

استخراج ریاضی مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای در چارچوب حسابداری ذهنی

محمد رضا اولی^۱

هاشم نیکومرام^۲

آزینا جهانشاد^۳

زهرا پورزمانی^۴

تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۷/۱۰

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۵/۲۳

چکیده

سرمایه گذاران عادی به پرتفوی خود به عنوان یک کل نگاه نمی کنند. این سرمایه گذاران، پرتفوی خود را به عنوان مجموعه ای از حساب های ذهنی در نظر می گیرند. در حسابداری ذهنی مساله متعارف بیشینه سازی بازده مورد انتظار با محدودیت حداکثر احتمال شکست در دستیابی به بازده آستانه ای است. در پژوهش حاضر از مدل میانگین واریانس مارکوویتز و ورود دارایی بدون ریسک به محدودیت این مدل، مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه ای را استخراج کرده و سپس با ایجاد یک هم ارزی ریاضی میان اجزای این الگو با محدودیت مساله حسابداری ذهنی، مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای در چارچوب حسابداری ذهنی را ارائه می نماییم. در این مدل، بازده مورد انتظار سرمایه گذار برای هر هدف که در قالب حساب های ذهنی ارائه می شود، تابعی از بازده دارایی بدون ریسک، بتا و صرف ریسک حساب ذهنی بوده و این صرف ریسک حساب ذهنی معادل اختلاف بازده هر حساب با بازده دارایی بدون ریسک می باشد. نرخ بازده مورد انتظار دارایی ها در مدل MA-CAPM، متأثر از بازده آستانه ای و احتمال شکست در رسیدن به این سطح آستانه یا به عبارتی ریسک حساب ذهنی خواهد بود.

واژه های کلیدی: مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای، حسابداری ذهنی، بازده آستانه ای، احتمال شکست، بتا حساب ذهنی، صرف ریسک حساب ذهنی.

۱- دکتری حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران (نویسنده مسئول) mohammadreza_ola@yahoo.com

۲- استاد، گروه حسابداری دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

۳- دانشیار گروه حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، تهران، ایران

۴- دانشیار گروه حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، تهران، ایران

۱- مقدمه

در اواخر دهه ۱۹۸۰ تالر به نحوه تعامل افراد با مقوله پول پرداخت و در این زمینه تحقیقاتی انجام داد و به نتایجی رسید که مفروضات قبلی خصوصا اصل اقتصادی تعویض پذیری پول^۱ فریدمن را نقض می کند. تحقیقات تالر نشان داد که افراد در ذهن خود حساب فعالیت های مختلف را به صورت جداگانه نگهداری می کنند و ترکیبی از کل حساب ها به صورت ذهنی ایجاد نمی کنند. بر اساس مطالعات انجام شده تالر نحوه جداسازی حساب ها بر اساس منبع دارایی و هدف از مصرف دارایی می باشد. افراد برای تسهیل فرایند تصمیم گیری، آن را به اجزاء متفاوت تفکیک کرده و پس از ساده سازی تصمیم گیری می کنند.

تمایل به انطباق حسابداری ذهنی در تصمیم گیری های مربوط به انتخاب سبد سهام نیز کاربرد دارد و سرمایه گذاران با هر جزء از سبد سرمایه گذاری خود به صورت مجزا برخورد می کنند (برابازون^۲ ۲۰۰۰). در حقیقت در تئوری مدرن پرتفوی، سرمایه گذاران باید به مطلوبیت نهایی کل سرمایه گذاری خود توجه کنند، نه به اجزاء سبد سرمایه گذاری. با این وجود تئوری پرتفوی رفتاری شفرین و استتمن^۳ (۲۰۰۰) شامل ایجاد ساختار لایه ای پرتفوی بود که البته در آن به کوواریانس بین لایه ها توجه نمی شود و مبنای طبقه بندی لایه ها می توانند معیارهای متفاوت داشته باشد که یکی از معیارهای متداول این طبقه بندی بر اساس ریسک حساب ذهنی است.

اگرچه مارکویتز چگونگی تشکیل پرتفوی بهینه را به سرمایه گذاران توصیه می کند، اما تحقیقات گسترده بر رفتار سرمایه گذاران نشان می دهد بیشتر سرمایه گذاران این گونه عمل نمی کنند. تئوری بازار سرمایه با بسط و تعمیم تئوری پرتفوی مدلی را برای قیمت گذاری دارایی های ریسکی استخراج می کند که خروجی نهایی این تئوری به نام مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای این امکان را فراهم می سازد تا نرخ بازده مورد انتظار دارایی ریسکی تعیین

شود. CAPM بر اساس تئوری های میانگین واریانس مارکویتز و بازار سرمایه شکل گرفت. در این پژوهش از مدل میانگین واریانس مارکویتز و ورود دارایی بدون ریسک به محدودیت این مدل، مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه ای را ارائه می کنیم و سپس با ایجاد یک هم ارزی ریاضی و به روش های حل دقیق، میان اجزای این الگو با محدودیت مساله حسابداری ذهنی، مدل نوینی با نام مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای در چارچوب حسابداری ذهنی MA-CAPM را استخراج نمودیم. تحقیق حاضر بر اساس هدف تحقیق، از نوع توسعه ای و از نظر اجرا با استفاده از مدل سازی ریاضی می باشد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش مغایرت های رفتاری مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای

در تحقیقات مالی کلاسیک فرض می شد که همبستگی کمی بین رفتار تک تک سرمایه گذاران وجود دارد و به این ترتیب تورش احساسات و رفتار سرمایه گذاران یکدیگر را خنثی کرده و بازار در مجموع کارا است. در حالی که در دیدگاه رفتاری، سرمایه گذاران از یکدیگر اثر می پذیرند و ضمنا انواع تورش های ادراکی و احساسی بر رفتار آن ها و تصمیم گیری آنان برای خرید و فروش سهام اثر می گذارد. تورش های مزبور در مجموع بر کارایی بازار اثر گذاشته و نمی توان آن را خنثی شده توسط رفتار سرمایه گذاران تلقی کرد. همچنین این تورش ها به عوامل اثرگذار فرایند قیمت گذاری تبدیل می گردد. در دیگر تحقیقات تایید شده است که واکنش رفتاری سرمایه گذاران می تواند به عنوان مولفه مهمی در فرایند قیمت گذاری بازار به حساب آید (سعیدی و فرهانیان ۱۳۹۰).

