یک جنبه ذهنی داشته باشد. هدف یک اثبات عبارتست از متقاعد کردن جامعه ریاضی‌دانان به صدق یک قضیه. یعنی ریاضیات یک تلاش انسانی[2] است، چون اثبات‌ها توسط انسان نوشته می‌شوند خوانده می‌شوند فهمیده می‌شوند تصویب می‌شوند و به کار گرفته می‌شوند.[3]

هم‌چنان‌که نهادگرایان، اجماع را نقطه پایان تحلیل می‌دانند، برخی فیلسوفان نیز قانع‌کنندگی را همه‌ی آن چیزی می‌دانند که برای یک اثبات لازم است. تیموچکو معتقد است که ویتگنشتاین به چنین دیدگاهی باور دارد.[4] اما درباره هرش و دیویس با قاطعیت بیشتری می‌توان سخن گفت. آن‌ها معتقدند که این رأی، یعنی کافی بودن قدرت اقناعی برای اثبات شمردن یک استدلال، درباره نوعی از اثبات‌های ریاضیاتی، یعنی همان اثبات‌های عملی که در بالا به آن‌ها اشاره شد، کاملاً صادق است. اما اولاً همان‌طور که تیموچکو نیز اشاره می‌کند این تلقّی از اثبات نمی‌تواند توصیف کاملی از ماهیت اثبات‌ها به دست دهند؛ از این رو «اغلب فیلسوفان از این تلقّی ناراضی‌اند و معتقدند باید ویژگی‌های عمیق‌تری برای اثبات در کار باشند که بتوانند دست‌کم تا اندازه‌ای تبیین کنند که چرا اثبات‌ها اقناع کننده‌اند».[5] ثانیاً به نظر می‌رسد که اگر ما در این ایستگاه توقف کنیم، یعنی اگر دلیل اثبات بودن استدلال ۱ یا ۳ را درستی آن‌ها بدانیم و دلیل درستی را نوعی اجماع بر سر الگوی استدلالی به کار رفته در آن بدانیم و دلیل اجماع را نیز قانع‌کننده بودن این الگو بدانیم، در این صورت ما اثبات‌های ریاضیاتی را به یک امر

1. subjective side
2. The human race
3. Olsker, T. C., “What Do We Mean by Mathematical Proof?” *Journal of Humanistic Mathematics*, vol.1, no.1, 2011, p.34.
4. Tymoczko, “The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance”, *The Journal of Philosophy*, p.60.
5. Ibid.

روان‌شناختی فروکاسته‌ایم و این آشکارا بر خلاف شرط عینیت و عقلانیت است. توقف اجماع و قانع‌کنندگی به یکدیگر نیز، به دلیل دوری بودن، قابل دفاع نیست. ترکیب فصلی اجماع و اقناع نیز چاره‌ساز نیست. یعنی اگر بگوییم اثبات ریاضیاتی عبارت است از استدلالی که به دلیل اجماع یا اقناع یا هر دو درست باشد، باز ایرادها پابرجاست. بنابراین به نظر می‌رسد که باید تحلیل‌مان را تا نقطه‌ای ادامه دهیم که این ایرادها برطرف شود. پرسشی که در این‌جا باید پاسخ دهیم این است: چرا یک استدلال ریاضیاتی قانع‌کننده می‌شود؟ به عبارت دقیق‌تر، چگونه می‌توان قانع‌کنندگی اثبات‌ها را به نحو قابل دفاعی توضیح داد؟ تیموچکو معتقد است با توسل به دو ویژگی می‌توان این کار را انجام داد: وارسی‌پذیری و صوری‌پذیری.

وارسی‌پذیری[۱]

وارسی‌پذیری یک ویژگی قابلیّتی[۲] ممکن برای استدلال‌های قیاسی است و آن را نباید با آزمون‌پذیری[۳] که ویژگی قابلیتی گزاره‌ها است خلط کنیم. وارسی‌پذیری را معمولاً درباره استدلال‌های ریاضی و قیاسی یا به‌طور کلی پیشینی به کار می‌برند و در حالت کلی‌تر، یعنی برای استدلال‌های پیشینی و پسینی، از سایر واژه‌ها مثل بررسی‌پذیری استفاده می‌کنند. بررسی‌پذیری به‌طور کلی یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های براهینی عقلی، اعمّ از قیاسی و استقرایی است که بسیاری به آن تأکید کرده‌اند.[٤] مثلاً قاعده یازدهم از قواعد هدایت ذهن دکارت به شرط «مرور پیوسته مقدّمات برای توجیه یقینی نتیجه» می‌پردازد

1. surveyability
2. dispositional features
3. testability

٤. رک. دکارت، رنه، اصول فلسفه، ترجمه منوچهر صانعی دره بیدی، تهران، انتشارات بین المللی الهدی، ۱۳۷۶ش، ص۱۳۴؛ پوپر، کارل، منطق اکتشاف علمی، ترجمه سید حسین کمالی، انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۸۴ش، ص۱۲۷؛ بدجینی، جولیان، «فلسفه به مثابه داوری»، ترجمه محمد کاظم علوی و دیگران؛ فلسفه به مثابه روش، کارل، هاوی و دیگران، تهران، پژوهشکده مطالعات فرهنگی و اجتماعی، ۱۳۸۹ش، ص۲۴۵.

که گرچه بررسی‌پذیری را به طور مستقیم به عنوان یک ویژگی به استدلال عقلی نسبت نداده اما لازمه تحقق این قاعده فرض چنین قابلیتی است. به عقیده پوپر نیز «احراز اطمینان از اعتبار حجت‌های منطقی، یک راه بیشتر ندارد، و آن بیان استدلال به صورتی است که آزمودنش به آسان‌ترین وجه میسر باشد».[۱]

به نظر می‌رسد که اصطلاح «وارسی‌پذیری» را تیموچکو، در مقاله «مسئله چهار رنگ و اهمیّت فلسفی آن»، به عنوان یک ویژگی برای اثبات ریاضیاتی باب کرد. از نظر او وقتی می‌گوییم که یک اثبات وارسی‌پذیر است یعنی «می‌توان آن را به نحو معین[۲] و به‌وسیله‌ی اعضای جامعه ریاضی بررسی[۳] کرد». اما این تنها تعریف از وارسی‌پذیری نیست. باسلر (۲۰۰۶) و کُلمن (۲۰۰۸) انواع و تلفی‌های مختلف وارسی‌پذیری را برشمرده‌اند.[٤] کلمن در تحلیل خود، افزون بر تلقی تیموچکو، تلقی‌های دکارتی و ویتگنشتاینی از این مفهوم را نیز از هم متمایز می‌کند:

وارسی‌پذیری دکارتی: یک اثبات وارسی‌پذیر است یعنی همه جزئیات آن در آگاهی یک شخص حاضر است.

وارسی‌پذیری ویتگنشتاینی: یک اثبات وارسی‌پذیر است یعنی ساختمانی در کار است که می‌توان با اطمینان آن را بازتولید کرد، چیزی شبیه به تکثیرپذیری تصاویر.

روشن است که در همه این تلقی‌ها، به نقش عامل انسانی یا عقلانی و نیز به قابلیت بررسی یا تولید مجدد گام‌ها توجه شده است. اما افزون بر این‌ها، برای تمایز وارسی‌پذیری از مفهوم کلی‌تر بررسی‌پذیری، باید به نقش مفاهیمی که پیشینی بودن این بررسی‌پذیری را تضمین می‌کنند نیز توجه و تصریح کرد. این نقش را، در دو تعریف دکارتی و ویتگنشتاینی، به ترتیب، مفهوم «حضور همه گام‌ها» در ساحت آگاهی عامل

۱. پوپر، منطق اکتشاف علمی، ترجمه سید حسین کمالی، ص۱۲۷.

