فصلنامه علمی پژوهشی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال یازدهم، شماره سی‌وهفتم
بهار ۱۳۹۷

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری تحت نظریه اعتبار فازی با استفاده از مدل میانگین–ارزش در معرض ریسک مشروط

سیدبابک ابراهیمی[۱]
امیرسینا جیرفتی[۲]
متین عبدی[۳]

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۴/۳۰ تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۷/۲۰

چکیده

با توجه به غیر قطعی بودن داده‌های مالی استفاده از روش‌های فازی باعث دقت بیشتری در مدل‌سازی می‌شود. هم‌چنین استفاده از سنجه‌ی ریسک ارزش در معرض خطر مشروط به این‌که اندازه ضرر را به سرمایه‌گذار نشان می‌دهد، به تصمیم‌گیری بهتر کمک می‌کند. در این مقاله با استفاده از سنجه ارزش در معرض ریسک مشروط و تخمین آن به‌وسیله نظریه اعتبار فازی اقدام به بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری شده است. به این منظور، بازده انتظاری پرتفوی به وسیله میانگین اعتبار فازی به‌دست آمده و سپس ارزش در معرض ریسک مشروط به وسیله همین نظریه تخمین زده شده‌است. در مرحله بعد با درنظر حجم معاملات هر دارایی به شکل یک عدد فازی ذوزنقه‌ای و به‌دست آوردن یک رابطه خطی بر مبنای نظریه اعتبار، محدودیت نقدشوندگی در مدل درنظر گرفته می‌شود. همچنین جهت کاراتر شدن مدل، محدودیت‌های کف و سقف نسبت‌های سرمایه‌گذاری و محدودیت کاردینالیتی در مدل درنظر گرفته شده‌است. مدل ارائه شده با توجه به استفاده از سنجه ریسک ارزش در معرض ریسک مشروط و همچنین درنظر گرفتن محدودیتهای کارا، می‌تواند به عنوان مدلی مناسب جهت انتخاب سبد سرمایه‌گذاری معرفی شود. در نهایت نیز جهت پیاده‌سازی مدل، یک مثال عددی با استفاده از ۱۰ سهم از بورس اوراق بهادار تهران در سال ۹۴ که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، ارزش در معرض ریسک مشروط، نظریه اعتبار فازی، مدل میانگین-ارزش در معرض ریسک مشروط.

۱- استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی تهران، تهران، ایران (نویسنده مسئول) b_ebrahimi@kntu.ac.ir
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی تهران، تهران، ایران.
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی تهران، تهران، ایران.

۱- مقدمه

مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری[1] از مسائل کلاسیک دنیای مالی می‌باشد که اولین بار توسط هری مارکوویتز (۱۹۵۲) بیان گردید. رویکرد مارکوویتز به دنبال حداکثرکردن بازده پرتفوی و حداقل کردن ریسک آن است که در آن معمولا یک جزء ریسک یا بازده در تابع هدف قرارگرفته و دیگری به‌عنوان یک محدودیت درنظر گرفته می‌شود. پژوهش‌های زیادی در خصوص بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری در ادبیات موضوع وجود دارد. با توجه به عدم قطعیت موجود در داده‌های مالی، استفاده از نظریه‌های فازی به ما کمک می‌کند تخمین مناسب‌تری از آینده داشته باشیم. در این راستا پژوهش‌هایی انجام شده اند که بازدهی سرمایه‌گذاری را به صورت اعداد فازی در نظر گرفته‌اند و از نظریه‌های فازی برای تخمین مسئله استفاده کرده‌اند. نظریه اعتبار[2] نیز از نظریه‌های نوین در مباحث فازی بوده که اولین بار توسط لیو (۲۰۰۴) معرفی شد و توسط آنها به عنوان شاخه جدیدی از ریاضیات برای مطالعه رفتار پدیده‌های فازی در سال ۲۰۰۷ گسترش یافت. در این پژوهش از نظریه اعتبار برای بدست‌آوردن بازده پرتفوی و همچنین ریسک آن با معیار ارزش در معرض ریسک مشروط[3] بهره گرفته شده‌است. به‌طور کلی ارزش در معرض ریسک[4] از سنجه‌های اندازه‌گیری ریسک نامطلوب بوده که در ابتدای دهه ۱۹۹۰ توسط مورگان معرفی شد و پس از آن به سرعت به عنوان یکی از محبوب‌ترین سنجه‌های ریسک شناخته شد. ارزش در معرض خطر به عنوان حداکثر زیان یک دارایی در سطح اطمینان معین و در زمانی مشخص معرفی می‌شود. اما این معیار اطلاعاتی در مورد شدت ضرر بیان نمی‌کند. از این رو سنجه جدیدی به‌نام ارزش در معرض ریسک مشروط معرفی گردید. این سنجه ضرر مورد انتظار را وقتی که ضرر بیشتر از صدک موردنظر باشد تعیین می‌کند. روش‌های متنوعی برای تخمین VaR و CVaR استفاده می‌شود. برای مثال روش‌های مبتنی بر سری‌های زمانی[5] نظیر روش‌های خانواده گارچ[6] در تخمین این سنجه متداول می‌باشند. اما پژوهش‌های اخیر همچون لی وچن (۲۰۰۷)، آلمیدا و کایماک (۲۰۰۹) و ژو و همکاران(۲۰۱۰) حاکی از آن است که برخی از روش‌های نیمه پارامتریک همچون روش‌های فازی علاوه بر سادگی بیشتر دقت بیشتری نیز در تخمین دارند. از این رو در این مقاله از نظریه اعتبار فازی برای تخمین ارزش در معرض ریسک مشروط بهره گرفته شده‌است. علاوه بر این برای کاراتر شدن مدل محدودیت نقدشوندگی با توجه به حجم معاملات روزانه در نظر گرفته شده است. همچنین محدودیت‌هایی همچون کف و سقف نسبت سرمایه‌گذاری و محدودیت کاردینالیتی[7] که مشخص‌کننده تعداد دارایی‌های داخل پرتفوی می‌باشد نیز به مدل اضافه گردیده‌است تا مدل با توجه به انتظارات سرمایه‌گذار، به‌عنوان مدلی کاربردی مورد استفاده قرارگیرد.