در میان بحث هایی که بیان می شد، لاکونیشوک و همکاران^۴ (۱۹۹۲) نقش عوامل رفتاری را در تشریح مغایرت ها بررسی نمودند. آن ها استدلال می نمایند

(۲۰۰۱) چارچوب جدیدی برای قیمت گذاری دارایی پیشنهاد نمودند که از روش سنتی مبتنی بر مصرف گرفته شده و دو ایده ی قدیمی روانشناسی یعنی نظریه مطلوبیت کانمن و تورسکی^{۱۱} (۱۹۷۹) و شواهدی از تالر (۱۹۸۰) در مورد این که چگونه نتایج گذشته بر انتخاب ریسکی اثر می گذارند را در آن گنجانند. نتیجه ی اصلی کار آن ها این بود که ریسک گریزی در طول زمان به عنوان تابعی از عملکرد سرمایه گذاری تغییر می کند. روکن باخ^{۱۲} (۲۰۰۴) تحقیقی در مورد قیمت گذاری اختیار معاملات مالی انجام داد. قیمت گذاری اختیار معاملات بدون آربیتراژ با سه فرضیه که بر مبنای حسابداری ذهنی بود آزمایش شد. داده های بدست آمده نشان دادند که با وجود تجربه ی بالا فرصت آربیتراژ همواره وجود دارد. این موضوعات ارتباطی بین احتمال سرمایه گذاری های مختلف که برای قیمت گذاری بدون آربیتراژ ضروری است را بوجود نمی آورد. استتمن و دیگران (۲۰۰۸) به ترسیم مدل قیمت گذاری دارایی های رفتاری پرداختند و دریافتند که در آن مدل، زمانی بازده مورد انتظار بالا می رود که ریسک عینی و ذهنی بالا باشد. در بررسی دیگری که با همکاری چوی و دیگران^{۱۳} (۲۰۰۹) با عنوان حسابداری ذهنی در انتخاب پرتفوی صورت گرفت دریافتند که گاهی مواقع سرمایه گذاران تخصیص دارایی یک حساب را بدون در نظر گرفتن دارایی های تخصیص یافته به حساب های دیگر انجام می دهند. آن ها در مقاله خود عدم هماهنگی بین دارایی های اعتباری (تخصیص دارایی) حساب های مختلف را در پرتفوی خانوارها نشان دادند. کاناد حسن و اراموالارتان^{۱۴} (۲۰۱۴) به بررسی نقش های رفتاری در تصمیمات سرمایه گذاری پرداختند. با وجود این که مثال هایی زیادی در زمینه خطاهای حسی وجود دارد، اما مالی رفتاری ادعا نمی کند که کلیه سرمایه گذاران به طور همزمان از یک نوع خطا حسی رنج می برند.

که بازده های سهام رشدی^۵ و سهام ارزشی^۶، ناشی از خطای انتظار یا توقع در سرمایه گذاران می باشد. سرمایه گذاران تمایل دارند تا از روی نرخ های رشد گذشته، آینده ای خیلی دور را پیش بینی نمایند. آن ها احتمالات مختلفی را که می تواند این اختلافات در بازده های میانگین را توضیح دهد، پیشنهاد می کنند:

- ممکن است سرمایه گذاران تمایل داشته باشند تا در شرکت های "خوب" با سطح بالایی از سود آوری سرمایه گذاری نمایند. یک شرکت خوب در دیدگاه سرمایه گذاران ساده طبع، ممکن است مترادف با سرمایه گذاری صرف نظر از قیمت باشد و حتی ممکن است چنین سهامی را با ریسک کمتر در نظر بگیرند.
- سرمایه گذاران حقوقی خبره و ماهر ممکن است پرتفوی های خود را به سمت سهام شرکت های شناخته شده سوق دهند چرا که آن ها به سهولت می توانند آن را برای مشتریان خود توجیه کنند. این امر ممکن است قیمت های این گونه سهام را بالا برده و بازده مورد انتظار آنها را کاهش دهد.

همچنین در تحقیقاتی تمایل سرمایه گذاران برای واکنش بیش از واقع و کمتر از واقع^۷ به ترتیب در مفهوم "بازنده و برنده" (دی بان و تالر ۱۹۸۷) و استراتژی تمایل به عملکرد گذشته^۸ (جگادیش و تیمن^۹ ۱۹۹۳) به خوبی مستند شده است. مفهوم "برنده و بازنده" (معکوس سازی) نشان می دهد که طی افق های زمانی بلند مدت (۳ تا ۵ سال) و دوره های کوتاه مدت (یک ماه یا کمتر) بازندگان گذشته برنده می شوند و بالعکس. از سوی دیگر بر اساس روش هوانگ و سالمون، نوعی توده واری مورد بررسی قرار می گیرد که سرمایه گذاران از عملکرد یکی از متغیرها مثل شاخص بازده بازار پیروی می کنند و بر اساس آن تصمیمات مربوط به خرید و فروش یک سهم را بدون توجه به مدل تعادلی ریسک و بازده اتخاذ می کنند (هوانگ و سالمون، ۲۰۰۱). در این مدل بتای توده واری^{۱۰} تعریف می شود. باربری و دیگران

