

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM  
2020

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# نتایج دربارهی چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف‌ها

مهديه آذری\*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد کازرون، دانشگاه آزاد اسلامی، کازرون، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۵/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۱۰

## چکیده

چندجمله‌ای‌های وینر رأسی-یالی یک گراف همبند ساده بر اساس فواصل بین رئوس و یال‌های آن گراف تعریف می‌شوند. مشتق اول این چندجمله‌ای‌ها در یک، شاخص‌های وینر رأسی-یالی نامیده می‌شوند. در این مقاله برخی خواص اساسی چندجمله‌ای‌های وینر رأسی-یالی اول و دوم گراف‌های همبند ساده را بیان کرده و شاخص‌های وینر رأسی-یالی اول و دوم آن‌ها را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. همچنین، این چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌ها را برای برخی از گراف‌های معروف محاسبه می‌کنیم. سپس ارتباط بین چندجمله‌ای‌های وینر رأسی-یالی حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها را با چندجمله‌ای وینر و چندجمله‌ای‌های وینر رأسی-یالی گراف‌های اولیه بررسی کرده و نتایج را در محاسبه‌ی شاخص‌های وینر رأسی-یالی حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها به کار می‌گیریم. به‌عنوان کاربردهایی از این نتایج، فرمول‌های دقیقی برای محاسبه‌ی شاخص‌های وینر رأسی-یالی اول و دوم شبکه‌های مستطیلی،  $C_4$ -نانولوله‌ها،  $C_4$ -نانوچنبره‌ها، گراف همینگ و ابرمکعب‌ها ارائه می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** شاخص توپولوژیک، حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها، نانولوله، نانوچنبره.

## ۱- مقدمه

توپولوژیک اغلب بر اساس فاصله‌ی بین رئوس یا درجه‌ی رئوس در گراف تعریف می‌شوند. شاخص‌های توپولوژیک فراوانی تاکنون معرفی شده‌اند و بسیاری از آن‌ها کاربردهای فراوانی در ریاضیات و سایر علوم به خصوص شیمی، فیزیک، زیست‌شناسی و داروسازی پیدا کرده‌اند. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی شاخص‌های توپولوژیک مراجع [۱، ۲] را ببینید.

نسخه‌ی رأسی شاخص وینر<sup>۵</sup> اولین و مهم‌ترین شاخص توپولوژیک یک گراف است. این شاخص در سال ۱۹۴۷ توسط یک شیمی‌دان آمریکایی به نام هارولد وینر معرفی شد. [۳] او توانست رابطه‌ی بین این شاخص و نقطه‌ی جوش بعضی از آلکان‌ها را پیدا کند. شاخص وینر گراف  $G$  با نماد  $W(G)$  نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} d(u,v).$$

در واقع شاخص وینر گراف  $G$  برابر نصف مجموع فاصله‌های بین همه‌ی جفت رئوس گراف  $G$  می‌باشد. برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی شاخص وینر، مراجع [۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰] را ببینید.

چندجمله‌ای هوسویای<sup>۶</sup> یک گراف در سال ۱۹۸۸ توسط هارو هوسویا معرفی شد. [۱۱] هوسویا این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای وینر نام نهاد. چندجمله‌ای وینر گراف  $G$  بر حسب متغیر  $q$  با نماد  $W(G;q)$  نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(G;q) = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} q^{d(u,v)}.$$

مشتق اول چندجمله‌ای وینر گراف  $G$  در  $q=1$  برابر با شاخص وینر این گراف می‌باشد. به عبارت دیگر  $W'(G;1) = W(G)$ . اطلاعات بیشتر درباره‌ی چندجمله‌ای وینر در مراجع [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶] آمده است.

پس از شاخص وینر، شاخص‌های دیگری با کاربردهای مختلف معرفی شدند. از جمله می‌توان به شاخص‌های

در این مقاله گراف‌ها را همبند، ساده و متناهی در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $G$  گرافی با مجموعه رئوس  $V(G)$  و مجموعه یال‌های  $E(G)$  باشد. فاصله‌ی دو رأس، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو رأس می‌باشد. فاصله‌ی بین دو رأس  $u$  و  $v$  در گراف  $G$  را با نماد  $d(u,v)$  نشان می‌دهیم. قطر یک گراف بیشترین فاصله‌ی بین تمام رأس‌های آن گراف است. قطر گراف  $G$  را با  $d(G)$  نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی همه‌ی رئوس از گراف  $G$  که با رأس  $u$  از این گراف مجاور باشند، همسایگی باز رأس  $u$  در گراف  $G$  نامیده می‌شود و تعداد رئوس مجاور با رأس  $u$ ، درجه‌ی رأس  $u$  در گراف  $G$  نامیده می‌شود. همسایگی باز و درجه‌ی رأس  $u$  در گراف  $G$  را به ترتیب با نمادهای  $N(u)$  و  $\deg(u)$  نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی دو نقطه‌ی پایانی یال  $e \in E(G)$  را با نماد  $V(e)$  نشان می‌دهیم. منظور از  $\nabla(G)$  تعداد مثلث‌ها (دوره‌های به طول ۳) در گراف  $G$  می‌باشد. درجه‌ی چندجمله‌ای  $f(q)$  را با  $\deg f(q)$  نشان می‌دهیم.