2. definitively
3. check
4. Bassler, Coleman

انسانی، و مفهوم «وجود ساختمان»های معین در سطرها یا «ساختارمندی» علائم موجود در گام‌ها ایفاء می‌کنند. بنابراین شاید بتوان گفت که وارسی‌پذیری یک استدلال به طور خلاصه عبارتست از: قابلیت بررسی گام‌های یک استدلال به‌طوری‌که در نهایت بتوان به موجب یک عنصر معین درباره درستی کلیت آن گام‌ها داوری کرد. این عنصر، برای واقع‌گرایان و ناواقع‌گرایان، به ترتیب، حضور همه گام‌ها در ساحت آگاهی، و ساختارمندی کلیت گام‌ها، تعریف شده است.

ریاضی‌دانان با تدابیر خاصی، از جمله شکستن اثبات به تعریف‌ها، لم‌ها و نتایج قبلی، تلاش می‌کنند این قابلیت را در اثبات‌ها افزایش دهند. هر گاه یک اثبات به‌اندازه کافی وارسی‌پذیر باشد ریاضی‌دانان اصطلاحاً به آن اثبات سلیس و روان[1] می‌گویند. فهم دقیق‌تر و عمیق‌تر این ویژگی تنها از راه تلاش برای وارسی چند اثبات ممکن است. به همین دلیل اجازه دهید چند نمونه را مرور کنیم. مدعا و استدلال زیر را در نظر بگیرید:

مدعا (۳): ۲۲۱+۲۵۹=۴۸۰

استدلال (۴): یک راه اثبات عبارتست از کشیدن ۲۲۱ عدد خط، مثل | ، و باز هم کشیدن ۲۵۹ عدد از آن خطوط و سپس شمردن همه آن‌ها است.

اما اگر کشیدن و شمردن هر خط حدود ۱ ثانیه طول بکشد کل فرآیند اثبات حدود هشت دقیقه طول خواهد کشید ($\frac{480}{60} = 8$). بنابراین استدلال فوق، گذشته از روش تجربی آن، سلیس و روان نیست به همین دلیل نه تنها جذاب نیست بلکه احتمال خطا نیز در آن فراوان است. حال آن را با استدلال زیر مقایسه کنید: استدلال ۵

۲۲۱+۲۵۹=(۲۲۰+۱)+۲۵۹

=۲۲۰+(۱+۲۵۹)

=۲۲۰+۲۶۰

=۴۸۰

1. perspicuous

آن‌چه استدلال ۵ را، بر خلاف ۴، سلیس، جذاب و، مهم‌تر از همه، اطمینان بخش و بنابراین «اثبات» کرده است وارسی‌پذیری آن است. وارسی‌پذیری در تعبیر منطق‌گرایانه و واقع‌گرایانه همان توجیه‌پذیری پیشینی است و در تعبیر صورت‌گرایانه و ناواقع‌گرایانه همان تبدیل‌پذیری است. مثلاً یکی از ساختارهای معین در استدلال ۵ ساختار (a+b)+c=a+(b+c) است که آن را ما معمولاً با عنوان «خاصیت شرکت‌پذیری عملگر +» می‌نامیم. البته برای آشکار شدن این ساختار، ابتدا با یک ابتکار باید ۲۲۱ را به صورت (۱+۲۲۰) بازنویسی کنیم و خلاقیت اثبات‌ها نیز چیزی جز کشف همین گام‌های ابتکاری نیست. نقش الگوهای خلاقانه در تحقق وارسی‌پذیری را می‌توان در اثبات زیر که نابغه‌ی ریاضیات، گاوس، ارائه داده است، به وضوح مشاهده کرد:

گزاره ۶: مجموع صد عدد طبیعی نخست برابر با ۵۰۵۰ است. (یعنی ۱+۲+ ... +۹۹+۱۰۰=۵۰۵۰)

استدلال ۶: برای اثبات، اعداد مذکور را در دو سطر ۵۰ ستونی می‌نویسم:

۱	۲	۳	۴	. . .	۴۸	۴۹	۵۰
۱۰۰	۹۹	۹۸	۹۷	. . .	۵۳	۵۲	۵۱

مشاهده می‌شود که اولاً مجموع اعداد در هر ستون عدد ۱۰۱ است و ثانیاً درست ۵۰ ستون در کار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مجموع ۱۰۰ عدد طبیعی نخست عدد ۵۰۵۰=۵۰×۱۰۱ است. اگر کسی تلاش کند همین اعداد را با انگشتان دستش جمع کند و بعد مجموع آن‌ها مثلاً ۵۰۵۲ شود ما خواهیم گفت که او مطمئناً در جمع دچار خطا شده است. ساختمانی که وارسی شده باشد جایی برای شک و تردید باقی نمی‌گذارد. در استدلال ۱ نیز ما شاهد این ویژگی‌ها هستیم. در آن‌جا نیز اثبات بودن مرهون وارسی‌پذیری است و وارسی‌پذیری نیز خود به دلیل وجود الگوهای بررسی‌پذیر تام ممکن شده است. قلب استدلال ۱ این استنتاج است:

$$
\begin{aligned}
a+b &= 2k_1 + 2k_2 \\
&= 2(k_1+k_2) \\
&= 2k_3
\end{aligned}
$$

در مقابل، استدلال ۲ و ۴ به نحوی نیستند که بتوانیم بگوییم همه گام‌های آن‌ها در ساحت آگاهی حاضرند یا واجد یک ساختار معینی هستند، بنابراین وارسی‌پذیر نیستند. پس اثبات بودن مرهون وارسی‌پذیری است و وارسی‌پذیری نیز مشروط به حضور همه گام‌ها در ساحت آگاهی است یا مشروط به وجود ساختارهای معینی است.

گرچه همه اثبات‌ها وارسی‌پذیر هستند و وارسی‌پذیری یک شرط اساسی در اقناع و اجماع ما برای پذیرش یک مدعا است، اما احراز این شرط هم برای اثبات نامیدن یک استدلال کافی نیست و ما هم‌چنان به نوعی منبع یا عامل اقناع یا اجماع نیاز داریم. مثلاً استدلال‌های زیرا را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&a=b \\
&a^2=ab \\
&a^2-b^2=ab-b^2 \\
&(a+b)(a-b)=b(a-b) \\
&a+b=b \\
&b+b=b \\
&2b=b \\
&2=1
\end{aligned}
$$

استدلال ۷

$$
\begin{aligned}
&a=b \\
&a+b=2b \\
&(a+b)(a-b)=2b(a-b) \\
&a^2-b^2=2b(a-a) \\
&a^2-b^2=0 \\
&a^2=b^2
\end{aligned}
$$

استدلال ۸

استدلال ۷ وارسی‌پذیر است، اما آیا این کافی است تا ما قانع شویم که ۱=۲ برقرار است؟ چه چیزی موجب می‌شود که ما بعد از وارسی مثلاً استدلال ۵ قانع شویم که ۴۸۰=۲۵۹+۲۲۱، اما بعد از وارسی استدلال ۷ قانع نشویم که ۲=۱؟ گرچه تناقض

بدیهی در ۱=۲ می‌تواند دلیل خوبی بر احتمال خطا در استدلال ۷ باشد اما نمی‌تواند دلیل کافی برای عدم قانع‌کنندگی آن باشد، زیرا اولاً اگر قرار است تنها اثبات‌ها تعیین کننده باشند و اقناع بعد از وارسی استدلال تحقق یابد، ما نباید منتظر تأیید یا داوری شهودی باشیم. چه بسیار اثبات‌هایی که نتایج عجیب و حتی شهوداً نامقبول دارند اما در عین حال مورد اقناع و اجماع ریاضی‌دانان قرار گرفته‌اند. ثانیاً استدلال ۸ نیز قانع کننده نیست در حالی‌که هم وارسی‌پذیر است و هم نتیجه آشکارا درستی دارد.