مروری بر حسابداری ذهنی

سرمایه گذاران رفتاری، فرآیند ایجاد پرتفوی رفتاری را به وسیله تقسیم پرتفوی به حساب های ذهنی به عنوان لایه های یک هرم، انجام می دهند. یک حساب ذهنی ممکن است به لایه هایی برای حمایت پرتفوی در برابر فقر طراحی شده و یا ممکن است که به منظور رسیدن به ثروت تشکیل شده باشد (شفرین و استتمن، ۲۰۰۰). سرمایه گذاران ممکن است طوری رفتار کنند که در حساب های ذهنی واقع در لایه های حمایتی پایین^{۱۵} ریسک گریز بوده در حالی که در لایه های بالا به گونه ای رفتار کنند که به دنبال ریسک هستند. مالی رفتاری نظایر این پدیده را تحت عنوان حسابداری ذهنی تعریف می کند. براساس این ویژگی، سرمایه گذاران به جای در نظر گرفتن تغییرات مجموع ارزش دارایی خود، آن را به اجزای مختلف یا اصطلاحاً حساب های ذهنی جداگانه تقسیم و به طور مجزا بررسی می کنند. بدین معنا که اشخاص عمدتاً دارایی ها و درآمدهای خود را در دو حساب ذهنی جداگانه منظور می کنند و بین حساب درآمدی و حساب ثروت تمایز قائل می شوند (استتمن ۲۰۱۴). به عبارت دیگر، بر اساس این خطای رفتاری، افراد در تصمیم های مالی خود برای ارزیابی هر تصمیم، حسابی جداگانه در ذهن باز کرده و سعی می کنند عواقب هر تصمیم (مثبت یا منفی) را به تنهایی بررسی کنند. به این ترتیب، از یک نگاه کلی به مجموعه تصمیم های خود (شبه پرتفوی) باز می مانند و ممکن است تصمیم هایی بگیرند که منجر به حداکثرسازی ثروتشان نشود. حسابداری ذهنی قسمتی از نظریه چشم انداز^{۱۶} است که گرایش افراد را به قراردادن رویدادهای مخصوص به حساب های ذهنی متفاوت براساس ویژگی های ظاهری نشان می دهد. داس، مارکوویتز، شید و استتمن^{۱۷} (۲۰۱۰) ساختارهایی برای پرتفوی های حسابداری ذهنی ایجاد نمودند که تئوری پرتفوی میانگین واریانس را با ویژگی های حسابداری ذهنی ترکیب می کند. آن ها به این نتیجه رسیدند که تعمیم دهی تئوری پرتفوی

میانگین واریانس و تئوری پرتفوی رفتاری از طریق چارچوب های متعدد حسابداری ذهنی باعث اتصال مفید و مستمر بین اهداف مصرفی سرمایه گذار و ایجاد پرتفوی خواهد شد. در ایران نیز رهنمای رودپشتی و همکاران (۱۳۹۱) در مقاله ای ضمن بررسی مفاهیم مالی رفتاری، به تبیین الگوی انتخاب پرتفوی در چارچوب تئوری های مالی رفتاری پرداخته و چهار مفهوم زیان گریزی، حسابداری ذهنی، ریسک پذیری نامتقارن و تابع وزن دهی احتمالات، در قالب الگوی ریاضی ارائه شده است. همچنین زنجیر دار و همکاران (۱۳۹۳) در پژوهشی تأثیر عوامل رفتاری به صورت غالب حسابداری ذهنی در سرمایه گذاری سهام و انتخاب پرتفوی بهینه مورد سنجش قرار گرفت.

۳- یافته های پژوهش

بهینه سازی پرتفوی در چارچوب حسابداری ذهنی

تئوری پرتفوی میانگین واریانس مارکوویتز (۱۹۵۲)، با کاربردهای منطقی و عملی اش، مورد توجه سرمایه گذاران است. مسئله متعارف این تئوری، دربرگیرنده کمینه سازی واریانس پرتفوی با ضریب ریسک گریزی معادل یک ($\gamma \equiv 1$) می باشد. هدف از بهینه سازی تعیین متغیرها به گونه ای است که تابع هدف کمینه شود. در این بخش ابتدا مدل میانگین واریانس مارکوویتز در زمانی که نگرش ثابتی نسبت به ریسک وجود دارد، ارائه می گردد. تابع هدف و محدودیت آن به شکل زیر می باشد.

معادله ۱

$$\text{Min } 1/2 \omega \Sigma \omega$$

s.t.

معادله ۲

$$\omega \mu = \mu_p$$

معادله ۳

$$\omega e = 1$$

واریانس را در شکل برداری خود به صورت زیر تعریف کردند.

معادله ۱۰

$$\max_{\omega} \omega \mu - \frac{\gamma}{2} \omega \Sigma \omega$$

معادله ۱۱

$$\text{s.t.} \\ \omega e = 1$$

اوزان دارایی ها در پرتفوی به شکل برداری برای n دارایی $w = [w_1, \dots, w_n]'$ تعریف می شود، همچنین دارایی ها یک بردار بازده $\mu \in R_n$ و ماتریس کواریانس بین بازده ها $\Sigma \in R_{n \times n}$ را خواهند داشت. جهت پیشینه سازی از روش ضریب لاگرانژ استفاده می گردد:

معادله ۱۲

$$\text{Max } L_{\omega, \lambda} = \omega \mu - \frac{\gamma}{2} \omega \Sigma \omega + \lambda [1 - \omega 1]$$

که در نهایت پس از مشتق گیری بردار اوزان دارایی ها $\omega(\gamma)$ بر حسب میزان ریسک گزینی بدست خواهد آمد:

معادله ۱۳

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left[\mu - \left(\frac{\hat{1} \Sigma^{-1} \mu - \gamma}{\hat{1} \Sigma^{-1} 1} \right) 1 \right]$$

آگاهی از ضریب ریسک گزینی γ برای هر سرمایه گذار، دلالت بر نقطه ای روی مرز کارا دارد که مطلوبیت میانگین واریانس سرمایه گذار را به حداکثر می رساند. سرمایه گذاران با توجه به میزان ریسک گزینی خود، اوزان پرتفوی $w = [w_1, \dots, w_n]'$ را برای n دارایی انتخاب می کنند.