یکی از مهم‌ترین مسائل مطرح در شیمی، مطالعه‌ی ارتباط کمی بین ساختار یک مولکول و خواص فیزیکی، شیمیایی و بیولوژیکی آن مولکول ( $^1QSPR$ ) و ارتباط کمی بین ساختار یک مولکول و فعالیت‌های آن مولکول ( $^2QSAR$ ) می‌باشد. برای این منظور گرافی به مولکول مورد نظر نسبت داده می‌شود که رئوس آن اتم‌های آن مولکول و یال‌های آن پیوندهای شیمیایی بین اتم‌ها است. این گراف، گراف مولکولی<sup>۳</sup> نام دارد. در بین این گراف‌ها، گراف‌های منتسب به ساختارهای نانو از اهمیت بسیاری برخوردار می‌باشند. شاخص توپولوژیک<sup>۴</sup> یک گراف عددی حقیقی است که به آن گراف نسبت داده می‌شود و تحت یکرختی گراف‌ها پایا است. مقدار شاخص توپولوژیک یک گراف مولکولی مطرح در علوم مختلف مانند فیزیک و شیمی می‌تواند مبین خاصیتی فیزیکی یا شیمیایی از آن مولکول باشد. شاخص‌های

1. Quantitative Structure-Property Relationship
2. Quantitative Structure-Activity Relationship
3. Molecular graph
4. Topological index

5. Wiener index  
6. Hosoya polynomial

گوتمان و تریناجستیک معرفی شدند. [۲۶] شاخص زاگرب اول گراف  $G$  که با نماد  $M_1(G)$  نشان داده شده، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u)^2 \\ = \sum_{uv \in E(G)} [\deg(u) + \deg(v)].$$

## ۲- خواص اساسی چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌های وینر رأسی-یالی

در این بخش برخی خواص اساسی چندجمله‌ای‌های وینر رأسی-یالی را بیان کرده و چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف‌های معروف را محاسبه می‌کنیم. همچنین شاخص‌های وینر رأسی-یالی اول و دوم گراف‌ها را با یکدیگر مقایسه کرده و ارتباط آن‌ها را بیان می‌کنیم.

**قضیه ۲-۱:** فرض کنید  $G$  یک گراف همبند ساده از مرتبه‌ی  $n$  و اندازه‌ی  $m$  باشد. چندجمله‌ای وینر رأسی-یالی اول گراف  $G$  در روابط زیر صدق می‌کند:

(الف) اگر حداقل یک رأس  $u \in V(G)$  و یک یال  $ab \in E(G)$  موجود باشند به طوری که  $d(u, a) = d(u, b) = d(G)$  آن‌گاه درجه‌ی چندجمله‌ای  $W_{ve_1}(G; q)$  برابر با قطر گراف  $G$  می‌باشد. در غیر این صورت، درجه‌ی این چندجمله‌ای برابر با  $d(G) - 1$  می‌باشد.

(ب) جمله‌ی ثابت این چندجمله‌ای برابر با  $2m$  است.

(ج) ضریب  $q$  در این چندجمله‌ای برابر با  $M_1(G) - 3\mathcal{V}(G) - 2m$  می‌باشد.

(د) مقدار این چندجمله‌ای در  $q = 1$  برابر با  $nm$  می‌باشد.