در بخش (۲) پیشینه تجربی پژوهش و در بخش (۳) مبانی نظری پژوهش که مبتنی بر ارائه مفاهیم پایه‌ای فازی و انخاب سبد سرمایه‌گذاری و روابط مربوطه است ارائه می‌شود. در بخش (۴) روش‌شناسی پژوهش مبتنی بر روش‌ها، روابط و متغیرهای آن ارائه شده و در بخش بعدی مدل مفهومی ارائه می‌گردد. در ادامه نیز یافته‌های پژوهش در قالب ارائه یک مثال عددی مطرح شده و نتایج بررسی و تحلیل می‌شوند.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

در مسئله کلاسیک انتخاب سبد سرمایه‌گذاری انحراف‌معیار بازده دارایی‌ها را به‌عنوان ریسک درنظر گرفته و درصدد حداقل کردن آن بودیم. این معیار هرگونه انحرافی چه بالاتر و چه پایین‌تر از بازده انتظاری را به عنوان ریسک تلقی می‌کرد، در حالی که بازده بیشتر از میانگین مطلوب سرمایه‌گذاران می‌باشد. برای رفع این مشکل، بعدها مارکوویتز (۱۹۹۱) سنجه دیگری به‌نام نیم‌واریانس را جایگزین نمود که فقط انحرافات منفی را به‌عنوان ریسک در نظر می‌گرفت. کونو و یامازاکی (۱۹۹۱) یک سنجه ریسک جدید را

توسعه دادند که در آن برای سنجش ریسک پرتفوی از قدرمطلق انحراف از میانگین استفاده می‌شد. استفاده از این سنجه مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌نماید. تحت تاثیر تلاش‌های کونو و یامازاکی، اسپرنزا (۱۹۹۳)، نیم قدر مطلق انحراف معیار را به عنوان جایگزینی برای اندازه‌گیری ریسک پیشنهاد می‌دهد. اما فرض مهم در سنجه‌های ریسک عنوان شده، فرض توزیع نرمال بازده دارایی‌ها می‌باشد. مندلبورت (۱۹۹۷) و فاما (۱۹۶۵) اولین کسانی بودند که نشان دادند توزیع بازده دارایی‌ها دارای قله‌ای بلندتر و دنباله‌ای پهن‌تر نسبت به توزیع نرمال می‌باشد. امروزه نیز توزیع بازده دارایی‌ها به عنوان توزیع دم پهن[۸] شناخته می‌شود. بنابراین، اندازه‌گیری ریسک نیازمند سنجه‌ای بود تا فرض نرمال بودن بازده دارایی‌ها را مفروض نگرفته باشد. بر این مبنا، سنجه ارزش در معرض ریسک در ابتدای دهه ۱۹۹۰ توسط جی‌پی مورگان معرفی شد. از مزایای این سنجه می‌توان به اندازه‌گیری ریسک نامطلوب بدون درنظر گرفتن توزیع نرمال اشاره کرد. ارزش در معرض ریسک نشان می‌دهد که حداکثر چه مقدار از دارایی‌های یک پرتفوی در یک افق زمانی مشخص و در یک سطح اطمینان معین در معرض ریسک قرار می‌گیرد. اما این سنجه، اطلاعاتی در مورد زیان انتظاری پرتفوی نمی‌دهد. برای رفع این مشکل، راکفلر و اوریاسو (۲۰۰۰) یک سنجه ریسک جدید معرفی نمودند که به نام ارزش در معرض خطر مشروط (CVaR) معروف است. ارزش در معرض خطر مشروط زیان انتظاری در یک سطح اطمینان تعیین شده را برآورد می‌کند و هم‌چنین این قابلیت را دارا است که به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود. برای ساخت مدل میانگین-ارزش در معرض ریسک مشروط می‌توان از نظریه‌های فازی استفاده نمود. به عنوان نمونه، ژانگ وسان (۲۰۱۰) با استفاده از شبیه‌سازی فازی بر مبنای الگوریتم ژنتیک مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری خود را بر مبنای ارزش در معرض ریسک مشروط تشکیل دادند. همچنین، گائو و همکاران (۲۰۱۱) مدل خود را برمبنای CVaR در یک محیط فازی تشکیل داده و برای حل مدل از الگوریتم هوشمند هیبریدی[۹] بهره جستند. علاوه بر این، دای و همکاران (۲۰۱۴) بادرنظر گرفتن پارامترهای بازه‌ای[۱۰] اقدام به بهینه‌سازی مدل Mean-CVar خود کردند. اما لی و همکاران (۲۰۱۳) صرفا به تخمین CVaR به وسیله نظریه اعتبار پرداختند و به کاربرد آن در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری اشاره‌ای نکردند. در این پژوهش از محدودیت نقدشوندگی برای برآورده نمودن خواسته سرمایه‌گذاران در مورد نقدشوندگی پرتفوی استفاده شده‌است. این محدودیت می‌تواند مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را به مدلی کاربردی تبدیل کند. به عنوان نمونه، گوپتا و همکاران (۲۰۱۴) در تشریح مدل‌های کاربردی انتخاب پرتفوی فازی، از این محدودیت استفاده نموده‌اند. در قسمت بعد به بیان مبانی نظری و روابط مورداستفاده در پژوهش، خواهیم پرداخت.