در مدل مارکوویتز و همکاران (۲۰۱۰) سرمایه گذاران پرتفوی هایشان را مجموعه ای از زیر پورتفوی ها یا حساب های ذهنی در نظر می گیرند که هر حساب با یک هدف همراه و هر هدف دارای ضریب

شناخته شده ترین راه حل برای این بهینه سازی به روش تحلیلی و دقیق را هوانگ و لیتزنبرگ (۱۹۸۸) به شرح ذیل ارائه دادند. شرایط لازم را می توان، از طریق یافتن نقاط بحرانی تابع لاگرانژ به دست آورد. به علاوه ضرایب λ که به ضرایب لاگرانژ موسومند، محاسبه و سپس بردار اوزان دارایی ها بر حسب ضریب ریسک گزینی بدست می آید.

معادله ۴

$$\text{Min } L_{\omega, \lambda_1, \lambda_2} = \frac{1}{2} \omega \Sigma \omega + \lambda_1 (\mu_p - \omega \mu) + \lambda_2 (1 - \omega e)$$

از تابع نسبت به ضرایب $\omega, \lambda_1, \lambda_2$ مشتق گرفته و پس از حل معادلات، دو معادله با دو مجهول λ_1 و λ_2 خواهیم داشت. در صورتی که $\hat{e} \Sigma^{-1} \mu = A$ و $\hat{e} \Sigma^{-1} e = C$ و $\hat{\mu} \Sigma^{-1} \mu = B$ و $D = BC - A^2$ ضرایب لاگرانژ به شکل زیر محاسبه می شود:

معادله ۵

$$\lambda_1 = (C \mu_p - A) / D$$

معادله ۶

$$\lambda_2 = (B - A \mu_p) / D$$

بعد از پیدا کردن دو مجهول λ_1 و λ_2 ، بردار اوزان دارایی ها (ω) را بدست می آوریم:

معادله ۷

$$\omega = g + h \mu_p$$

معادله ۸

$$g = \frac{1}{D} [B(\Sigma^{-1} 1) - A(\Sigma^{-1} \mu)]$$

معادله ۹

$$h = \frac{1}{D} [C(\Sigma^{-1} \mu) - A(\Sigma^{-1} \mu)]$$

مرز کارای میانگین واریانس با حل مکرر مساله برای μ_p های متفاوت رسم می شود. اما مارکوویتز و همکاران (۲۰۱۰) با وارد کردن پارامتر ریسک گزینی ($\gamma > 0$)، در زمانی که نگرش ثابتی نسبت به ریسک وجود ندارد، مساله اصلی بهینه سازی میانگین



از آن جا که $\mu = \omega\mu$ و $\sigma = [\omega\Sigma\omega]^{1/2}$ رابطه زیر بدست می آید:

معادله ۱۸

$$H \leq \omega\mu + \Phi^{-1}(\alpha)[\omega\Sigma\omega]^{1/2}$$

در این جا Φ تابع توزیع نرمال استاندارد تجمعی می باشد. فرض نرمال بودن به این دلیل که یک روش عملی رایج برای سهولت کار می باشد، اعمال می شود. هدف سرمایه گذار، انتخاب پرتفوی بهینه است (در فضای میانگین- واریانس) که محدودیت های بیان شده را پوشش می دهد. زمانی که یک سرمایه گذار، اولویت های حسابداری ذهنی خویش را برای هر حساب ذهنی، به وسیله جفت پارامتر (H, α) مشخص می نماید، میزان ریسک گریزی (γ) وی نیز با توجه به مقادیر ورودی پرتفوی انتخابی (μ, Σ) به روشنی بیان می شود.

به این ترتیب، ریسک گریزی ضمنی سرمایه گذار برای هر حساب ذهنی به عنوان یک تابع نگاشت $\gamma(\mu, \Sigma, H, \alpha)$ می باشد که با داشتن جفت پارامتر (H, α) و مقادیر ورودی (μ, Σ) ، اوزان بهینه $w(\gamma)$ در چارچوب حسابداری ذهنی بدست خواهد آمد.

مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای در چارچوب حسابداری ذهنی

تئوری بازار سرمایه با بسط و تعمیم تئوری پرتفوی مدلی را برای قیمت گذاری دارایی های ریسکی استخراج می کند. خروجی نهایی این تئوری به نام مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای این امکان را فراهم می سازد تا نرخ بازده مورد انتظار دارایی ریسکی تعیین شود. عامل اصلی که منجر به توسعه تئوری بازار سرمایه می شود، مفهوم دارایی بدون ریسک است. چنین دارایی همبستگی صفر با سایر دارایی ها خواهد داشت. به عبارت دیگر می توان گفت که CAPM بر اساس تئوری های میانگین واریانس مارکویتز و بازار سرمایه شکل گرفت. در این تحقیق از مدل میانگین

ریسک گریزی γ خاص خودش است. در هر حساب ذهنی سرمایه گذاران به دنبال بازده پیش بینی شده و ریسک آن حساب هستند.