**اثبات:** (الف) بدیهی است که

$$\deg W_{ve_1}(G; q) = \max \{D_1(u, e) : u \in V(G), e \in E(G)\}.$$

وینر رأسی-یالی<sup>۷</sup> اشاره کرد. [۱۷، ۱۸، ۱۹] مشابه با تعریف فاصله‌ی بین دو رأس در یک گراف، می‌توان فاصله‌ی بین یک رأس و یک یال در گراف را تعریف کرد که به دو صورت امکان‌پذیر است. فاصله‌ی اول و فاصله‌ی دوم بین رأس  $u$  و یال  $e = ab$  در گراف  $G$  به ترتیب با نمادهای  $D_1(u, e)$  و  $D_2(u, e)$  نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_1(u, e) = \min \{d(u, a), d(u, b)\},$$

$$D_2(u, e) = \max \{d(u, a), d(u, b)\}.$$

شاخص‌های وینر رأسی-یالی اول و دوم گراف  $G$  به ترتیب با نمادهای  $W_{ve_1}(G)$  و  $W_{ve_2}(G)$  نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$W_{ve_i}(G) = \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G)} D_i(u, e), \quad i \in \{1, 2\}.$$

چندجمله‌ای‌های وینر رأسی-یالی<sup>۸</sup> اول و دوم گراف  $G$  برحسب متغیر  $q$  به ترتیب با نمادهای  $W_{ve_1}(G; q)$  و  $W_{ve_2}(G; q)$  نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند: [۲۰]

$$W_{ve_i}(G; q) = \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G)} q^{D_i(u, e)}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

مشتمل اول هر یک از چندجمله‌ای‌های وینر رأسی-یالی گراف  $G$  در  $q = 1$  برابر با شاخص وینر رأسی-یالی متناظر با آن می‌باشد. به عبارت دیگر به ازای  $i \in \{1, 2\}$ ،  $W_{ve_i}'(G; 1) = W_{ve_i}(G)$  برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌های وینر رأسی-یالی، مراجع [۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵] را ببینید.

برخی از شاخص‌های توپولوژیک بر اساس درجه‌ی رئوس در گراف تعریف می‌شوند. در بین این شاخص‌ها، شاخص‌های زاگرب<sup>۹</sup> به دلیل کاربردهای فراوانی که در مطالعات QSAR و QSPR دارند، از اهمیت بیشتری برخوردارند. شاخص‌های زاگرب در سال ۱۹۷۲ توسط

7. Vertex-edge Wiener indices

8. Vertex-edge Wiener polynomials

9. Zagreb indices

$$- \sum_{ab \in E(G)} |N(a) \cap N(b)| - 2m \\ = M_1(G) - 3\nabla(G) - 2m.$$

(د) اثبات این قسمت بدیهی است. ■

**قضیه ۲-۲:** فرض کنید  $G$  یک گراف همبند ساده از مرتبه‌ی  $n$  و اندازه‌ی  $m$  باشد. چندجمله‌ای وینر رأسی-یالی دوم گراف  $G$  در روابط زیر صدق می‌کند:  
(الف) درجه‌ی چندجمله‌ای  $W_{ve_2}(G; q)$  برابر با قطر گراف  $G$  می‌باشد.

(ب) جمله‌ی ثابت این چندجمله‌ای برابر با صفر است.

(ج) ضریب  $q$  در این چندجمله‌ای برابر با  $3\nabla(G) + 2m$  می‌باشد.

(د) مقدار این چندجمله‌ای در  $q = 1$  برابر با  $nm$  می‌باشد.

**اثبات:** (الف) فرض کنید  $u$  و  $a$  دو رأس از گراف  $G$  باشند به طوری که  $d(u, a) = d(G)$ . آن‌گاه برای هر رأس  $b \in N(a)$  داریم:

$$\deg W_{ve_2}(G; q) = D_2(u, ab) \\ = \max\{d(G), d(u, b)\} = d(G).$$

(ب) جمله‌ی ثابت چندجمله‌ای  $W_{ve_2}(G; q)$  برابر با تعداد همه‌ی زوج‌های  $(u, e) \in V(G) \times E(G)$  می‌باشد که  $D_2(u, e) = 0$ . واضح است که برای هر  $u \in V(G)$  و  $e \in E(G)$ ،  $D_2(u, e) \geq 1$ . در نتیجه جمله‌ی ثابت چندجمله‌ای  $W_{ve_2}(G; q)$  برابر با صفر است.

(ج) ضریب  $q$  در چندجمله‌ای  $W_{ve_2}(G; q)$  برابر با تعداد همه‌ی زوج‌های  $(u, e) \in V(G) \times E(G)$  می‌باشد که  $D_2(u, e) = 1$ . واضح است که برای هر  $u \in V(G)$  و  $e = ab \in E(G)$ ،  $D_2(u, e) = 1$ .