اگر بخواهیم علت و دلیل عدم اقناع خودمان را توضیح دهیم خواهیم گفت: طرفین تساوی، در گام ۴ استدلال ۷ به صفر تقسیم شده است، و در گام ۳ استدلال ۸، در صفر ضرب شده است و هر دو عمل نادرست است. به تعبیر ویتگنشتاین تبدیل علائم در این گام‌ها به درستی انجام نشده است. به تعبیر صورت‌گرایان، گذرهای استدلالی مذکور بر اساس هیچ قاعده نحوشناختی معینی انجام نپذیرفته است. پس استدلال گرچه وارسی‌پذیر است یعنی همه گام‌ها در ساحت آگاهی ما حاضرند یا ساختارمند هستند، اما نه حضور و نه ساختارمندی، هیچ‌کدام منجر به اقناع مخاطب برای پذیرش مدعا و استدلال نمی‌شود، گویا هنوز دست‌کم یک مؤلفه مهم اثبات باقی مانده است. مؤلفه‌ای که وجود آن بعد از وارسی و قبل از اقناع باید احراز شود، و اقناع در واقع معلول آن محسوب شود. به باور بسیاری از ریاضی‌دانان و فیلسوفان، این مؤلفه چیزی جز صوری‌پذیری اثبات‌ها نیست. به عقیده آن‌ها یک استدلال ریاضی تنها در درون یک نظام صوری معین قابل بیان است و یک مدعا یا جمله یا گزاره ریاضی در واقع بخشی از این نظام صوری است و با هر گامی که وارسی می‌کنیم در واقع یک گام به مطلوبیت نتیجه، یعنی درست ساختی آن، یا یک گام به مطلوبیت گام نهایی، یعنی درست اجرایی آن، نزدیک می‌شویم، اتمام وارسی همان و تحصیل مطلوبیت (در این‌جا، درست اجرایی یا درست ساختی) نیز همان. پس آن‌چه که درستی یک استدلال را میسر می‌سازد، افزون بر وارسی‌پذیری، وجود یک نظام صوری است و در حقیقت وارسی کردن چیزی جز وارسی

بخشی از همین نظام نیست. گرچه نمی‌توان گفت که همه اثبات‌های ریاضیاتی کاملاً صوری هستند اما شاید بتوان مدعی شد که همه آن‌ها صوری‌پذیرند. این‌جاست که صوری‌پذیری به عنوان یک مؤلفه اساسی اهمیت می‌یابد.

صوری‌پذیری[۱]

صوری‌پذیری یک اثبات صرفاً به معنای قابلیت بازنویسی آن در یک زبان نمادی نیست؛ بلکه به معنای قابلیت صورت‌بندی در یک دستگاه صوری سازگار است. زیرا صوری شدن یک اثبات غیرصوری اما مقبول، مثل p، به این معنا است که یک زبان صوری مناسب و یک نظریه در کار باشد تا p در آن بتواند نشانده (=تعبیه)[۲] شود و به صورت یک اثبات صوری دقیق[۳] «تکمیل[۴]» گردد.[۵] به همین دلیل نویسندگان در تعریف صوری‌پذیری همواره آن را در نسبت با یک نظریه یا نظام صوری توضیح می‌دهند. مثلاً مولر هیل می‌گوید: «یک اثبات، صوری‌پذیر است هرگاه بتوان آن را به صورت یک اثبات صوری تبدیل کرد یعنی بتوان آن را در یک نظام اصل موضوعی صوری سازگار تبدیل به یک استنتاج صوری نمود».[۶]

طبق این تعریف، اگر یک استدلال به اندازه کافی صوری شود در واقع در یک نظام اصل موضوعی سازگار نشانده شده است و با این حساب کافی است که ما چنین استدلالی را وارسی کنیم، در این صورت، هر گام از وارسی استدلال در واقع یک گام بسوی اقناع خواهد بود. چرا که اساساً «صوری پذیر بودن اثبات‌ها به این جهت است که

---

1. formalizability
2. embedded
3. rigorous formal proof
4. filled out
5. Tymoczko "The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance", *The Journal of Philosophy*, p.60.
6. Eva Müller-Hill., "Formalizability and Knowledge Aascriptions in Mathematical Practice", *Philosophia Scientiae*, 2009, p.2.

آن‌ها خاصیت‌های ساختاری معینی دارند و همین خاصیت‌ها است که تبیین می‌کنند چرا آن‌ها قانع‌کننده‌اند».[۱]

باید توجه کرد که صوری‌پذیری نیز مانند وارسی‌پذیری یک ویژگی قابلیتی برای اثبات‌های صوری است و می‌تواند شدت و ضعف داشته باشد. و بسیاری از نویسندگان به این نکته تأکید کرده‌اند. مثلاً مولر هیل در ادامه تعریفی که در بالا از ایشان نقل قول کردیم اضافه می‌کند:

ما می‌توانیم معناشناسی‌های مختلفی را برای عبارت «اثبات صوری‌پذیر» در یک طیف انتخاب کنیم. در یک سر طیف می‌توان یک قرائت ضعیف ارائه داد: اثبات p صوری‌پذیر است اگر و تنها اگر یک قضیه ریاضیاتی را به نحو غیر صوری اثبات کرده باشد و نیز به نحو صوری از یک نظام اصل موضوعی صوری قابل استنتاج باشد. در سر دیگر طیف قرائت قوی وجود دارد که چنین است: اثبات p صوری‌پذیر است اگر و تنها اگر بتوان گام به گام آن را تبدیل به یک اثبات صوری کرد.[۲]

مثلاً اثبات p را در نظر بگیرید که همه سطرهای آن یا یکی از اصول موضوعه یک سیستم صوری، مثل s، است و یا حاصل به کارگیری قواعد استنتاج بر روی سطرهای قبلی است؛ مگر سطر n که حاوی این ادعا است: «هر عددی با خود برابر است» اما این سطر نه اصل موضوعه است و نه مستنتج از سطرهای پیشین بلکه صرفاً به دلیل بدیهی بودن پذیرفته شده و به کار رفته است. وقتی به معنای ضعیف کلمه می‌گوییم اثبات p صوری‌پذیر است یعنی علی‌الاصول مدّعای (a=a) را می‌توان از اصول s و قواعد منطقی آن به دست آورد. اما در معنای قوی یعنی بالفعل لمی را سراغ داریم که در آن (a=a) به نحو صوری اثبات شده است.

1. Tymoczko, "The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance", *The Journal of Philosophy*, p.60.
2. Eva Müller-Hill, "Formalizability and Knowledge Ascriptions in Mathematical Practice", *Philosophia Scientiae*, p.2.