در این بخش به منظور آشنایی بیشتر با نظریه فازی به ارائه مفاهیم پایه فازی و تشریح روابط آن می‌پردازیم. سپس اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای تشریح گردیده و نظریه اعتبار فازی و روابط مربوط به آن بیان می‌گردد. همچنین مفاهیم مربوط به انتخاب سبد سرمایه‌گذاری و ارزش در معرض ریسک مشروط بیان می‌گردد.

۲-۱- منطق فازی

منطق فازی شاخه ای از علوم ریاضی می باشد که به بررسی ابهام در داده های ورودی می پردازد. نظریه فازی برای بیان و تشریح عدم قطعیت[۱۱] و عدم دقت در رویدادها بکار می‌رود. نظریه مجموعه های فازی برای اولین بار توسط پروفسور لطفی‌زاده در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید. به‌طور کلی در نظریه مجموعه‌های کلاسیک، عضویت به عنوان مفهومی محض به شکل ۰ یا ۱ مطرح می‌شود. به این معنی که یک عنصر یا متعلق به یک مجموعه است یا متعلق به آن مجموعه نیست. اما در نظریه فازی ارتباط بین

عناصر و مجموعه از طریق تابع عضویت یا درجه عضویت بیان می‌شود. بنابراین یک مجموعه فازی به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\} \qquad (۱)$$

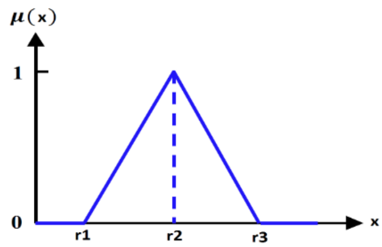
جایی‌که: X مجموعه عناصری می‌باشد که توسط x مشخص می‌شود و $\mu_A(x)$ درجه عضویت x در مجموعه فازی A می‌باشد.

۲-۲- متغیرهای فازی

در این بخش به تشریح متغیرهای فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای پرداخته می‌شود:

- **اعداد فازی مثلثی**: یک عدد فازی مثلثی را به شکل $\xi = (r_1, r_2, r_3)$ درنظر بگیرید. تابع عضویت این متغیر به شکل رابطه(۲) می باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - r_۱}{r_۲ - r_۱} & r_۱ \le x \le r_۲ \\ \dfrac{r_۳ - x}{r_۳ - r_۲} & r_۲ \le x \le r_۳ \end{cases} \qquad (۲)$$

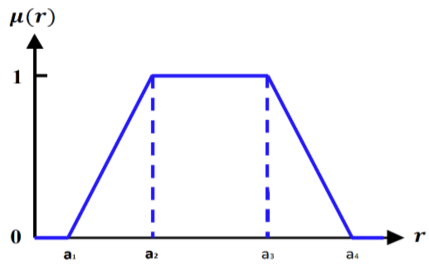


شکل۱- عدد فازی مثلثی

در این پژوهش، بازده دارایی‌ها به شکل اعداد فازی مثلثی درنظر گرفته شده‌است.

- **اعداد فازی ذوزنقه‌ای**: یک عدد فازی ذوزنقه‌ای را به شکل $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ درنظر بگیرید. تابع عضویت این متغیر به شکل رابطه(۳) می باشد:

$$\mu(r) = \begin{cases} \dfrac{x - a_۱}{a_۲ - a_۱}, & a_۱ \le x \le a_۲, \\ ۱, & a_۲ \le x \le a_۳, \\ \dfrac{a_۴ - x}{a_۴ - a_۳}, & a_۳ \le x \le a_۴, \end{cases} \qquad (۳)$$



شکل ۲- تابع عضویت عدد فازی ذوزنقه‌ای

در این پژوهش حجم معاملات به شکل اعداد فازی ذوزنقه‌ای درنظر گرفته شده‌است.

۳-۳- نظریه اعتبار فازی

فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع μ باشد. حال برای هر مجموعه B از مجموعه اعداد حقیقی داریم:

(۴)

$$Cr(\xi \in B) = \frac{۱}{۲}\left(\sup_{x \in B} \mu(x) + ۱ - \sup_{x \in B^C} \mu(x)\right)$$

در رابطه بالا Cr اندازه امکان نامیده می‌شود. همچنین درحالت خاص‌تر خواهیم داشت (برای هر $r \in R$):

(۵)

$$Cr(\xi \le r) = \frac{۱}{۲}\left(\sup_{x \le r} \mu(x) + ۱ - \sup_{x > r} \mu(x)\right)$$

همچنین مقدار مورد انتظار متغیر فازی ξ نیز توسط لیو و لیو (۲۰۰۲) به شکل رابطه زیر تعریف شد:

(۶)

$$E[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} Cr\{\xi \ge r\} dr - \int_{-\infty}^{۰} Cr\{\xi \le r\} dr$$

البته رابطه (۶) مشروط بر این است که حداقل یکی از دو انتگرال محدود باشد.

حال اگر $\xi=(a,b,c)$ یک متغیر فازی مثلثی باشد، به طوری که $(a<b<c)$، بنابراین E[ξ] مربوط به آن به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$E\left[\xi\right]=\frac{a+۲b+c}{۴} \qquad (۷)$$

حال اگر ξ یک متغیر فازی با ارزش موردانتظار متناهی e باشد، واریانس آن به‌صورت رابطه(۸) تعریف می‌شود:

$$V\left[\xi\right]=E\left[\left(\xi-e\right)^{۲}\right] \qquad (۸)$$

علاوه بر این، توزی اعتبار[۱۲] Φ:R→ [0, 1] برای یک متغیر فازی همانند ξ توسط لیو (۲۰۰۴) به شکل رابطه زیر تعریف شد:

$$\Phi\left(x\right)=Cr\left\{\theta\epsilon\Theta|\xi\left(x\right)\leq x\right\} \qquad (۹)$$