اگر و فقط اگر  $u$  یکی از نقاط پایانی یال  $e$  بوده یا  $u$  و دو نقطه‌ی پایانی یال  $e$ ، سه رأس یک مثلث (دور به طول ۳) در گراف  $G$  باشند. به عبارت دیگر،

اگر حداقل یک رأس  $u \in V(G)$  و یک یال  $ab \in E(G)$  موجود باشند به طوری که  $d(u, a) = d(u, b) = d(G)$ ، آن‌گاه:

$$\deg W_{ve_1}(G; q) = D_1(u, ab) = \min\{d(u, a), d(u, b)\} = \min\{d(G), d(G)\} = d(G).$$

در غیر این صورت، فرض کنید  $u$  و  $a$  دو رأس از گراف  $G$  باشند به طوری که  $d(u, a) = d(G)$ . آن‌گاه برای هر رأس  $b \in N(a)$ ،  $d(u, b) = d(G) - 1$ . در نتیجه داریم:

$$\deg W_{ve_1}(G; q) = D_1(u, ab) \\ = \min\{d(G), d(G) - 1\} = d(G) - 1.$$

(ب) جمله‌ی ثابت چندجمله‌ای  $W_{ve_1}(G; q)$  برابر با تعداد همه‌ی زوج‌های  $(u, e) \in V(G) \times E(G)$  می‌باشد که  $D_1(u, e) = 0$ . واضح است که برای هر  $u \in V(G)$  و  $e \in E(G)$ ،  $D_1(u, e) = 0$  اگر و فقط اگر  $u$  یکی از نقاط پایانی یال  $e$  باشد. در نتیجه جمله‌ی ثابت چندجمله‌ای  $W_{ve_1}(G; q)$  برابر با  $2m$  است.

(ج) ضریب  $q$  در چندجمله‌ای  $W_{ve_1}(G; q)$  برابر با تعداد همه‌ی زوج‌های  $(u, e) \in V(G) \times E(G)$  می‌باشد که  $D_1(u, e) = 1$ . واضح است که برای هر  $u \in V(G)$  و  $e = ab \in E(G)$ ،  $D_1(u, e) = 1$ .

اگر و فقط اگر رأس  $u$  با هر دو رأس  $a$  و  $b$  مجاور باشد. به عبارت دیگر،

$$u \in (N(a) \cup N(b)) - \{a, b\}.$$

در نتیجه ضریب  $q$  در چندجمله‌ای  $W_{ve_1}(G; q)$  برابر است با:

$$\sum_{ab \in E(G)} |(N(a) \cup N(b)) - \{a, b\}| \\ = \sum_{ab \in E(G)} [|N(a)| + |N(b)| - |N(a) \cap N(b)| - 2] \\ = \sum_{ab \in E(G)} [\deg(a) + \deg(b) - 2]$$

$$=W_{ve_1}(G) + nm.$$

طبق قضیه ۲-۳، گراف  $G$  دوبخشی است اگر و فقط اگر  $W_{ve_2}(G; q) = qW_{ve_1}(G; q)$  با مشتق‌گیری از این رابطه داریم:

$$W'_{ve_2}(G; q) = W_{ve_1}(G; q) + qW'_{ve_1}(G; q).$$

سیس با جایگذاری  $q = 1$  و استفاده از قسمت (د) قضیه ۱-۲ داریم:

$$W_{ve_2}(G) = W_{ve_1}(G) + nm.$$

بنابراین در نامساوی فوق تساوی برقرار است اگر و فقط اگر گراف  $G$  دوبخشی باشد. ■

**نتیجه ۲-۵:** اگر  $T$  درختی با  $n$  رأس باشد، آن‌گاه

$$W_{ve_2}(T) = W_{ve_1}(T) + n(n-1).$$

**اثبات:** هر درخت  $n$  رأسی یک گراف دوبخشی با  $n-1$  یال می‌باشد. حال از قضیه ۲-۴ نتیجه موردنظر حاصل می‌شود. ■

**قضیه ۲-۶:** برای هر گراف همبند ساده  $G$  از اندازه‌ی  $m$ ،  $W_{ve_2}(G) \geq W_{ve_1}(G) + 2m$ ، تساوی برقرار است اگر و فقط اگر  $G$  گراف کامل باشد.

**اثبات:** طبق تعریف شاخص وینر رأسی-یالی دوم داریم:

$$\begin{aligned} W_{ve_2}(G) &= \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G)} D_2(u, e) \\ &= \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G); u \notin V(e)} 1 \\ &\quad + \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G); u \in V(e)} D_2(u, e) \\ &\geq \sum_{u \in V(G)} \deg(u) + \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G); u \notin V(e)} D_1(u, e) \\ &= 2m + W_{ve_1}(G). \end{aligned}$$