درباره صوری‌پذیری اثبات‌ها توجه به یک نکته بسیار مهم است. بسیاری از فیلسوفان با ارائه دلایل و شواهد قابل تأمل استدلال کرده‌اند که برخی از اثبات‌های ریاضیاتی را نمی‌توان به هیچ عنوان صوری نامید. آن‌ها قائل به دو نوع عمده اثبات‌های ریاضیاتی هستند: صوری و غیر صوری. مثلاً هرش تأکید می‌کند که امروزه در جامعه‌ی ریاضیاتی در واقع «دو نوع موازی اثبات ریاضی در جریان است: اثبات صوری و اثبات عملی[1]، اثبات به معنای اخیر همان کاری است که ما انجام می‌دهیم تا همدیگر را درباره یک ادعای ریاضیاتی متقاعد کنیم».[2] لاکاتوش نیز قائل به اثبات‌های غیرصوری (پیشاصوری یا پساصوری) است: در این اثبات‌ها درستی یک مدعای ترکیبی از راه ارائه‌ی یک آزمایش فکری درست نشان داده می‌شود. به‌طوری‌که حدس یا مدعای اصلی به مدعیات فرعی‌تر و بدیهی‌تر تجزیه می‌شود تا جایی‌که کم‌کم مثال‌های نقض آشکار می‌شوند و مفاهیم و تعریف‌ها دقیق‌تر می‌شوند و یک نظریه ریاضیاتی غیرصوری، شامل آن مدعای اصلی، شکل می‌گیرد. او خود عملاً قضیه اویلر را با یک روش غیرصوری اثبات می‌کند. در این اثبات، او با فرآیند برش و مثلث‌بندی و حذف گام‌به‌گام مثلث‌ها به خوبی چرایی نتیجه یعنی $V-E+F=2$ را توضیح می‌دهد. لاکاتوش این مثال را برای توضیح اثبات‌های غیرصوری و تمایز آن‌ها از اثبات‌های صوری مطرح می‌کند اما به آن بسنده نمی‌کند و چند نمونه واقعی را نیز شاهد مدعای خود می‌آورد. بخصوص فرآیند اثبات فرایابانه‌ی قضیه کوشی و شکل‌گیری مفهوم هم‌گرایی یکنواخت[3] را بر اساس این تلقی از اثبات‌ها توضیح می‌دهد.[4] روشن است که این دیدگاه مستلزم قبول اثبات‌هایی در

1. Practical.
2. Hersh, R., *What Is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, New York, 1997, p.49.
3. Uniform convergence
4. Lakatos, I., *Proofs and Refutations: the Logic of Mathematical Discovery*, John Worrall, Elie Zahar(eds.), Cambridge University Press, 1976, p.144.

ریاضیات است که در واقع توجیه معرفتی و راستی آزمایی مدعیات ریاضیاتی به شمار می‌آیند و قبلاً گفتیم که چنین فهمی از اثبات، به نظر ویتگنشتاین یک «اشتباه مهلک برای فهم فلسفی است».

بنابراین برخی فیلسوفان مثل هرش و لاکاتوش ناگزیرند درستی استدلال را با توسل به دو معنای متفاوت از مطلوبیت توضیح دهند: مطلوبیت واقع‌گرایانه و ناواقع‌گرایانه. زیرا اگر مطلوبیت استدلال را به معنای صدق نگهدار بودن یا صحیح بودن بدانیم در واقع یک موضع واقع‌گرایانه اتخاذ کرده‌ایم و اگر آن را به معنای معتبر بودن بگیریم از درِ ناواقع‌گرایی وارد شده‌ایم. در این دیدگاه اثبات‌های غیرصوری همان‌قدر اصیل هستند که اثبات‌های صوری.[1] چنین موضعی به نظر التقاطی می‌آید، چون متضمن قبول مبانی متعارض واقع‌گرایی و ناواقع‌گرایی است.

شاید بهتر باشد، به جای یک تلقی دوگانه از اثبات‌ها، در این‌جا نیز مفهوم کلی‌تری را کشف و معرفی کنیم که اولاً قانع‌کنندگی را بر اساس وارسی‌پذیری و آن مفهوم کلی‌تر تبیین کنیم و ثانیاً نشان دهیم که مفاهیم صوری‌پذیری و صدق‌پذیری (تضمین صدق) در واقع تعبیرهایی از آن مفهوم کلی هستند. این مفهوم را خوشبختانه پیش از این معرفی کرده‌ایم: مطلوبیت. تنها کافی است کمی دقیق‌تر آن را تحلیل کنیم و قدرت تبیینی آن را در فهم‌پذیر ساختن قانع‌کنندگی اثبات‌ها نشان دهیم. استدلال‌ها بسته به این که در مقام توجیه به کار رفته‌اند یا در مقام تبیین، باید واجد مطلوبیت توجیهی یا تبیینی باشند تا بتوان به آن‌ها اثبات گفت.

اما پیش از پرداختن به معنای دقیق مطلوبیت یا درستی استدلال‌های ریاضی، باید سومین و مناقشه‌آمیزترین مؤلفه‌ی استدال‌های ریاضی یعنی «دقت» را هم واکاوی کنیم. بخصوص با توجه به این که گاهی غلبه صورت‌گرایی موجب می‌شود ما صوری‌پذیری را

---

1. Bayat, H., “Lakatos and Hersh on Mathematical Proof”, *Journal of Philosophical Investigations*, University of Tabriz, vol.9, no.17, 2015, p.80.

با آن یکسان بگیریم. صوری‌پذیر بودن گرچه با دقیق بودن ملازم است اما با آن مترادف نیست. دقت، در واقع ویژگی مبنایی‌تری است و صوری‌پذیری یکی از راهبردهای نیل به دقت است نه خود دقت. به بیان دیگر، دقت، بر خلاف صوری‌پذیری، یک ویژگی اساسی است؛ یعنی نمی‌توان اثباتی را تصور کرد که اولاً دقیق باشد و ثانیاً قابلیت دقیق‌تر شدن نداشته باشد. به چنین ویژگی مهمی دقت‌پذیری می‌گوییم.

دقت[۱] و دقت‌پذیری

به عقیده دتلفسن «اثبات دقیق[۲]، در دیدگاه متعارف، استدلالی است که همه دلایل آن صرفاً روابط منطقی بین مفاهیم هستند». بنابراین می‌توان گفت که دقت اثبات ریاضیاتی، در این دیدگاه، عبارتست از استقلال از تجربه، شهود، زبان طبیعی و فهم عرفی. «دیدگاه غالب درباره اثبات آن است که دقت را به‌عنوان یک ویژگی لازم برای اثبات در نظر بگیرند و صوری‌پذیری را به عنوان شرط لازم دقت».[۳] دتلفسن برای این ادعای خود نقل قول‌هایی از نویسندگان می‌آورد. مثلاً به باور مک لان:

یک اثبات ریاضیاتی دقیق است هرگاه به زبان محمولات مرتبه اول $L(\in)$ و به عنوان دنباله‌ای از استنتاج‌های حاصل از اصول ZFC نوشته شود یا بتوان نوشت؛ به‌طوری‌که هر کدام از استنتاج‌ها باید مطابق با یکی از قواعد مقرر باشد... [و] عملاً هیچ کدام از مشکلات واقعی در نوشتن اثبات‌های صوری در کار نباشند. در عمل، یک اثبات تنها یک طرح کلی است البته با جزئیاتی که برای ترجمه سرراست آن به یک اثبات صوری کافی باشد.[۴]

1. Rigorous
2. Rigor proof
3. Detlefsen, M., “Proof: Its Nature and Significance”, *Proof and Other Dilemmas*, Gold, B., (eds), 2008, p.17.
4. Mac Lane, 1986, p.377. ترجمه نقل قول از دتلفسن Detlefsen, 2008.