رابطه (۹) برای یک متغیر فازی مثلثی شکل با پارامترهای $\xi=(r_۱,r_۲,r_۳)$ به شکل رابطه زیر می‌باشد:

(۱۰)

$$\phi(t)=Cr(\xi\leq t)=\begin{cases} ۱, & r_۳\leq t \\ \dfrac{r_۳-۲r_۲+t}{۲(r_۳-r_۲)}, & r_۲\leq t\leq r_۳ \\ \dfrac{t-r_۱}{۲(r_۲-r_۱)}, & r_۱\leq t\leq r_۲ \end{cases}$$

۳-۴- مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری

همان‌طور که عنوان شد، مارکوویتز با انتشار نظریه انتخاب پرتفوی درسال ۱۹۵۲ تحول بزرگی در مباحث سرمایه‌گذاری ایجاد نمود، به طوری‌که نظریه مارکوویتز با عنوان نظریه نوین سرمایه‌گذاری شناخته می‌شود. در رویکرد مارکوویتز، سرمایه‌گذاران باید ریسک و بازده را به طور همزمان موردتوجه قرار داده و میزان تخصیص سرمایه به هریک از گزینه‌های سرمایه‌گذاری را تعیین نمایند. بنابراین، مارکوویتز میانگین موزون بازده مورد انتظار تک‌تک دارایی‌ها را به عنوان بازده انتظاری پرتفوی و واریانس بازده دارایی‌ها را به عنوان ریسک پرتفوی درنظر گرفت. بنابراین، مدل میانگین-واریانس مارکوویتز به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\min\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \\ &s.t:\sum_{i=۱}^{n}r_i x_i\geq r_., \qquad (۱۱) \\ &\sum_{i=۱}^{n}x_i=۱, i=۱,۲,....n, \end{aligned}$$

در رابطه بالا، r_i بازده دارایی iام و $r_.$ حداقل بازده پرتفوی می‌باشد. همچنین x_iها نسبت‌های سرمایه‌گذاری بوده که از حل مدل فوق بدست می‌آیند. رویکرد مارکوویتز یعنی حداقل کردن ریسک با مقید کردن بازده همچنان در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این وجود، در مدل‌های جدید سنجه‌های ریسک متفاوتی جایگزین سنجه ریسک مارکوویتز (انحراف معیار) شده و محدودیت‌های متنوعی به مدل اضافه می‌گردند.

۳-۵- ارزش در معرض ریسک مشروط

ارزش در معرض ریسک حداکثر زیان ممکن در سطح اطمینان معین را برآورد می‌کند، اما معین نمی‌کند که این زیان چه مقدار بد است. بنابراین ارزش در معرض ریسک را می‌توان با رابطه زیر تعریف نمود:

$$P(L>VaR_{\alpha})=1-\alpha \qquad (۱۲)$$

اما ارزش در معرض ریسک مشروط زیان انتظاری در یک سطح اطمینان تعیین شده را برآورد می‌کند. استفاده از ارزش در معرض خطر مشروط باعث می شود که مدل انتخاب سبد سهام به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود و همچنین با حل این مدل از آنجا که

CVaR ≥ VaRاست حداقل ارزش در معرض خطر نیز به دست می‌آید. براین اساس، فرض کنید f(x,ε) تابع زیان یک سبد سهام باشد. برای یک سطح اطمینان داده شدهα، ارزش در معرض ریسک مشروط برابر است با میانگین (1-α) درصد زیان‌ها و با استفاده از تابع زیر قابل محاسبه است:

(۱۳)

$$CVaR(x,\eta)=\eta+(1-\alpha)^{-1}\int_{\xi\in R^n}[f(X,\xi)]^{+}p(\xi)d\xi$$

جایی‌که ξ متغیر تصادفی، η ارزش در معرض ریسک (VaR) و $Z^{+}=\max\{Z,0\}$ می‌باشد.

۴- روش شناسی پژوهش

۴-۱- ارزش در معرض ریسک مشروط تحت نظریه اعتبار

فرض کنید ξ یک متغیر فازی و $\alpha \in (۰,۱]$ سطح اطمینان ریسک باشد. در این‌صورت ارزش درمعرض ریسک تحت نظریه اعتبار برای ξ به شکل تابع $\xi_{VaR}:(۰,۱] \rightarrow R$ بیان شده و به صورت رابطه(۱۴) محاسبه می‌شود:

(۱۴)

$$\xi_{VaR}(\alpha)=-\sup\{x \mid Cr\{\xi \le x\} \le \alpha\}$$

همچنین به شکل معادل، برای سطح اطمینانی مشخص از ریسک برابر با $۰ < \alpha \le ۱$ خواهیم‌داشت:

$$\xi_{VaR}(\alpha)=-\Phi^{-۱}(\alpha) \qquad (۱۵)$$

که در آن $\Phi^{-1}(\alpha)$ تابع معکوس عمومی‌شده[۱۳] $\Phi(x)$ می‌باشد.