در نامساوی فوق تساوی برقرار است اگر و فقط اگر برای

$u \in (N(a) \cap N(b)) \cup \{a, b\}$  در نتیجه ضریب

$q$  در چندجمله‌ای  $W_{ve_2}(G; q)$  برابر است با:

$$\begin{aligned} &\sum_{ab \in E(G)} |(N(a) \cap N(b)) \cup \{a, b\}| \\ &= \sum_{ab \in E(G)} [|N(a) \cap N(b)| + 2] \\ &= 3\nabla(G) + 2m. \end{aligned}$$

(د) اثبات این قسمت بدیهی است. ■

**قضیه ۲-۳:** گراف  $G$  دوبخشی است اگر و فقط اگر

$$W_{ve_2}(G; q) = qW_{ve_1}(G; q)$$

**اثبات:** گراف  $G$  دوبخشی است اگر و فقط اگر  $G$

شامل دوری به طول فرد نباشد. پس برای هر

$u \in V(G)$  و  $e = ab \in E(G)$ ،

$$d(u, a) \neq d(u, b).$$

در نتیجه  $D_2(u, e) = D_1(u, e) + 1$ . بنابراین گراف  $G$

دوبخشی است اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned} W_{ve_2}(G; q) &= \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G)} q^{D_2(u, e)} \\ &= \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G)} q^{D_1(u, e) + 1} \\ &= qW_{ve_1}(G; q). \end{aligned}$$

این اثبات را کامل می‌کند. ■

**قضیه ۲-۴:** برای هر گراف همبند ساده  $G$  از مرتبه‌ی

$n$  و اندازه‌ی  $m$ ،  $W_{ve_2}(G) \leq W_{ve_1}(G) + nm$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر گراف  $G$  دوبخشی باشد.

**اثبات:** واضح است که برای هر  $u \in V(G)$  و

$e \in E(G)$ ،  $D_2(u, e) \leq D_1(u, e) + 1$ . در نتیجه:

$$\begin{aligned} W_{ve_2}(G) &= \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G)} D_2(u, e) \\ &\leq \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G)} (D_1(u, e) + 1) \end{aligned}$$

$$= 2[(n-1)q^0 + (n-2)q^1 + \dots + q^{n-2}]$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)q^k.$$

(ب) با توجه به تقارن گراف  $C_n$  داریم:

$$W_{ve_1}(C_n; q) = \sum_{u \in V(C_n)} \sum_{e \in E(C_n)} q^{D_1(u,e)}$$

$$= \begin{cases} 2n(q^0 + q^1 + \dots + q^{\frac{n-1}{2}}) & 2 \mid n \\ n[2(q^0 + q^1 + \dots + q^{\frac{n-1}{2}-1}) + q^{\frac{n-1}{2}}] & 2 \nmid n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2n \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} q^k & 2 \mid n \\ 2n \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} q^k + nq^{\frac{n-1}{2}} & 2 \nmid n. \end{cases}$$

(ج) با توجه به تقارن گراف  $S_n$  داریم:

$$W_{ve_1}(S_n; q) = \sum_{u \in V(S_n)} \sum_{e \in E(S_n)} q^{D_1(u,e)}$$

$$= (n-1)[q^0 + (n-2)q^1] + (n-1)q^0$$

$$= (n-1)[2 + (n-2)q].$$

(د) با توجه به تقارن گراف  $W_n$  داریم:

$$W_{ve_1}(W_n; q) = \sum_{u \in V(W_n)} \sum_{e \in E(W_n)} q^{D_1(u,e)}$$

$$= (n-1)q^0 + (n-1)q^1 + (n-1)[q^0 + (n-2)q^1$$

$$+ 2q^0 + 2q^1 + (n-5)q^2]$$

$$= (n-1)[4 + (n+1)q + (n-5)q^2].$$

(ه) با توجه به تقارن گراف  $K_n$  داریم:

$$W_{ve_1}(K_n; q) = \sum_{u \in V(K_n)} \sum_{e \in E(K_n)} q^{D_1(u,e)}$$

$$= n[(n-1)q^0 + \binom{n}{2} - (n-1)q^1]$$

$$= n[(n-1) + \binom{n-1}{2}]q = 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3}q.$$

هر  $u \in V(G)$  و  $e \in E(G)$  که  $u \notin V(e)$  داشته باشیم  $D_2(u,e) = D_1(u,e)$  و این برقرار است اگر و فقط اگر گراف  $G$  کامل باشد. ■

فرض کنید  $P_n, C_n, S_n, W_n$  و  $K_n$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی گراف‌های مسیر، دور، ستاره، چرخ و کامل  $n$  رأسی بوده و  $K_{a,b}$  نشان‌دهنده‌ی گراف کامل دوبخشی با  $a+b$  رأس باشد. در قضیه‌های بعد، چندجمله‌ای‌های وینر رأسی-یالی این گراف‌ها را محاسبه می‌کنیم.