استدلال دتلفسن درست به نظر می‌رسد. در دیدگاه متعارف دقیق بودن اثبات با صوری بودن آن مساوق گرفته می‌شود (یعنی مجموعه مصادیق آن‌ها یکسان است اما مؤلفه‌های مفهومی آن‌ها متفاوت است). بنابراین هرچه که یک استدلال صوری‌تر باشد دقیق‌تر نیز خواهد بود و بلعکس. اما همین‌جا ممکن است نوعی عدم تقارن بین «صوری‌پذیر» به‌عنوان یک ویژگی قابلیتی و «دقیق» به عنوان یک ویژگی فعلیتی[۱] احساس شود که به نظر من نباید بی اعتناء از کنار آن گذشت. در دیدگاه متعارف دقت با صوری‌پذیری تعریف می‌شود و از سوی دیگر در این دیدگاه یک اثبات غیرصوری اگر صوری‌پذیر باشد قانع‌کننده است؛ زیرا صوری‌پذیری یک اثبات به این معنا است که علی‌الاصول می‌توان آن را به اندازه‌ی کافی، یعنی به اندازه‌ای که مفید اقناع باشد، صوری‌تر کرد. از این رو، بدیهی به نظر می‌رسد که بگوییم یک اثبات غیر دقیق نیز اگر دقت‌پذیر باشد قانع‌کننده است. زیرا دقت‌پذیری یک اثبات نیز به این معنا است که علی‌الاصول می‌توان آن را به اندازه‌ی کافی، یعنی به اندازه‌ای که مفید اقناع باشد، دقیق‌تر کرد. در چنین دیدگاهی باید بیش از دقت بالفعل اثبات‌ها به دقت بالقوه یا علی‌الاصول آن‌ها تأکید و توجه گردد. اهمیت تعبیری که در آن دقت‌پذیری نیز مانند صوری‌پذیری و وارسی‌پذیری به‌مثابه یک ویژگی قابلیتی در نظر گرفته می‌شود در این است که معیارهای «اثبات ریاضیاتی» با معیارهای «اثبات ریاضیاتی خوب» خلط نمی‌شوند. هم‌چنان‌که یک اثبات ممکن است به دلیل نزدیک‌تر بودن به فرم ایده آل صوری و وارسی‌پذیری بهتر باشد یک اثبات به لحاظ دقت بیشتر نیز بهتر است.

اما این ویژگی، یعنی دقت‌پذیری، با هدف مهم‌تری توسط افراد مورد توجه قرار گرفته است: دقت‌پذیری مهم‌ترین ارزش ریاضی‌دانان است، نه صوری‌پذیری. البته صورت‌گرایان در دفاع از خود منکر اهمیت دقت و دقت‌پذیری نخواهند بود اما نکته این‌جا است که به باور آن‌ها دقت‌پذیری جز از راه صوری‌پذیری قابل وصول و حصول

---

1. actual

نیست و حتی می‌توان گفت که دقت‌پذیری چیزی جز صوری‌پذیری نیست. در حالی‌که صوری‌پذیری، به نظر می‌رسد، اخص از دقت‌پذیری است و نه مساوی با آن. دتلفسن این دیدگاه متعارف که دقیق بودن و صوری بودن مساوی هم‌اند را نتیجه غلبه نگاه صورت‌گرایانه و «معیار نحوشناختی» در اواخر قرن ۱۹ و اوایل قرن بیستم می‌داند. به عقیده او استدلال پشتیبان این دیدگاه متعارف را می‌توان چنین صورت‌بندی کرد:

۱. اثبات‌های شایسته اثبات‌هایی هستند که دقیق هستند یا به سادگی دقیق می‌شوند.

۲. اثبات‌هایی که دقیق هستند یا به سادگی دقیق می‌شوند اثبات‌های صوری‌پذیر هستند.

بنابراین

۳. همه‌ی اثبات‌های شایسته صوری‌پذیرند.

دتلفسن مدعی است که هم خود این دیدگاه و هم برهان مربوطه مشکوک به نظر می‌رسند. زیرا:

اثبات‌های ریاضیاتی معمولاً صوری شده نیستند، چه زمانی که آن‌ها عرضه می‌شوند و چه بعد از آن. اثبات‌ها در هیچ‌کدام از این دو حالت به نوعی ارائه نمی‌شوند که گویا صوری‌سازی‌های شان لازم است یا صوری‌سازی آن‌ها امری واضح و متداول است. در عوض آن‌ها معمولاً به نوعی ارائه می‌شوند که باید به وضوح دقیق باشند، اگر نه در ابتدای کار، دست کم در مرحله‌ی بعد که قرار است در میان دانشجویان هم‌طراز بچرخد باید دقیق باشد. همین امر نشان می‌دهد که دقت و صوری‌سازی ملازم هم نیستند و مستقل از هم‌اند.[1]

در دیدگاه متداول اثبات‌های صوری نشده تقریباً به همان اندازه اثبات‌های صوری شده کفایت دارند به‌طوری‌که گویا صوری‌پذیری آن‌ها واضح است و تنها یک کار سرراست برای صوری‌سازی آن‌ها باقی مانده است. این رأی در نقل قولی که از ساندرز

1. Detlefsen, “Proof: Its Nature and Significance”, *Proof and Other Dilemmas*, p.19.

مک لان آوردیم آشکار است. اما در هر حال همه با این دیدگاه متعارف موافق نیستند، و در میان مخالفین برخی دارای تجربه بزرگی در کار صوری‌سازی هستند. دتلفسن از میان آن‌ها به پژوهش‌گر حوزه هوش مصنوعی و شخصیت خبره در اثبات‌گر خودکار قضیه جان رابینسون اشاره می‌کند و می‌گوید: «تجربه او در خصوص صوری‌سازی او را به این نتیجه رسانده است که در اغلب موارد "مشکلات غیرمترقبه" در انتظار است و به ندرت اوضاع سرراست می‌باشد».[۱]

او سپس به توصیف متفاوتی از دقت ریاضیاتی دست میزند و تلاش می‌کند به جای این‌که سرنوشت دقت را به صوری بودن گره بزند از رابطه بین محتوا یا عامل تبیینی و دقت استفاده کند. به عقیده او حتی این رأی در دیدگاه سنتی نیز وجود دارد که دست‌کم استدلال ریاضیاتی را وقتی به عنوان دقیق‌ترین استدلال در نظر می‌گیرند که بیشترین پتانسیل تبیینی را داشته باشد. در حقیقت ما بیشترین یقین، هنگام اجتناب از شکاف‌های ممکن در استدلال، را وقتی داریم که مقدمات استدلال بتوانند به خوبی نتایج را تبیین کنند. به عقیده او این نگاه سنتی را در هیلبرت نیز می‌توان یافت:

این یک خطا است که باور کنیم دقت در ریاضیات دشمن سادگی است. ما عکس آن را با مثال‌هایی میابیم که آن‌ها روش‌های دقیق دارند و در عین حال ساده‌ترند و فهم آن‌ها راحت‌تر است. تلاش برای رسیدن به دقت بیشتر ما را برای یافتن روش‌های ساده‌تر اثبات پیش می‌برد.[۲]

در هر حال، از نظر دتلفسن دقت با وضوح تبیینی مرتبط است؛ یعنی می‌توان مشاهده کرد که با گسترش دقت در یک اثبات مقدمات آن نتیجه‌اش را تبیین می‌کند.

---

1. Ibid, p.17.
2. Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie, Unpublished Lectures*, Mathematisches Institut, Gottingen, 1902, p.441.

ترجمه نقل قول از دتلفسن

Detlefsen, “Proof: Its Nature and Significance”, *Proof and Other Dilemmas*, p.19.

هرچه شفافیت تبیینی بیشتر شود ما بیشتر مطمئن می‌شویم که می‌توانیم اطلاعات مغفول به کار گرفته نشده‌ای را برای برقراری اتصال بین مقدمات و نتیجه به نحوی از انحاء به کار بریم. در حالی‌که با افزایش صوری‌سازی شفافیت تبیینی کاهش می‌یابد و هم‌چنین دقت نیز کاهش می‌یابد. «بنابراین یک تجدید نظر[1] درباره رابطه‌ای که معمولاً بین دقت و صوری‌سازی مسلم پنداشته می‌شود لازم به نظر می‌رسد».[2]

اگر تدقیق مولر هیل درباره صوری‌پذیری را درباره دقت‌پذیری نیز تعمیم دهیم، یعنی معناشناسی‌های مختلفی را برای عبارت «اثبات دقت‌پذیر» در یک طیف تصوّر کنیم، آن‌گاه معنای دتلفسن در سر ضعیف طیف قرار دارد و معنای مک لان در سر قوی آن. آشکار است که مفهوم دقت در تلقی دتلفسن، به جهت استفاده از مؤلفه نسبیتی «شفافیت تبیینی»، یک مفهوم نسبی و ضعیف‌تری، در مقایسه با مفهوم دقت در تلقی مک لان، است.