در حسابداری ذهنی بازده آستانه با H نشان داده شده و مساله متعارف عبارت است از بیشینه سازی بازده مورد انتظار $\omega\mu$ با توجه به محدودیت $\text{Prob}[R_p < H] < \alpha$ می باشد. در اینجا، R_p نشانگر بازده پرتفوی و α نشان دهنده حداکثر احتمال شکست در دستیابی به بازده آستانه است. به عنوان مثال، یک سرمایه گذار مشخص می نماید که بازده یک حساب ذهنی با احتمال بیشتر از α ، به زیر سطح H سقوط نمی کند. این مسئله معادل بهینه سازی پرتفوی ها با استفاده از معیار تلسر^{۱۸} (۱۹۵۶) می باشد. تلسر مدلی را ارائه کرد که در آن هم سطح معاش (s) و هم احتمال شکست در دستیابی به این سطح معاش (α) وجود داشت. در مدل تلسر، یک پرتفوی در صورتی ایمن بود که احتمال شکست در دستیابی به این سطح معاش بیشتر از α نشود. تلسر پیشنهاد می کند که سرمایه گذار پرتفویی را انتخاب کند که ثروت موردانتظار وی $E(w)$ با توجه به محدودیت $\text{Prob}\{w \leq s\} \leq \alpha$ حداکثر گردد. جفت پارامتر s و α برای هر پرتفوی در مدل تلسر مشابه H و α در حساب های ذهنی در پژوهش مارکویتز و همکاران می باشد. به عبارت دیگر:

معادله ۱۴

$$\text{Prob}[R_p \leq H] \leq \alpha$$

اگر فرض شود که بازده های پرتفوی، دارای توزیع نرمال هستند این عبارت بر نامساوی زیر دلالت دارد:

معادله ۱۵

$$\text{Prob}\left[\frac{R_p - \mu}{\sigma} \leq \frac{H - \mu}{\sigma}\right] \leq \alpha$$

معادله ۱۶

$$\text{Prob}[Z \leq z_0] \leq \alpha$$

معادله ۱۷

$$\Phi^{-1}(\alpha) \geq z_0$$

<p>معادله ۲۵</p> $\dot{\omega} \left(\frac{2\Sigma\omega}{\lambda} = (\mu - eR_f) \right)$	<p>واریانس مارکویتز و ورود دارایی بدون ریسک به محدودیت این مدل ، الگوی قیمت گذاری دارایی سرمایه ای را استخراج می کنیم و سپس به دنبال ایجاد یک هم ارزی ریاضی میان اجزای این الگو با محدودیت مساله حسابداری ذهنی می باشیم . مساله اصلی و متعارف این مدل حداقل سازی واریانس پرتفوی می باشد.</p>
<p>معادله ۲۶</p> $\frac{2\dot{\omega}\Sigma\omega}{\lambda} = (\dot{\omega}\mu - \dot{\omega}eR_f)$	<p>معادله ۱۹</p> <p>Min $\dot{\omega}\Sigma\omega$</p>
<p>معادله ۲۷</p> $\lambda = \frac{2\dot{\omega}\Sigma\omega}{(\dot{\omega}\mu - \dot{\omega}eR_f)}$	<p>معادله ۲۰</p> <p>s.t.</p> $\dot{\omega}\mu + (1 - \dot{\omega}e)R_f = \mu_p$
<p>این بار نسبت به لاندا مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم:</p>	<p>معادله ۲۸</p> $\frac{\delta L}{\delta \lambda} = \mu_p - \dot{\omega}\mu - (1 - \dot{\omega}e)R_f = 0$
<p>معادله ۲۹</p> $\mu_p - \dot{\omega}\mu - R_f + \dot{\omega}eR_f = 0$	<p>معادله ۲۱</p> $\text{Min } L_{\omega,\lambda} = \dot{\omega}\Sigma\omega + \lambda(\mu_p - \dot{\omega}\mu - (1 - \dot{\omega}e)R_f)$
<p>معادله ۳۰</p> $\mu_p - R_f = \dot{\omega}\mu - \dot{\omega}eR_f$	<p>معادله ۲۲</p> $\frac{\delta L}{\delta \omega} = 2\Sigma\omega + \lambda(-\mu + eR_f) = 0$
<p>معادله ۳۱</p> $\dot{\omega}(\mu - eR_f) = \mu_p - R_f$	<p>معادله ۲۳</p> $2\Sigma\omega = -\lambda(-\mu + eR_f)$
<p>با جایگذاری معادله ۳۱ در تساوی شماره ۲۷ ، معادله زیر بدست می آید.</p>	<p>معادله ۲۴</p> $\frac{2\Sigma\omega}{\lambda} = (\mu - eR_f)$
<p>معادله ۳۲</p> $\lambda = \frac{2\dot{\omega}\Sigma\omega}{\mu_p - R_f}$	<p>با حل معادلات بالا بعد از جایگذاری در معادلات شماره ۲۴ خواهیم داشت.</p>
<p>معادله ۳۳</p> $\frac{2\Sigma\omega}{\frac{2\dot{\omega}\Sigma\omega}{\mu_p - R_f}} = (\mu - eR_f)$	<p>دو طرف تساوی را در $\dot{\omega}$ ضرب می کنیم .</p>
<p>معادله ۳۴</p> <p>با حل معادلات بالا بعد از جایگذاری در معادلات خواهیم داشت:</p>	



معادله ۳۴

$$\mu - eR_f = \frac{\Sigma\omega}{\omega\Sigma\omega}(\mu_p - R_f)$$

همان طور که می دانیم $\omega\Sigma\omega$ برابر واریانس و $\Sigma\omega$ نیز یک بردار $N \times 1$ از حاصلضرب کوواریانس های بین بازده های مورد انتظار و وزن های بهینه N دارایی ریسکی در پرتفوی می باشد. با مشاهده رابطه بالا بتای پرتفوی بدست خواهد آمد:

معادله ۳۵

$$\beta_p = \frac{\Sigma\omega}{\omega\Sigma\omega}$$

اوزان مورد استفاده در محاسبه ی بتا در مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای از مدل میانگین واریانس مارکوویتز بدست می آید که در بخش قبل به روش هوانگ و لیتزنبرگ^{۱۹} (۱۹۸۸) اثبات شد. بنابراین β_p یک بردار $N \times 1$ از بتای دارایی ها می باشد. معادله مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای پس از جایگذاری β_p در معادله ۳۴ به شرح زیر است:

معادله ۳۶

$$\mu - eR_f = \beta_p(\mu_p - R_f)$$

مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای، الگویی برای تبیین ارتباط بین ریسک و بازده دارایی هاست. در حقیقت این مدل دارایی ها را با توجه به ریسک شان قیمت گذاری می کند. CAPM بر این فرض استوار است که سرمایه گذاران با علم به نظریه پرتفوی و کاهش ریسک غیرسیستماتیک از طریق تنوع بخشی، از آن در جهت ایجاد پرتفوی کارا بهره می جویند (شارپ^{۲۰}، ۱۹۶۴ و لیتنر^{۲۱}، ۱۹۶۵). بر خلاف مفروضات مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای، سرمایه گذاران مختلف ادراکات متفاوتی نسبت به نرخ های بازدهی، انحراف معیارها و کوواریانس ها دارند، یعنی افراد مشابه یکدیگر رفتار نکرده، از فهرست ورودی یکسان استفاده نمی کنند و به ترکیب یکسان

از سبد سرمایه گذاری ریسکی بهینه دست پیدا نمی کنند که منشاء این اختلاف ها در تجزیه و تحلیل اوراق بهادار می باشد. این موضوع مغایر با فرض بنیادین انتظارات همگن سرمایه گذاران در CAPM می باشد.

اما حسابداری ذهنی به فرایند ذهنی ارزشیابی مبادلات مالی اطلاق می شود و برخلاف تئوری های کلاسیک اقتصادی که معتقدند انسان ها ثروت خود را بصورت یک کل قابل تعویض می پندارند، تئوری های مالی رفتاری معتقدند انسان ها ثروت خود را به مجموعه ای از حساب های کوچک تر تقسیم و برای هر یک از فعالیت های اقتصادی از محل یکی از این حساب ها پرداخت می کنند (کانمن و تورسکی^{۱۹۷۹}). در واقع افراد در هر یک از حساب های ذهنی خود با توجه به هدف سرمایه گذاری، میزان ریسک گریزی خاص خود را دارد. در چارچوب حسابداری ذهنی دیدگاه متفاوتی نسبت به ریسک داریم به طوری که ریسک هر حساب ذهنی با مقدار احتمال شکست در رسیدن به بازده آستانه ای سنجیده می شود (مارکوویتز و همکاران^{۲۰۱۰}). از این رو در این پژوهش به دنبال تعیین بتای حساب های ذهنی با استفاده از ضریب ریسک گریزی و ورودی های H و α آن حساب می باشیم. در صورت داشتن ضریب ریسک گریزی هر حساب ذهنی، اوزان بهینه مستقیماً از طریق معادله اوزان بهینه (معادله شماره ۱۳) به دست آمده و به دنبال آن بتای هر حساب ذهنی طبق معادله زیر تعیین می گردد:

معادله ۳۷

$$\beta_{MA} = \frac{\Sigma\omega_\gamma}{\omega_\gamma\Sigma\omega_\gamma}$$

اما از آنجا که سرمایه گذار در بیان بازده آستانه ای خود برای هر هدف و احتمال شکست در دستیابی به این بازده آستانه ای توانایی بیشتری نسبت به سئوالات متعدد پرسشنامه های تحمل ریسک دارد



با جایگذاری رابطه ی بالا در مدل قیمت گذاری دارایی ها، می توان مدل پیشنهادی زیر که ترکیبی از بتای حساب های ذهنی، دارایی بدون ریسک و بازده هر حساب ذهنی است را برای بازده مورد انتظار هر حساب ذهنی در نظر گرفت:

معادله ۴۳

$$\mu - eR_f = \frac{(\Phi^{-1}(\alpha))^2 \Sigma \omega_{H,\alpha}}{(H - \omega'_{H,\alpha} \mu)^2} (\omega'_{H,\alpha} \mu - R_f)$$

معادله ۴۴

$$\mu = eR_f + \beta_{MA} (\omega'_{H,\alpha} \mu - R_f)$$

در مدل CAPM فرض می شود که همه سرمایه گذاران سبد سرمایه گذاری ریسکی بهینه یکسانی را نگهداری می کنند که این پرتفوی، پرتفوی سرمایه گذاری بازار در نظر گرفته شده و مستقل از ترجیحات ریسک و بازده سرمایه گذاران می باشد. با توجه به اینکه تعداد اندکی از سرمایه گذاران، پرتفوی سرمایه گذاری بازار را نگهداری می کنند، نمی توان گفت که مدل CAPM کاربردی نخواهد بود، زیرا پرتفوی سرمایه گذاری به خوبی متنوع شده ریسک غیر سیستماتیک ندارد و فقط شامل ریسک سیستماتیک یا بازار می باشد. بنابراین اگر سرمایه گذاران دقیقاً پرتفوی سرمایه گذاری بازار را نگهداری نکنند، پرتفوی سرمایه گذاری متنوع شده آنها همبستگی بسیار بالایی با پرتفوی سرمایه گذاری بازار خواهد داشت (بادی، ۱۹۹۹). در حقیقت نگهداری سبدهای سرمایه گذاری متفاوت منجر به ارائه مدل های تعدیل یافته CAPM خواهد گردید که مدل CAPM در چارچوب حسابداری ذهنی نوعی از این مدل های تعدیل یافته می باشد. سرمایه گذاران با توجه به نوع هدف خود از سرمایه گذاری با عدم قطعیت یا میزان ریسک متفاوتی روبرو می شوند. در واقع می توان گفت سرمایه گذاران به منظور پوشش ریسک حساب ذهنی خود (مرتبط با هدف سرمایه گذاری شان)، وزن های متفاوتی را به دارایی های خود تخصیص می دهند. از این رو مدل