**قضیه ۲-۷:** چندجمله‌ای وینر رأسی-یالی اول گراف‌های معروف عبارتند از:

(الف)  $W_{ve_1}(P_n; q) = 2 \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)q^k$

(ب)  $W_{ve_1}(C_n; q) = \begin{cases} 2n \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} q^k & 2 \mid n \\ 2n \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} q^k + nq^{\frac{n-1}{2}} & 2 \nmid n \end{cases}$

(ج)  $W_{ve_1}(S_n; q) = (n-1)[2 + (n-2)q]$

(د)  $W_{ve_1}(W_n; q) = (n-1)[4 + (n+1)q + (n-5)q^2],$

(ه)  $W_{ve_1}(K_n; q) = 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3}q$

(و)  $W_{ve_1}(K_{a,b}; q) = ab[2 + (a+b-2)q]$

**اثبات:** (الف) طبق تعریف چندجمله‌ای وینر رأسی-یالی اول داریم:

$$W_{ve_1}(P_n; q) = \sum_{u \in V(P_n)} \sum_{e \in E(P_n)} q^{D_1(u,e)}$$

$$= (q^0 + q^1 + \dots + q^{n-2}) + (q^0 + q^0 + q^1 + \dots$$

$$+ q^{n-3}) + (q^1 + q^0 + q^0 + q^1 + \dots + q^{n-4}) + \dots$$

$$+ (q^{n-3} + q^{n-4} + \dots + q^0 + q^0) + (q^{n-2} + q^{n-3}$$

$$+ \dots + q^0) = 2[(q^0 + q^1 + \dots + q^{n-2}) + (q^0 + q^1$$

$$+ \dots + q^{n-3}) + \dots + (q^0 + q^1) + q^0]$$

$$W_{ve_2}(W_n; q) = (n-1)[7q + (2n-7)q^2] \quad (د)$$

$$W_{ve_2}(K_n; q) = n \binom{n}{2} q \quad (ه)$$

$$W_{ve_2}(K_{a,b}; q) = ab[2q + (a+b-2)q^2] \quad (و)$$

**اثبات:** اثبات قسمت (ه) بدیهی بوده و با توجه به این که گراف‌های  $P_n$ ،  $C_{2n}$ ،  $S_n$  و  $K_{a,b}$  دوبخشی هستند، طبق قضیه‌های ۲-۳ و ۲-۷، اثبات قسمت‌های (الف)، (ج)، (و) و حالت اول (ب) نیز بدیهی است. حال به اثبات سایر حالات می‌پردازیم.

(ب) فرض کنید  $n$  فرد باشد. با توجه به تقارن گراف  $C_n$  داریم:

$$\begin{aligned} W_{ve_2}(C_n; q) &= \sum_{u \in V(C_n)} \sum_{e \in E(C_n)} q^{D_2(u,e)} \\ &= n[2(q^1 + q^2 + \dots + q^{\frac{n-1}{2}}) + q^{\frac{n-1}{2}}] \\ &= 2n \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} q^k + 3nq^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

(د) با توجه به تقارن گراف  $W_n$  داریم:

$$\begin{aligned} W_{ve_2}(W_n; q) &= \sum_{u \in V(W_n)} \sum_{e \in E(W_n)} q^{D_2(u,e)} \\ &= (n-1)q^1 + (n-1)q^1 + (n-1)[3q^1 + (n-4)q^2 \\ &\quad + 2q^1 + (n-3)q^2] = (n-1)[7q + (2n-7)q^2]. \end{aligned}$$

این اثبات را کامل می‌کند. ■

**نتیجه ۲-۱۰:** شاخص وینر رأسی-یالی دوم گراف‌های معروف عبارتند از:

$$W_{ve_2}(P_n) = 2 \binom{n+1}{3} \quad (الف)$$

$$W_{ve_2}(C_n) = \begin{cases} \frac{n^2(n+2)}{4} & 2 \mid n \\ \frac{n(n-1)(n+3)}{4} & 2 \nmid n \end{cases} \quad (ب)$$

$$W_{ve_2}(S_n) = 2(n-1)^2 \quad (ج)$$

$$W_{ve_2}(W_n) = (n-1)(4n-7) \quad (د)$$

(و) با توجه به تقارن گراف  $K_{a,b}$  داریم:

$$\begin{aligned} W_{ve_1}(K_{a,b}; q) &= \sum_{u \in V(K_{a,b})} \sum_{e \in E(K_{a,b})} q^{D_1(u,e)} \\ &= a[b + (ab-b)q] + b[a + (ab-a)q] \\ &= ab[2 + (a+b-2)q]. \end{aligned}$$