حال که مفهوم استدلال ریاضی را با فروکاستن به سه مفهوم بنیادیِ استدلال، وارسی‌پذیری و دقت تبیین کردیم به سراغ تحلیل آخرین ویژگی یعنی اعتمادپذیری می‌رویم و آن را در ذیل دو نوع اعتمادپذیری پیشینی و پسینی بررسی می‌کنیم.

اعتمادپذیری پیشینی

یک استدلال دارای اعتمادپذیری پیشینی است اگر با یک الگوی توجیهی پیشینی مطابق باشد. دو نوع الگوی پیشینی را می‌توان از هم متمایز کرد:

الگوی معناشناختی: صدق (یا، ساختمان‌پذیری) مقدمات، صدق (یا، ساختمان‌پذیری) نتیجه را لازم آورد.

الگوی نحوشناختی: نتیجه، حاصل بکارگیری قواعد معین بر روی مقدمات باشد.

---

1. reexamination

2. Detlefsen, “Proof: Its Nature and Significance”, *Proof and Other Dilemmas*, p.19.

استدلالی که با یکی از این دو الگو مطابق باشد، اعتمادپذیری پیشینی دارد. استدلال‌هایی که به دلیل مطابقت با الگوی معناشناختی و نحوشناختی اعتمادپذیر می‌شوند، به ترتیب، دارای خاصیت یا کارکرد تضمین‌گری و تبدیل‌گری هستند. این دو کارکرد، به ترتیب، از جانب واقع‌گرایان و ناواقع‌گرایان مورد توجه است اما کسانی که به تلقی دوگانه از اثبات قائل‌اند این دو کارکرد را، به ترتیب، به عنوان عامل قانع‌کنندگی اثبات‌های غیرصوری و صوری به کار می‌برند. در واقع می‌توان گفت مطلوبیت منطقی استدلال‌های ریاضیاتی و حتی معنای وارسی‌پذیری بستگی به نظریه ما درباره منطق دارد. اگر یک تلقی واقع‌گرایانه درباره اصول منطقی داشته باشیم به‌طوری‌که آن‌ها را گزاره‌های بدیهی و ضروری و پیشینی ترکیبی ناظر به واقعیت‌های انتزاعی بدانیم و شهود را راه درک آن‌ها بدانیم، مطلوبیت استدلال‌ها را بر اساس الگوی معناشناختی توضیح خواهیم داد. اما اگر یک تلقی ناواقع‌گرارایانه درباره اصول منطقی داشته باشیم به‌طوری‌که آن‌ها را جملات صوری تحلیلی در درون یک نظام صوری مثل S بدانیم و دانستن آن‌ها و قضایای ریاضیاتی را صرفاً به معنای بلد بودن برخی قواعد دستکاری نشانه‌ها بدانیم، مطلوبیت استدلال‌ها را براساس الگوی نحوشناختی توضیح خواهیم داد. هم‌چنین در این دو تلقی، به ترتیب، منظور از وارسی‌پذیری، به ترتیب، عبارت خواهد بود از حضور همه گام‌ها در ساحت آگاهی، و ساختمان‌پذیری در یک نظام معین S.

در هر حال، یک بار دیگر استدلال‌های ۵ و ۶ را با استدلال‌های ۷ و ۸ مقایسه کنید. دو استدلال اول، از آن رو، قانع‌کننده‌اند که دارای اعتمادپذیری پیشینی‌اند به‌طوری‌که با وارسی آن‌ها، مطلوبیت توجیهی آن‌ها نیز احراز می‌شود. یعنی مثلاً در استدلال ۵ وقتی سطرهای اول تا سوم را وارسی می‌کنیم و صدق (به تعبیر منطق‌گرایان یا شبه تجربه‌گرایان) یا ساختمان‌پذیری (به تعبیر شهودگرایان) آن‌ها را تأیید یا به نحو

شهودگرایانه تجربه[۱] می‌کنیم، چاره‌ای نداریم که صدق سطر چهارم را نیز باید بپذیریم، یا ساختمان‌پذیری آن را به نحو شهودگرایانه تجربه کنیم. به تعبیر صورت‌گرایانه نیز، سطر چهارم صرفاً حاصل اعمال قواعد معین بر سطرهای قبلی است و بنابراین توجیه نحو شناختی دارد. در حالی‌که در استدلال ۷ و ۸، به ترتیب، وقتی به وارسی سطر چهارم و سوم می‌رسیم نمی‌توانیم صدق (یا ساختمان‌پذیری) آن را صرفاً بر اساس صدق (یا ساختمان‌پذیری) سطرهای قبلی بپذیریم (یا به نحو شهودگرایانه تجربه کنیم)؛ یا به تعبیر صورت‌گرایانه، این دو سطر حاصل اعمال هیچ قاعده معینی بر روی سطرهای قبلی نیست. به اختصار، دو استدلال ۷ و ۸، بر خلاف دو استدلال ۵ و ۶، با هیچ‌کدام از دو الگوی پیشینی توجیه مطابق نیستند و بنابراین فاقد مطلوبیت توجیهی‌اند. یعنی دلیلی بر پذیرش استدلال و نتیجه نداریم. با توسل به این مفهوم می‌توانیم نادرستی استدلال ۲ را نیز توضیح دهیم.

در این‌جا بین مطلوبیت توجیهی نحوشناختی و معناشناختی یک تفاوت مهم به چشم می‌خورد. وقتی می‌گوییم یک استدلال مطلوبیت توجیهی نحوشناختی دارد یا ندارد، یعنی با قواعد معین یک نظام مثل S مطابق است یا نیست. اما وقتی می‌گوییم یک استدلال مطلوبیت توجیهی معناشناختی دارد یا ندارد دقیقاً منظورمان چیست؟ پاسخ اولیه روشن است: یعنی ممکن نیست که مقدمات صادق و نتیجه کاذب باشد. یا اگر کسی مقدمات را بپذیرد ناگزیر باید نتیجه را نیز بپذیرد. اما این پاسخ متضمن مفهوم موجهاتی «ممکن نیست» و مفهوم روان‌شناختی «پذیرش» است و هنوز معلوم نیست که

---

۱. شهودگرایان منطق را موخر بر ریاضیات می‌دانند و نه مقدم بر آن. بنابراین آن‌ها در توصیف این فرآیند اقناع، گام‌های استدلال را بر اساس منطق مقدم بر ریاضیات پیش نخواهند برد و سخن از تأیید مطابقت آن با قاعده منطقی به میان نخواهند آورد بلکه خواهند گفت: ما مقدمات را وارسی می‌کنیم و ساختمان آن‌ها را تجربه می‌کنیم و ناگزیر به تجربه ساختمان نتیجه می‌شویم.

دقیقاً در چه شرایطی چنین رابطه‌ای، بین مقدمات و نتیجه، ضروری و در چه شرایطی غیرضروری است؟ و در چه شرایطی ما مقدمات و نتیجه را می‌پذیریم یا نمی‌پذیریم.