ارزش درمعرض ریسک مشروط تحت نظریه اعتبار برای ξ به شکل تابع $\xi_{CVaR}:(۰,۱] \rightarrow R$ بیان شده و به صورت رابطه(۱۶) محاسبه می‌شود:

$$\xi_{CVaR}=\frac{۱}{۱-\alpha}\int_{\alpha}^{۱}\xi_{VaR}(r)dr \qquad (۱۶)$$

حال با توجه به روابط (۱۰) و (۱۵) و (۱۶)، می‌توان ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک مشروط را برای یک متغیر فازی مثلثی شکل با پارامترهای$\xi=(r_۱,r_۲,r_۳)$ در سطح اطمینان $\alpha \in (۰,۱]$ بدست آورد:

(۱۷)

$$\xi_{VaR}(\alpha)=\begin{cases} ۲(r_۱-r_۲)\alpha-r_۱ & \alpha<۰.۵ \\ ۲(r_۲-r_۳)\alpha+r_۳-۲r_۲ & \alpha\ge ۰.۵ \end{cases}$$

(۱۸)

$$\xi_{CVaR}(\alpha)=\begin{cases} \alpha r_۱-(۱+\alpha)r_۲ & \alpha\le ۰.۵ \\ (\alpha-۱)r_۲-\alpha r_۳ & \alpha>۰.۵ \end{cases}$$

لازم به ذکر است که معمولا در تخمین ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک مشروط سطح اطمینان بیش از ۵۰٪ درنظر گرفته می‌شود. بنابراین معمولا حالتی که $\alpha < ۰.۵$ می‌باشد، کاربرد دارد.

۴-۲- محدودیت‌های مورد استفاده در طراحی مدل

- **محدودیت نقدشوندگی:** همان‌طور که عنوان شد، در این مقاله حجم معاملات روزانه به‌صورت یک عدد فازی ذوزنقه‌ای درنظر گرفته‌شده و محدودیت نقدشوندگی از طریق نظریه اعتبار فازی بدست می‌آید. بر این اساس، محدودیت احتمالی برای اعتبار یک رویداد فازی که در آن نقدینگی پرتفوی کمتر از L نمی‌باشد، بزرگتر یا مساوی سطح اطمینان β $(۰/۵<\beta\le ۱)$ خواهد بود و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

(۱۹)

$$Cr\left[L_۱x_۱+L_۲x_۲+...+L_nx_n \ge L\right]\ge\beta$$

توجه داشته باشید که هر سطح اطمینان $\beta \le ۰/۵$ به دلیل کم بودن مقدار آن ممکن است در مسائل دنیای واقعی، بی‌معنی باشد. در رابطه با محدودیت‌های

احتمالی با توجه به نقدینگی پرتفوی، از یک استراتژی مبتنی به نتایج زیر که توسط ژو و ژانگ(۲۰۰۹) مطرح گردید، استفاده می‌شود:

اگر $\xi = (a, b, c, d)$ به طوری که $a < b < c < d$ باشد، به عنوان یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای در نظر گرفته شود، برای سطح اطمینان معین λ $(0/5 < \lambda \leq 1)$ خواهیم داشت:

(۲۰)

$$Cr\{\xi \geq r\} \geq \lambda \iff r \leq (2\lambda - 1)a + 2(1-\lambda)b$$

بنابراین اگر حجم معاملات دارایی‌ها به شکل یک عدد فازی ذوزنقه‌ای با پارامترهای $(L_{ai}, L_{bi}, L_{ci}, L_{di})$ باشد، محدودیت نقدشوندگی به شکل رابطه (۲۱) بیان می‌گردد:

(۲۱)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(2\beta - 1\right)L_{ai} + \left(2 - 2\beta\right)L_{bi}\right)x_i \geq L$$

در رابطه فوق β $(0/5 < \beta \leq 1)$ برابر سطح اطمینان بوده و L برابر حداقل میزان نقدشوندگی پرتفوی می‌باشد. این مقدار توسط سرمایه‌گذار و با توجه به انتظارات وی تعیین می‌گردد.

- **محدودیت کاردینالیتی:** این محدودیت تعداد دارایی‌های پرتفوی را به‌طور دقیق مشخص می‌کند. مثلا می‌توان تعیین کرد که دقیقا ۵ دارایی در داخل پرتفوی سرمایه‌گذار وجود داشته باشد. این محدودیت به شکل زیر می‌باشد:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = h \qquad (22)$$

در رابطه بالا h تعداد دارایی‌های موجود در پرتفوی است. اما y_i یک متغیر صفر ویک می‌باشد که به شکل زیر تعریف می‌شود:

(۲۲)

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر دارایی } i\text{ام در پرتفوی قرارداشته باشد} \\ 0 & \text{اگر دارایی } i\text{ام در پرتفوی قرارنداشته باشد} \end{cases}$$

- **محدودیت حداقل و حداکثر نسبت سرمایه‌گذاری:** این محدودیت مشخص می‌کند که حداکثر و حداقل نسبت سرمایه‌گذاری برای هر دارایی چقدر باشد. این محدودیت به شکل زیر تعریف می‌شود:

(۲۴)

$$l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i$$

در رابطه بالا l_i برابر حداقل نسبت سرمایه‌گذاری و u_i برابر حداکثر نسبت سرمایه‌گذاری برای دارایی iام می‌باشد.

۵- مدل مفهومی و متغیرهای پژوهش

حال اگر بازده هر یک از دارایی‌ها به شکل یک عدد فازی مثلثی با پارامترهای (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}) و همچنین حجم معاملات هر یک از آن‌ها به شکل یک عدد فازی ذوزنقه‌ای با پارامترهای $(L_{ai}, L_{bi}, L_{ci}, L_{di})$ باشند، با توجه به روابط (۷) و (۱۸) و (۲۱) و (۲۲) و (۲۳) و (۲۴)، می‌توان مدل برنامه‌ریزی خطی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را برای $\alpha < 0.5$ به شکل زیر مدل‌سازی نمود:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{n} x_i [\alpha r_{i1} - (1+\alpha) r_{i2}] \\
&s.t: \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{r_{i1} + 2r_{i2} + r_{i3}}{4} \geq R, \\
&\sum_{i=1}^{n}\left(\left(2\beta - 1\right)L_{ai} + \left(2 - 2\beta\right)L_{bi}\right)x_i \geq L, \\
&l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i, \\
&\sum_{i=1}^{n} y_i = h, \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\
&y_i = \{0, 1\} \\
&x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

در مدل بالا، x_i برابر نسبت سرمایه‌گذاری روی دارایی iام می‌باشد. همچنین R برابر حداقل بازده مورد

انتظار سرمایه‌گذار از پرتفوی بوده و L برابر حداقل نقدشوندگی پرتفوی برمبنای خواست سرمایه‌گذار می‌باشد. علاوه براین، β برابر سطح اطمینان نقدشوندگی، l_i برابر حداقل نسبت سرمایه‌گذاری و u_i برابر حداکثر نسبت سرمایه‌گذاری برای دارایی iام، h تعداد دارایی‌های داخل پرتفوی (برمبنای خواست سرمایه‌گذار) و y_i یک متغیر صفرویک است که در رابطه (۲۳) شرح داده شده‌است.