این اثبات را کامل می‌کند. ■

**نتیجه ۲-۸:** شاخص وینر رأسی-یالی اول گراف‌های معروف عبارتند از:

$$W_{ve_1}(P_n) = 2 \binom{n}{3} \quad (الف)$$

$$W_{ve_1}(C_n) = \begin{cases} \frac{n^2(n-2)}{4} & 2 \mid n \\ \frac{n(n-1)^2}{4} & 2 \nmid n \end{cases} \quad (ب)$$

$$W_{ve_1}(S_n) = 2 \binom{n-1}{2} \quad (ج)$$

$$W_{ve_1}(W_n) = 3(n-1)(n-3) \quad (د)$$

$$W_{ve_1}(K_n) = 3 \binom{n}{3} \quad (ه)$$

$$W_{ve_1}(K_{a,b}) = ab(a+b-2) \quad (و)$$

**اثبات:** با توجه به قضیه ۲-۷ و با مشتق‌گیری از چندجمله‌ای وینر رأسی-یالی اول هر گراف در  $q=1$ ، شاخص وینر رأسی-یالی اول آن به دست می‌آید. ■

**قضیه ۲-۹:** چندجمله‌ای وینر رأسی-یالی دوم گراف‌های معروف عبارتند از:

$$W_{ve_2}(P_n; q) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)q^k \quad (الف)$$

$$W_{ve_2}(C_n; q) = \begin{cases} 2n \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} q^k & 2 \mid n \\ 2n \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} q^k + 3nq^{\frac{n-1}{2}} & 2 \nmid n \end{cases} \quad (ب)$$

$$W_{ve_2}(S_n; q) = (n-1)[2q + (n-2)q^2] \quad (ج)$$

$k$ -امین توان دکارتی<sup>۱۶</sup> گراف  $G$  می‌نامیم.

$$W_{ve_2}(K_n) = n \binom{n}{2} \quad (۵)$$

$$W_{ve_2}(K_{a,b}) = 2ab(a+b-1) \quad (۶)$$

**قضیه ۳-۱:** [۱۳] فرض کنید  $G_k, \dots, G_2, G_1$  گراف‌های همبند ساده باشند. فاصله‌ی بین رئوس  $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  و  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  در گراف  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$  برابر با مجموع فواصل بین رئوس  $u_i$  و  $v_i$  در گراف  $G_i$  به‌ازای  $1 \leq i \leq k$  می‌باشد.

**قضیه ۳-۲:** برای  $1 \leq i \leq k$  فرض کنید  $G_i$  یک گراف همبند ساده از مرتبه‌ی  $n_i$  باشد. آن‌گاه به‌ازای  $r \in \{1, 2\}$  داریم:

$$W_{ve_r}(G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k; q) = \sum_{i=1}^k W_{ve_r}(G_i; q) \prod_{i \neq j=1}^k (2W(G_j; q) + n_j).$$

**اثبات:** قرار دهید  $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$ . ابتدا مجموعه رئوس گراف  $G$  را به  $k$  زیر مجموعه‌ی  $E_1, E_2, \dots, E_k$  افزایش می‌کنیم به‌طوری‌که برای هر  $1 \leq i \leq k$  داشته باشیم:

$$E_i = \{xy \in E(G) : x = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_k), \\ y = (a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_k), \\ a_j \in V(G_j), a_i b_i \in E(G_i)\}.$$

فرض کنید  $u = (u_1, \dots, u_k) \in V(G)$  و  $e = xy \in E_i$  به‌طوری‌که

$$x = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_k)$$

و

$$y = (a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_k).$$

طبق قضیه ۳-۱ داریم:

$$D_1(u, e) = \min \{d((u_1, \dots, u_k), (a_1, \dots, a_k)), \\ d((u_1, \dots, u_k), (a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_k))\} \\ = \min \{d(u_1, a_1) + \dots + d(u_k, a_k), \\ d(u_1, a_1) + \dots + d(u_{i-1}, a_{i-1}) + d(u_i, b_i) \\ + d(u_{i+1}, a_{i+1}) + \dots + d(u_k, a_k)\}$$

16.  $k$ -th Cartesian power

**اثبات:** با توجه به قضیه ۲-۹ و با مشتق‌گیری از چندجمله‌ای وینر رأسی-یالی دوم هر گراف در  $q=1$ ، شاخص وینر رأسی-یالی دوم آن به‌دست می‌آید. ■ لازم به ذکر است که فرمول‌های ارائه شده در نتایج ۲-۸ و ۲-۱۰ برای شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف‌های معروف، در مرجع [۱۸] به روشی دیگر محاسبه شده‌اند.