به نظر می‌رسد اعتمادپذیری پیشینی و، به تبع آن، مطلوبیت توجیهی همه‌ی آن چیزی است که موجب می‌شود ریاضی‌دانان یک استدلالِ وارسی‌پذیر را «درست» و در نهایت «اثبات» بنامند. اما این نقطه‌ی پایان نیست. چون هنوز تحلیل مفهوم «درستی» به اعتمادپذیری پیشینی یا مطلوبیت توجهی به نقطه‌ی رضایت‌بخشی نرسیده است. یعنی مثلاً وقتی یک منطق‌گرا گام‌های یک استدلال را وارسی می‌کند و می‌گوید: «من گام n را وارسی کردم و صدق P_n (مدعای مطرح شده در گام n) را تأیید کردم»، هنوز به نحو واضح و متمایز به ما نگفته است که منظورش از صدق P_n چیست؟ در توضیح ویژگی درستی گفتیم که همواره ما برای احراز درستی (صدق، درست ساختی، درست اجرایی، ساختمان‌پذیری) نیاز به یک امر پیشین داریم تا درستی را به معنای مطابقت با آن امر پیشین تعریف کنیم. از نظر منطق‌گرا صدق P_n لزوماً با مطابقت گام‌های کوچک‌تر و مساوی n با قواعد و اصول موضوعه نظام منطق محمولات قابل توضیح است. به طریق مشابه یک صورت‌گرا و شبه صورت‌گرا مثل ویتگنشتاین هم تنها با فرض یک نظام صوری و زبانی معین می‌تواند مطلوبیت یک استدلال را توضیح دهد. بنابراین تحلیل ما زمانی پایان می‌پذیرد که بتوانیم توضیح دهیم آن امر پیشینی که مطلوبیت پیشینی حاصل مطابقت گام‌ها یا مقدمات با آن است، خود بر چه اساسی استوار است. به عبارت دیگر، خود منطق محمولات یا یک نظام صوری یا زبانی مفروض مطلوبیت خودشان را از کجا آورده‌اند؟

این همان مسأله مبانی ریاضیات است که بخصوص در نیمه نخست قرن بیستم ذهن فیلسوفان و ریاضی‌دانان را به خود معطوف کرده بود. فرگه، هیلبرت و براوئر در حقیقت تلاش می‌کردند که به همین پرسش پاسخ دهند.

مبنای ریاضیات در واقع همان امر پیشینی یا مبنایی است که ریاضی‌دان آگاهانه یا ناآگاهانه با لحاظ آن، شرایط لازم برای احراز اعتمادپذیری استدلال‌ها (یا مطلوبیت توجیهی آن‌ها) را کشف یا جعل می‌کند. این مبنا در مکاتب مختلف فلسفه ریاضی متفاوت است. مثلاً از نظر منطق‌گرایان عبارتست از مجموعه‌ی اصول یا قواعد منطق محمولات. حال اگر از منطق‌گرا بپرسیم که خود این امر پیشینی مطلوبیت یا الگو بودن خود را مدیون چیست؟ او با توسل به مفهوم بداهت پاسخ خواهد داد. البته همه منطق‌گرایان را نمی‌توان با این چوب راند. این بیشتر موضع فرگه‌ای است و راسل بر دیدگاه دیگری معتقد است: خود این امر پیشینی مطلوب است چون بهترین حدس‌هایی هستند که صدق‌های ریاضیاتی شناخته شده را می‌توان از آن‌ها استنتاج کرد. براون این دیدگاه را افلاطون‌گرایی جدید می‌نامد و راسل و گودل را از طرفداران آن معرفی می‌کند. در مقابل، برای صورت‌گرایان، درستیِ یک استدلال به معنای مطابقت یک روندِ تبدیل علائم با یک امر پیشینی، یعنی مجموعه اصول یا قواعد نظام صوری S، است اما خود این امر پیشینی مطلوب است اگر واجد ارزش‌های فراریاضیاتی مثل استقلال و سازگاری باشد.

به نظر می‌رسد که مطلوبیت غایی منطق‌گرایانه بیش از حد به عامل روان‌شناختی بداهت تکیه کرده است و ریاضیات را در کمین پارادوکس‌هایی مثل پارادوکس راسل قرار داده است. دسترسی به مطلوبیت صورت‌گرایانه نیز با اثبات قضایای ناتمامیت گودل ناممکن شده است. مطلوبیت افلاطون‌گرایانه گودلی و شبه تجربه‌گرایانه لاکاتوشی اولاً هیچ‌کدام از این دو مشکل را ندارد ثانیاً برای آن‌که، در مقایسه با افلاطون‌گرایی حداکثری، قابل دفاع‌تر باشد پژوهش ریاضیاتی را نهایتاً بر فرآیند حدس و ابطال استوار ساخته است و آشکارا این تلقی از ریاضیات مستلزم پذیرش خطاپذیری در معرفت ریاضیاتی است. این تلقی از مطلوبیت با نگاه پدیدارشناسانه و با ملاحظات پیراریاضیاتی و به‌خصوص تاریخ ریاضیات، واقع‌بینانه به نظر می‌رسد.

اعتمادپذیری پسینی

کسانی که معرفت و فهم ریاضیاتی را ارزش یا غایت قصوای ریاضیات می‌شمارند اصول و قواعدی را برخواهند گزید که بیشترین معرفت یا بهترین فهم را فراهم آورد و اساساً درستی استدلال‌ها در ظاهر به معنای مطابقت با این امور مفروض، یعنی اصول و قواعد، است و در باطن به معنای توفیق در نزدیک شدن یا رسیدن به معرفت یا فهم ریاضیاتی است. رسیدن به فهم ریاضیاتی مستلزم انتخاب یا کشف نظامی است که بیشترین صدق‌های ریاضیاتی را زیر چتر کم‌ترین و ساده‌ترین اصول و قواعد تبیین کند. و رسیدن به معرفت ریاضیاتی مستلزم انتخاب یا کشف نظامی است که بیشترین صدق‌های ریاضیاتی را با فروکاستن به کم‌ترین و بدیهی‌ترین اصول و قواعد توجیه کند. اما کسانی که فهم و معرفت ریاضیاتی را ناممکن می‌دانند مبنای انتخاب یا جعل اصول و قواعد را نیل به مطلوبیت‌های فراریاضیاتی، و از جمله تمامیت و سازگاری می‌دانند. از نظر آن‌ها این دو ویژگی برای یک نظام همان جایگاهی را دارند که معرفت‌زایی و فهم‌افزایی برای واقع‌گرایان.

این عامل بخصوص در تبیین درستی اثبات‌های پیشگام[1]، یعنی اثبات‌هایی که کاملاً از یک الگوی متداول پیشینی تبعیت نمی‌کنند، اجتناب‌ناپذیر و تعیین‌کننده است. پس باید بگوییم که اعتمادپذیری پیشینی همه‌ی آن چیزی است که موجب می‌شود ریاضی‌دانان، یک استدلال وارسی پذیر متداول[2] را «اثبات» بنامند؛ اما مطمئناً اعتمادپذیری پیشینی همه‌ی آن چیزی نیست که موجب شود ریاضی‌دانان یک استدلال وارسی‌پذیر پیشگام را «اثبات» بنامند. اتفاقاً آن‌چه که برنامه‌های پژوهشی در ریاضیات را پیش می‌برد اثبات‌های پیشگام هستند. ریاضی‌دانان برای این‌که قانع شوند یک استدلال وارسی‌پذیر پیشگام، اثبات است باید آن را واجد مطلوبیت‌های پسینی بیابند. در واقع

1. vanguard
2. routine

اثبات‌های پیشگام درستی خود را مدیون اعتمادپذیری پسینی خود هستند نه مطابقتشان با یک امر پیشینی. اهمیت این نوع مطلوبیت بخصوص در اقناع و اجماع ریاضی‌دانان بر سر الگوهای عجیب و جدید، مثل الگوی اثبات قضیه مقدار میانی به‌وسیله بولتزانو برای ریاضی‌دانان قرن ۱۹، یا الگوی اثبات قضیه چهار رنگ به‌وسیله اپل و هنکین، انکارناپذیر است. به‌طور خلاصه می‌توان گفت اعتمادپذیری پسینی به موجب کشف یا جعل مفاهیم یا نمادها یا الگوهایی از استدلال به‌دست می‌آید که کارآمدی خود را عملاً نشان دهند. یعنی ریاضی‌دان را در توضیح چرایی صدق یا سازگاری یک مدعا توانمند سازند. هم‌چنان که مثلاً ریاضی‌دانان قرن ۱۹ توانستند با توسل به مفاهیم جدیدی مثل همسایگی و اصول جدیدی مثل اصل تمامیت پیوستار و ابزارهای آنالیز صوری جدیدی مثل اپسیلن-دلتا، صدق مدعیاتی مثل قضیه مقدار میانی را تبیین کنند. بسیاری سعی کرده‌اند معنای دقیق این نوع تبیین (تبیین ریاضیاتی درونی) را روشن کنند، کسانی مثل مارک اشتاینر (نظریه شبه علّی)، فیلیپ کیچر (نظریه وحدت‌بخشی) و مارک کولیوان (نظریه ربطی).