۶- یافته‌های پژوهش

در این بخش یک مثال عددی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با مدل میانگین-ارزش در معرض ریسک مشروط تحت نظریه اعتبار فازی ارائه می‌شود. بدین منظور ۱۰ سهم از بازار بورس اوراق بهادار تهران در سال ۹۴ به عنوان جامعه آماری کل، به صورت تصادفی انتخاب شده است. در انتخاب این دارایی‌ها سعی شده تا گروه‌های صنعتی مختلف درنظر گرفته شوند و حتی‌الامکان از داده‌های اخیر استفاده گردد. به همین دلیل از داده‌های سال ۱۳۹۴ استفاده شد چرا که در این سال شرایط بازار سرمایه بهتر و نابسامانی‌های مربوط به بازار نسبت به سال‌های قبل، کمتر بوده است.

برای پیش‌بینی بازده آتی دارایی‌ها به وسیله اعداد فازی مثلثی از سه عامل داده‌های تاریخی، روندهای اخیر داده‌ها و هم‌چنین نظر کارشناسان بر اساس صورت‌های مالی استفاده شده است. براین اساس، حداقل بازده آتی ممکن برای یک دارایی به عنوان پارامتر اول، محتمل‌ترین بازده دارایی در سال آینده به عنوان پارامتر دوم و حداکثر بازده ممکن سهم براساس سه عامل فوق به عنوان پارامتر سوم عددفازی مثلثی مربوط به بازده هریک از دارایی‌ها درنظر گرفته شده‌است. علاوه براین، در محدودیت نقدشوندگی مربوط به مدل، میزان نقدشوندگی هریک از دارایی‌ها به‌شکل یک عدد فازی ذوزنقه‌ای درنظر گرفته شده‌است؛ که برای به‌دست آوردن پارامترهای مربوط به این اعداد باید از حجم معاملات روزانه هر یک از دارایی‌ها کمک گرفت. در این مقاله مقادیر این پارامترها از طریق روش دلفی[۱۴] به‌دست آمده است. همچنین در این مثال سطح اطمینان برابر ۱۰ درصد و سقف و کف نسبت‌های سرمایه‌گذاری نیز به ترتیب ۰,۳ و ۰,۱ در نظر گرفته شده است. تعداد دارایی‌های داخل پرتفوی برای محدودیت کاردینالیتی نیز ۵ دارایی درنظر گرفته شده است. این مقادیر براساس انتظارات سرمایه‌گذاران تعیین می‌گردد. بنابراین، مقادیر سطح اطمینان و سقف و کف نسبت‌های سرمایه‌گذاری به عنوان داده‌های ورودی به‌وسیله سرمایه‌گذار (اغلب از طریق پرسشنامه‌هایی که در اختیار او قرار می‌گیرد) تعیین می‌شود. درنتیجه، مقادیر فوق به عنوان نمونه و برای یک سرمایه‌گذار فرضی با سطح انتظارات نرمال تعیین گردیده است. همچنین تعداد دارایی‌های داخل پرتفوی نیز بنابر درخواست سرمایه‌گذار به‌گونه‌ای تعیین می‌شود تا سرمایه‌گذار قدرت مدیریت و کنترل پرتفوی خود را داشته باشد.

با توجه به توضیحات ارائه شده، بازده فازی مثلثی و نقدشوندگی فازی ذوزنقه‌ای ۱۰ سهم مورد نظر به دست آمده و نتایج آن در جدول ۱ ارائه شده است.

پس از حل مدل، نسبت‌های بهینه سرمایه‌گذاری و همچنین مقدار تابع هدف مسئله که برابر ارزش در معرض ریسک مشروط (CVaR) می‌باشد، بدست می‌آید. این مقادیر بهینه برای نسبت‌های سرمایه‌گذاری در جدول ۲ برای حداقل بازده ۳۵٪ ارائه شده است. همچنین مقدار تابع هدف نیز برابر ۰,۴۸۲- به دست آمده است.

همان‌طور که از جدول ۱ و ۲ مشخص است، مدل معرفی‌شده، سرمایه‌گذاری بر روی پنج دارایی X_1 و X_2 و X_4 و X_7 و X_8 را پیشنهاد می‌کند.