(مفروضات حسابداری ذهنی مدل مارکوویتز و همکاران ۲۰۱۰)، بهتر است که بتای هر حساب ذهنی با استفاده از ورودی های H و α حسابداری ذهنی محاسبه گردد. اما این بار می توان اوزان بهینه هر حساب ذهنی را مستقیماً بدون محاسبه ریسک گریزی هر حساب ذهنی و تنها از معادله محدودیت حسابداری ذهنی بدست آورد. بدین منظور برای یک بازده آستانه ای ثابت با تغییر احتمال شکست در رسیدن به این بازده آستانه ای، اوزان بهینه را بدست می آوریم و به دنبال آن بتای هر حساب ذهنی طبق معادله زیر تعیین می گردد:

معادله ۳۸

$$\beta_{MA} = \frac{\Sigma \omega_{H,\alpha}}{\omega'_{H,\alpha} \Sigma \omega_{H,\alpha}}$$

به منظور نمایش بهتر رابطه ی میان بتای هر حساب ذهنی با بازده آستانه ای و احتمال شکست در رسیدن به این بازده، رابطه $\omega'_{H,\alpha} \Sigma \omega_{H,\alpha}$ را از معادله محدودیت حسابداری ذهنی (معادله ۳۹)، استخراج کرده و با جایگذاری در β_{MA} ، بتای هر حساب ذهنی با استفاده از ورودی های H و α نمایش داده می شود.

معادله ۳۹

$$H = \omega'_{H,\alpha} \mu + \Phi^{-1}(\alpha) [\omega'_{H,\alpha} \Sigma \omega_{H,\alpha}]^{1/2}$$

معادله ۴۰

$$\omega'_{H,\alpha} \Sigma \omega_{H,\alpha} = \left(\frac{H - \omega'_{H,\alpha} \mu}{\Phi^{-1}(\alpha)} \right)^2$$

معادله ۴۱

$$\beta_{MA} = \frac{\Sigma \omega_{H,\alpha}}{\left(\frac{H - \omega'_{H,\alpha} \mu}{\Phi^{-1}(\alpha)} \right)^2}$$

معادله ۴۲

$$\beta_{MA} = \frac{(\Phi^{-1}(\alpha))^2 \Sigma \omega_{H,\alpha}}{(H - \omega'_{H,\alpha} \mu)^2}$$



رسیدن به بازده آستانه ای هر حساب ذهنی و میزان ریسکی که با توجه به هدف هر حساب تغییر می کند، ارائه می شود. در این پژوهش از مدل میانگین واریانس مارکویتز و ورود دارایی بدون ریسک به محدودیت این مدل، مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه ای را ارائه داده و سپس با ایجاد یک هم ارزی ریاضی میان اجزای این الگو با محدودیت مساله حسابداری ذهنی، مدل MA-CAPM را استخراج نمودیم. سرمایه گذاران با توجه به نوع هدف خود از سرمایه گذاری با عدم قطعیت یا میزان ریسک متفاوتی روبرو می شوند. در واقع می توان گفت سرمایه گذاران به منظور پوشش ریسک حساب ذهنی خود (مرتبط با هدف سرمایه گذاری)، وزن های متفاوتی را به دارایی های خود تخصیص می دهند. از این رو مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای در چارچوب حسابداری ذهنی شرح می دهد که سرمایه گذار در شرایط متفاوت بسته به نوع هدف خود از سرمایه گذاری دارای میزان تحمل ریسک متفاوت خواهد بود و سبد سرمایه گذاری ریسکی بهینه برای هر حساب ذهنی با توجه به میزان تحمل ریسک وی که ناشی از H و α هر حساب می باشد نگهداری می شود و بازده مورد انتظار سرمایه گذار با استفاده از این مدل پس از تعیین H و α ، محاسبه بتا و صرف ریسک حساب ذهنی به دست می آید.

فهرست منابع

- * بادی، زوی، الکس کین، و آلان جی مارکوس. مدیریت سرمایه گذاری (جلد اول). با ترجمه مجید شریعت پناهی، روح اله فرهادی و محمد ایمنی فر. تهران: انتشارات بورس، ۱۳۹۱.
- * رهنمای رودپشتی فریدون، هیبیتی فرشاد، موسوی سیدرضا (۱۳۹۱). بررسی الگوی ریاضی انتخاب پرتفوی سرمایه گذاری مبتنی بر مالی رفتاری، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار. دوره ۳ شماره ۱۲؛ از صفحه ۱۷ تا صفحه ۳۷

قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای در چارچوب حسابداری ذهنی شرح می دهد که سرمایه گذار در شرایط متفاوت بسته به نوع هدف خود از سرمایه گذاری دارای میزان تحمل ریسک متفاوت خواهد بود و سبد سرمایه گذاری ریسکی بهینه برای هر حساب ذهنی با توجه به میزان تحمل ریسک وی که ناشی از H و α هر حساب می باشد نگهداری می شود.

در مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای در چارچوب حسابداری ذهنی، بازده مورد انتظار سرمایه گذار برای هر هدف که در قالب حساب های ذهنی ارائه می شود، تابعی از بازده دارایی بدون ریسک، بتا و صرف ریسک حساب ذهنی می باشد. در واقع نقطه شروع این مدل نیز بازده دارایی بدون ریسک است که به آن نرخ پاداشی اضافه می شود که سرمایه گذاران بابت پذیرش ریسک مرتبط با هر هدف که همان احتمال شکست در رسیدن به بازده آستانه ای می باشد، مطالبه می کنند. این صرف ریسک حساب ذهنی معادل اختلاف بازده هر حساب با بازده دارایی بدون ریسک ($\mu_{MA} - R_f$) می باشد. نرخ بازده مورد انتظار دارایی ها در مدل MA-CAPM بر خلاف مدل CAPM که تنها متمرکز بر ریسک سیستماتیک می باشد، متأثر از بازده آستانه ای و احتمال شکست در رسیدن به این سطح آستانه یا به عبارتی بتای حساب ذهنی خواهد بود. بازده مورد انتظار سرمایه گذار با استفاده از مدل MA-CAPM پس از مشخص نمودن H و α ، محاسبه بتا و صرف ریسک حساب ذهنی به دست می آید.

۴- نتیجه گیری و بحث

این پژوهش به دنبال ارائه مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای در چارچوب حسابداری ذهنی در راستای تئوری پرتفوی رفتاری شفرین و استتمن می باشد. خصوصیات حسابداری ذهنی در این تحقیق، مشابه پژوهش مارکویتز و استتمن (۲۰۱۰)، حساب های ذهنی را به عنوان لایه هایی از پرتفوی های هرمی، تعریفی از ریسک به عنوان احتمال شکست در

- decision to start a venture." Decision 41(1): 87-98.
- * Lakonishok, Josef, Andrei Shleifer, and Robert W. Vishny(1992), The structure and performance of the money management industry, Brookings Papers on Economic Activity, Microeconomics, 339-391..
 - * Lintner, J. (1965a). Security Prices and Maximal Gains from Diversification. Journal of Finance, 20: 587-615.
 - * Markowitz H., (1952), The Utility Of Wealth, Journal of Political Economy, 60, 151-158
 - * Rockenbach B(2004), The behavioral relevance of mental accounting for the pricing of financial options, Volume 53, Issue 4, Pages 513-52
 - * Sharpe, William F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, Journal of Finance, 19 (3), 425-442
 - * Shefrin, H. and M. Statman. (2000), Behavioral Portfolio Theory. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 35, 127-151.
 - * Statman, M., Fisher, K., Angier, D., (2008). "Affect in a behavioral asset pricing model". Electronic copy available at: <http://SSRN.Com/abstract=1.94040>.
 - * Statman M,(2014). Behavioral finance: Finance with normal people , Borsa Istanbul Review Volume 14, Issue 2, June 2014, Pages 65-73
 - * Thaler, R. H. `Toward a positive theory of consumer choice', Journal of Economic Behavior and Organization, 1 (1980), 39±60
 - * Telser, L(1956), Safety First and Hedging. Review of Economic Studies, 23 1-16

یادداشت‌ها

1. Fungibility of Money
2. Brabazon
3. Shefrin, H. and M. Statman
4. Lakonishok, Josef, Andrei Shleifer, and Robert W. Vishny
5. Growth Stocks
6. Value Stocks
7. Overreaction and Underreaction
8. Momentum Strategy
9. Jegadeesh and Titman
10. Beta Herding
11. Kahneman & Tversky
12. Rockenbach
13. Choi

- * زنجیردار مجید، موسوی رضا، صابری مریم (۱۳۹۳). تبیین عوامل رفتاری انسان در انتخاب پرتفوی بهینه در مقایسه با مالی استاندارد، دانش سرمایه گذاری، دوره: ۳ - شماره: ۹ - صفحه: ۲۰۷-۲۲۲
- * سعیدی، علی؛ فرهانیان، سید محمد جواد (۱۳۹۰). مبانی اقتصادی و مالی رفتاری، تهران: سازمان بورس اوراق بهادار شرکت اطلاع رسانی و خدمات بورس تهران
- * Brabazon, T(2000) Behavioural Finance: A new sunrise or a false dawn?, University of Limerick
- * Barberis, Nicholas, and Ming Huang (2001). Mental accounting, loss aversion and individual stock returns. Journal of Finance, 56:1247-92.
- * Bodie, Z., Kane, A., and Marcus, A. (1999) Investments, 10th Ed., Irwin/ McGraw-Hill, Boston.
- * Choi J & David Laibson & Brigitte C. Madrian (2009). Mental Accounting in Portfolio Choice: Evidence from a Flypaper, American Economic Review. 99(5), 2085-95
- * Das, S. Markowitz, H. Scheid, J. and Statman, M. (2010). Portfolio Optimization with Mental Accounts. Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol. 45, No. 2, Apr., pp. 311-334.
- * De Bondt, W.F.M. and R. Thaler, (1987), Further Evidence on Investor Overreaction and Stock Market Seasonality, Journal of Finance 42 (No. 3), 557-581.
- * Hwang, S. & Salmon, M. (2001). A New Measure of Herding and Empirical Evidence, University of London Business School, Working Paper
- * Huang, C.-F., and R. Litzenger (1988) . Foundations for Financial Economics. New York, NY: North-Holland.
- * JEGADEESH, N. and TITMAN, S. (1993), Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency. The Journal of Finance, 48: 65-91.
- * Kahnman D. & Tversky A, (1979), Prospect Theory: An Analysis Of Decision Under Risk, Econometrica Vol.47 Number 2
- * Kannadhasan, M., S. Aramvalathan, et al. (2014). "Relationship among cognitive biases, risk perceptions and individual's



- ¹⁴. Kanad hasan & Aramvalarthan
- ¹⁵. Downside Protection
- ¹⁶. Prospect Theory
- ¹⁷. Das, Markowitz, Scheid, and Statman
- ¹⁸. Telser
- ¹⁹. Huang and R. Litzberger
- ²⁰. Sharpe
- ²¹. Lintner