نتیجه

اساساً اثبات، چه در ریاضیات و چه غیر ریاضیات، عبارتست از استدلال موفق. یعنی حتی در زندگی روزمره، دادگاه‌ها و علم و فلسفه نیز اگر بخواهیم «اثبات» را در معنای حقیقی (literal) و نه استعاری به‌کار ببریم مرادمان همان «استدلال موفق» است. اما این که معنای خود «استدلال» و «توفیق» چیست، بسته به بافتارها و نیز نگرش‌ها و گرایش‌های مختلف افراد پاسخ‌ها مختلف خواهد بود. در بافتار زندگی روزمره هر الگوی استدلالی متعارف و اعتمادپذیری اگر به نحو مؤثر و کارآمد به کارگرفته شود، به‌طوری که مخاطب را قانع یا ساکت کند یا به تناقض‌گویی وادار کند، شایسته نام «اثبات» خواهد

بود. در دادگاه‌ها و علم و فلسفه هم به همین منوال است با این تفاوت که معیارهای اعتمادپذیری در مقایسه با استدلال‌های زندگی روزمره معین‌تر و سخت‌گیرانه‌تر هستند.

با توجه به تحلیل مفهومی اثبات می‌توان گفت که همین وضعیت درباره اثبات‌های ریاضی و تلقی‌های مختلف از اثبات‌های ریاضی هم صادق است. یعنی در همه اثبات‌ها فرد اثبات‌کننده اولاً باید استدلالی ارائه دهد و ثانیاً استدلال مذکور باید موفق باشد. بنابراین می‌توان گفت که اثبات‌های ریاضی و غیر ریاضی از یک مقوله‌اند: همه آن‌ها استدلال‌های موفق هستند.

اما اگر مثلاً از هیلبرت، فرگه، ویتگنشتاین بپرسیم استدلال ریاضی و توفیق در استدلال ریاضی به چه معناست؟ پاسخ‌های مختلفی خواهیم شنید:

- استدلال ریاضی یعنی زنجیره‌ای از جملات صوری، و توفیق در استدلال یعنی مرتب بودن این زنجیره بر اساس قواعد صوری معین.
- استدلال ریاضی یعنی فرآیند گذر از یک مجموعه از اندیشه‌های ریاضی به اندیشه ریاضی دیگر، و توفیق در استدلال یعنی منطقی بودن این گذر.
- استدلال ریاضی عبارت است از بازی تبدیل علائم معین ریاضی، و توفیق در استدلال یعنی یعنی درستی انجام این تبدیلات.

هم‌چنان که پاسخ‌های براوئر، لاکاتوش و هرش هم متفاوت خواهند بود.

با این همه، در همه اثبات‌های ریاضیاتی و در همه تلقی‌هایی که از این افراد بیان شده، یک استدلال باید متضمن الگوهایی باشد که اولاً دقیق و وارسی‌پذیرند و ثانیاً این الگوها به نحو پیشین یا پسین اعتمادپذیرند. اگر دو شرط اول برقرار باشند استدلال مذکور می‌تواند متصف به صفت «ریاضیاتی» شود؛ و اگر شرط سوم برقرار باشد استدلال ریاضی مذکور می‌تواند متصف به صفت «درست» شود. (دقت، وارسی پذیری و اعتمادپذیری این الگوها نیز، بسته به گرایش‌ها و نگرش‌های ریاضی‌دانان و فیلسوفان،

با درجه‌های مختلفی از تأکید بر حکم ارزش‌گذارانه‌ی صوری یا معرفتی یا، اقناع روانی یا اجماع نهادی، قابل احراز است.)

منابع

بدجینی، جولیان، فلسفه به‌مثابه داوری، ترجمه محمد کاظم علوی و دیگران، فلسفه به مثابه روش، کارل، هاوی و دیگران، تهران، پژوهشکده مطالعات فرهنگی و اجتماعی، ۱۳۸۹ش.

بیات، حسین، «انواع تبیین‌های ریاضیاتی»، دوفصلنامه تخصصی جستارهای فلسفی، شماره ۲۷، بهار و تابستان ۱۳۹٤.

پوپر، کارل، منطق اکتشاف علمی، ترجمه سید حسین کمالی، انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۸۴ش.

فان آتن، مارک، فلسفه براوئر، ترجمه محمد اردشیر، هرمس، ۱۳۸۷ش.

دکارت، رنه، اصول فلسفه، ترجمه منوچهر صانعی دره بیدی، فلسفه دکارت: شامل یک مقدمه تحلیلی و ترجمه سه رساله دکارت، تهران، بین المللی الهدی، ۱۳۷۶ش.

لاکاتوش، ایمره، «اثبات ریاضیاتی چیست؟»، ترجمه و تألیف شاپور اعتماد، دیدگاهها و برهانها، نشر مرکز، ۱۳۸۷ش.

مقدم حیدری، غلامحسین، جامعه‌شناسی ریاضی، تهران، سمت، ۱۳۸۷ش.

هاسپرس، جان، درآمدی بر تحلیل فلسفی، ترجمه موسی اکرمی، طرح نو، ۱۳۸۷ش.

همپل، کارل، «ماهیت راستی ریاضی»، ترجمه و تألیف شاپور اعتماد، دیدگاهها و برهانها، نشر مرکز، ۱۳۸۷ش.

Bayat, H., "Lakatos and Hersh on mathematical proof", *Journal of Philosophical Investigations*, University of Tabriz, vol.9, no.17, 2015.

Cellucci, C., "Why Proof? What is a Proof?" *Deduction, Computation, Experiment Exploring the Effectiveness of Proof*, G. Corsi and R. Lupacchini (eds.), Berlin, 2008.

Concise Routledge Encyclopedia of Philosophy, Routledge, 2000.

Copi, I. M., & Carl Cohn, *Introduction to Logic*, Macmillan Publishing Company, 1990.

Detlefsen, M., "Proof: Its Nature and Significance", *Proof and Other Dilemmas*, Gold, B., et. al., (eds.), 2008.

Diamond, C., *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca, NewYork, 1976.

Eva Müller-Hill., “Formalizability and Knowledge Ascriptions in Mathematical Practice”, *Philosophia Scientiae*, 13(2), 2009. Available at:
http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG1/WG1_Mueller_Hill.pdf

Frascolla, P., *Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics*, Routledge, New York, 2006.

Hersh, R., *What Is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, New York, 1997.

Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie, Unpublished Lectures*, Niedersachsische Staat-und Universitatsbibliothek, Cod. Ms. Hilbert, 1894.

Idem, *Grundlagen der Geometrie, Unpublished Lectures*, Mathematisches Institut, Gottingen, 1902.

Lakatos, I., *Proofs and Refutations: the Logic of Mathematical Discovery*, Eds: John Worrall, Elie Zahar, Cambridge University Press, 1976.

Olsker, T. C., “What Do We Mean by Mathematical Proof?”, *Journal of Humanistic Mathematics*, vol.1, no.1, 2011.

Shapiro, S., *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2005.

Tymoczko, Th., “The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance”, *The Journal of Philosophy*, vol.76, no.2. 1979.

Williamson, J., Federica Russo(eds), *Key Terms in Logic*, Continuum Press, 2010.