جدول ۱- بازده فازی و نقدشوندگی فازی برای ۱۰ سهم منتخب

ردیف	نماد	بازده فازی مثلثی	نقدشوندگی فازی ذوزنقه‌ای
۱	دلر	(۱,۳۲ و ۰,۳۷ و -۰,۵۷)	(۶۸,۱۴ و ۳۹,۴۳ و ۲۱,۳۵ و ۹,۸۹)
۲	قصفها	(۲,۰۹ و ۰,۷۱ و -۰,۶۸)	(۵۹۴,۶۸ و ۱۵۷,۴۴ و ۶۰,۵۰ و ۱۶,۱۰)
۳	همراه	(۰,۴۳ و ۰,۰۶ و -۰,۳۰)	(۴۹۸,۵۵ و ۳۰۴,۴۶ و ۱۶۲,۵۵ و ۸۵,۲۷)
۴	خاور	(۰,۶۸ و ۰,۱۴ و -۰,۴۰)	(۲۷۵۰۲,۷۷ و ۱۱۸۷۶,۹۰ و ۷۰۳۰,۴۰ و ۳۶۱۳,۹۱)
۵	غپاک	(۰,۶۹ و ۰,۱۴ و -۰,۴۰)	(۲۵۷,۰۵ و ۷۳,۲۶ و ۳۳,۷۸ و ۹,۰۰)
۶	ستران	(۰,۳۸ و ۰,۰۵ و -۰,۲۷)	(۶۷۸,۸۴ و ۴۱۷,۵۹ و ۲۷۲,۵۸ و ۱۲۹,۰۴)
۷	پتایر	(۰,۷۵ و ۰,۱۶ و -۰,۴۳)	(۱۱۴۸,۳۹ و ۶۰۵,۳۶ و ۳۴۲,۲۱ و ۱۷۴,۳۵)
۸	بترانس	(۰,۸۴ و ۰,۱۹ و -۰,۴۶)	(۲۹۶۷,۲۵ و ۹۶۷,۰۷ و ۴۵۲,۰۷ و ۱۵۲,۴۵)
۹	وسینا	(۰,۴۱ و ۰,۰۶ و -۰,۲۹)	(۱۱۴۱۸,۰۱ و ۶۱۴۵,۱۴ و ۳۱۵۲,۴۰ و ۱۹۴۶,۹۱)
۱۰	ودی	(۰,۲۵ و ۰,۰۳ و -۰,۲۰)	(۸۵۶,۶۶ و ۴۰۷,۸۶ و ۲۰۸,۵۸ و ۱۱۵,۲۱)

جدول ۲- نتایج حاصل از اجرای مدل برای ٪۳۵ =R

مقدار ارزش در معرض ریسک مشروط: ۰,۴۸	۵	۴	۳	۲	۱	دارایی
	۰	۰,۱۶	۰	۰,۳	۰,۳	نسبت سرمایه‌گذاری
	۱۰	۹	۸	۷	۶	دارایی
	۰	۰	۰,۱۴	۰,۱	۰	نسبت سرمایه‌گذاری

روش‌های متنوعی برای بررسی بهینگی پرتفوی وجود دارد. دراین پژوهش از معیار ترینر[15] جهت بررسی بهینگی پرتفوی استفاده شده است. این روش که به معیار بازده به نوسان پذیری[16] نیز معروف است، رابطه ترینر را برای پرتفوی موردنظر و بازار محاسبه کرده و به مقایسه آن‌ها می‌پردازد. اگه این مقدار برای پرتفوی موردنظر بزرگ‌تر از مقدار محاسبه شده برای بازار باشد حاکی از بهینگی نسبی پرتفوی می‌باشد. معیار ترینر به شکل رابطه زیر می‌باشد:

$$\frac{R_p - R_F}{\beta_P} \qquad (۲۵)$$

در رابطه بالا R_P بازده انتظاری پرتفوی، R_F نرخ بازده بدون ریسک و β_P مقدار بتای موزون پرتفوی می‌باشد که برای هر دارایی از طریق مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای[17](CAPM) به‌دست می‌آید.

حال باید مقدار معیار ترینر را برای بازار و پرتفوی موردنظر به‌دست آورد. نتایج حاکی از بهینگی پرتفوی تشکیل‌شده نسبت به بازار می‌باشد:

جدول۳- نتایج حاکی از تست بهینگی ترینر

نتیجه	مقدار رابطه ترینر برای پرتفوی	مقدار رابطه ترینر برای بازار
بهینگی پرتفوی نسبت به بازار	۰,۲۳	۰,۱۰

لازم به ذکر است بازده بازار در سال ۹۴ برابر ٪۲۸ بوده و نرخ بازده بدون ریسک نیز ٪۱۸ درنظر گرفته شده است.

در مدل معرفی شده، وجود محدودیت‌های کاردینالیتی و سقف و کف نسبت‌های سرمایه‌گذاری سبب تنوع بیشتر در پرتفوی می‌گردد. همچنین وجود محدودیت نقدشوندگی نیز موجب می‌شود تا حداقل نقدشوندگی مورد درخواست سرمایه‌گذار نیز ارضاء گردد. تفاوت مدل معرفی شده نسبت به مدل‌های مرسوم در ادبیات موضوع این است که معمولا در مدل‌های مرسوم تخمین ارزش در معرض ریسک یا ارزش درمعرض ریسک مشروط به‌وسیله مدل‌های سری زمانی[18] انجام می‌گیرد که علاوه بر پیچیدگی محاسبات، دقت روش‌های فازی را نیز دارا نیستند (براساس تحقیقات آلمیدا و کایماک (۲۰۰۹)). علاوه براین، در مقالاتی که از نظریه‌های فازی استفاده شده است، نظیر مقالات گائو و همکاران (۲۰۱۱) و یا دای و

همکاران (۲۰۱۴)، به دلیل عدم استفاده از نظریه اعتبار، مدل به یک مدل پیچیده تبدیل شده که حل آن نیازمند استفاده از الگوریتم‌های دشوار می‌باشد. اما در تحقیق صورت‌گرفته به دلیل استفاده از نظریه اعتبار فازی، ارزش در معرض ریسک مشروط در محیطی فازی و به شکل خطی تخمین زده شده است که فرآیند حل به صورت دقیق انجام می‌گیرد. از طرف دیگر، استفاده از محدودیت‌های کاردینالیتی، سقف و کف نسبت سرمایه‌گذاری و همچنین حداقل نقدشوندگی پرتفوی موجب کاربردی شدن مدل می‌گردد. این محدودیت‌ها به‌طور همزمان در هیچ یک از مدل‌های موجود در ادبیات موضوع وجود ندارند.

۷- نتیجه‌گیری و بحث

در این مقاله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از سنجه ریسک ارزش در معرض خطر مشروط مورد بررسی قرار گرفت. برای تخمین ارزش در معرض ریسک مشروط از نظریه اعتبار فازی استفاده شد. بدین منظور، بازده آتی دارایی‌ها به شکل اعداد فازی مثلثی شکل درنظر گرفته شده‌اند، سپس با استفاده از توزیع اعتبار برای اعداد فازی مثلثی شکل، رابطه‌ای برای ارزش در معرض ریسک مشروط بدست آمد. این رابطه به عنوان تابع هدف در مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری درنظر گرفته می‌شود. علاوه براین، بازده انتظاری پرتفوی نیز با استفاده از میانگین اعتبار فازی محاسبه گردید. همچنین برای کارایی بیشتر مدل محدودیت‌هایی از قبیل نقدشوندگی، کاردینالیتی و سقف و کف نسبت‌های سرمایه‌گذاری در مدل لحاظ شده است. برای استفاده از محدودیت نقدشوندگی از حجم معاملات روزانه دارایی‌ها استفاده شد که برای بدست آوردن رابطه‌ای برای آن نیز از نظریه اعتبار فازی بهره گرفته شده‌است. در انتهای پژوهش نیز با استفاده از داده‌های بورس اوراق بهادار تهران یک مثال عددی برای پیاده سازی مدل ارائه گردید. استفاده از نظریه اعتبار فازی در مدل باعث خطی شدن تابع هدف و محدودیت‌ها گردید که استفاده از مدل را برای کاربران ساده‌تر می‌کند. همچنین استفاده از سنجه ارزش در معرض ریسک مشروط که از سنجه‌های نوین ریسک می‌باشد، به بهبود مدل و تخمین بهتر ریسک پرتفوی کمک می‌کند. علاوه بر این استفاده از محدودیت نقدشوندگی مدل را به واقعیت نزدیک‌تر کرده و باعث افزایش اعتبار مدل می‌شود. محدودیت‌های کاردینالیتی و حداقل و حداکثر نسبت سرمایه‌گذاری نیز باعث می‌شوند سرمایه‌گذار امکان اعمال سلیقه بیشتری روی مدل را داشته باشد که برای سرمایه‌گذاران مطلوب است. با توجه به موارد ذکر شده می‌توان ادعا نمود مدل معرفی‌شده در این مقاله می‌تواند به عنوان مدلی کاربردی در مسائل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به‌کار گرفته شود.

فهرست منابع

* Almeida, R. J., & Kaymak, U. (2009). Probabilistic fuzzy systems in value-at-risk estimation. Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management, 16(1-2), 49-70.
* Dai, C., Cai, X. H., Cai, Y. P., Huo, Q., Lv, Y., & Huang, G. H. (2014). An interval-parameter mean-CVaR two-stage stochastic programming approach for waste management under uncertainty. Stochastic environmental research and risk assessment, 28(2), 167-187.
* Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. The journal of Business, 38(1), 34-105.
* Gao, J., Zhang, X., & Wang, Q. (2011, July). Fuzzy portfolio selection based on Mean-CVaR models. In 2011 International Conference on Business Computing and Global Informatization (pp. 98-100). IEEE.
* Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014). Fuzzy portfolio optimization. Studies in fuzziness and soft computing, 316.
* Huang, X. (2010). What Is Portfolio Analysis. In Portfolio Analysis (pp. 1-9). Springer Berlin Heidelberg.
* Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management science, 37(5), 519-531.

* Liu, B. Uncertainty Theory: An Introduction to its Axiomatic Foundations. 2004.
* Liu, B., & Liu, Y. K. (2002). Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. IEEE transactions on Fuzzy Systems, 10(4), 445-450.
* Liu, Y., & Gao, J. (2007). The independent of fuzzy variables in credibility theory and its applications. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 15, 1-20.
* Li, L., Li, J., Qin, Q., & Cheng, S. (2013, October). Credibilistic conditional value at risk under fuzzy environment. In Advanced Computational Intelligence (ICACI), 2013 Sixth International Conference on (pp. 350-353). IEEE.
* Mandelbrot, B. B. (1997). The variation of certain speculative prices. InFractals and Scaling in Finance (pp. 371-418). Springer New York.
* Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. The journal of finance, 7(1), 77-91.
* Markowitz, H. M. (1991). Foundations of portfolio theory. The journal of finance, 46(2), 469-477.
* Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. Journal of risk, 2, 21-42.
* Speranza, M. G. (1993). Linear programming models for portfolio optimization.
* Xu, Z., Shang, S., Qian, W., & Shu, W. (2010). A method for fuzzy risk analysis based on the new similarity of trapezoidal fuzzy numbers. Expert Systems with Applications, 37(3), 1920-1927.
* Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*(3), 338-353.
* Zhang, X., & Sun, W. (2010, October). Mean-CVaR models for fuzzy portfolio selection. In Intelligent System Design and Engineering Application (ISDEA), 2010 International Conference on (Vol. 1, pp. 928-930). IEEE.
* Zhu, H., & Zhang, J. (2009, November). A credibility-based fuzzy programming model for APP problem. In Artificial Intelligence and Computational Intelligence, 2009. AICI'09. International Conference on (Vol. 1, pp. 455-459). IEEE

یادداشت‌ها

---

1. Portfolio selection problem
2. Credibility theory
3. Conditional Value at Risk
4. Value at Risk
5. Time series
6. GARCH Family
7. Cardinality Constraint
8. Fat tail
9. Hybrid intelligent algorithm
10. Interval parameters
11. Uncertainty
12. Credibility distribution
13. Generalized inverse function
14. Delphi Method
15. Treyner
16. Reward to volatility ratio
17. Capital Asset Pricing Model (CAPM)
18. Time series model