### ۳- چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌های وینر رأسی-یالی حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها

در این بخش رابطه‌ی بین چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌های وینر رأسی-یالی حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها را با چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف‌های اولیه به‌دست می‌آوریم. سپس نتایج حاصل را در محاسبه‌ی شاخص‌های وینر رأسی-یالی شبکه‌های مستطیلی<sup>۱۰</sup>،  $C_4$ -نانولوله‌ها<sup>۱۱</sup>،  $C_4$ -نانوچنبره‌ها<sup>۱۲</sup>، گراف همینگ<sup>۱۳</sup> و ابرمکعب‌ها<sup>۱۴</sup> به‌کار می‌گیریم. حاصل ضرب دکارتی<sup>۱۵</sup> دو گراف  $G_1$  و  $G_2$  که با  $G_1 \square G_2$  نشان داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس  $V(G_1) \times V(G_2)$  می‌باشد. دو رأس  $(u_1, u_2)$  و  $(v_1, v_2)$  از آن مجاورند اگر و فقط اگر  $[u_2 v_2 \in E(G_2), u_1 = v_1]$

یا

$$[u_1 v_1 \in E(G_1), u_2 = v_2].$$

تعریف فوق را می‌توان به بیش از دو گراف نیز به‌آسانی تعمیم داد. اگر  $G_1 = G_2 = \dots = G_k = G$ ، آن‌گاه گراف  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$  را با  $G^k$  نشان داده و آن را

10. Rectangular grids

11. C4-nanotubes

12. C4-nanotori

13. Hamming graph

14. Hypercubes

15. Cartesian product



$$W_{ve_r}(G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k) = \prod_{i=1}^k n_i^2 \times \left[ 2 \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{n_i} \sum_{i \neq j=1}^k \frac{W(G_j)}{n_j^2} + \sum_{i=1}^k \frac{W_{ve_r}(G_i)}{n_i^2} \right].$$

به‌عنوان نتایجی از قضیه ۳-۲ و نتیجه ۳-۳ می‌توان چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌های وینر رأسی-یالی  $k$ -امین توان دکارتی گراف  $G$  را محاسبه کرد.

**نتیجه ۳-۴:** فرض کنید  $G$  یک گراف همبند ساده از مرتبه‌ی  $n$  و اندازه‌ی  $m$  باشد. آن‌گاه به‌ازای  $r \in \{1, 2\}$  داریم:

$$W_{ve_r}(G^k; q) = kW_{ve_r}(G; q)(2W(G; q) + n)^{k-1},$$

$$W_{ve_r}(G^k) = kn^{2k-3}[2m(k-1)W(G) + nW_{ve_r}(G)].$$

به‌عنوان حالت خاصی از قضیه ۳-۲ و نتیجه ۳-۳ می‌توان چندجمله‌ای‌ها و شاخص‌های وینر رأسی-یالی حاصل ضرب دکارتی دو گراف را محاسبه کرد.

**نتیجه ۳-۵:** فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف همبند ساده به‌ترتیب از مرتبه‌های  $n_1$  و  $n_2$  و اندازه‌های  $m_1$  و  $m_2$  باشند. آن‌گاه به‌ازای  $r \in \{1, 2\}$  داریم:

$$W_{ve_r}(G_1 \square G_2; q) = (2W(G_1; q) + n_1)W_{ve_r}(G_2; q) + (2W(G_2; q) + n_2)W_{ve_r}(G_1; q),$$

$$W_{ve_r}(G_1 \square G_2) = 2n_2m_2W(G_1) + n_2^2W_{ve_r}(G_1) + 2n_1m_1W(G_2) + n_1^2W_{ve_r}(G_2).$$

حال نتایج ۳-۳ و ۳-۵ را در محاسبه‌ی شاخص‌های وینر رأسی-یالی برخی گراف‌های مولکولی که نتیجه‌ی عمل حاصل ضرب دکارتی هستند به‌کار می‌گیریم. از لم زیر در اثبات نتایج بعدی استفاده می‌شود.

$$= d(u_1, a_1) + \dots + d(u_{i-1}, a_{i-1}) + \min\{d(u_i, a_i), d(u_i, b_i)\} + d(u_{i+1}, a_{i+1}) + \dots + d(u_k, a_k)$$

$$= d(u_1, a_1) + \dots + d(u_{i-1}, a_{i-1}) + D_1(u_i, a_i, b_i) + d(u_{i+1}, a_{i+1}) + \dots + d(u_k, a_k).$$

به‌طریق مشابه ثابت می‌شود:

$$D_2(u, e) = d(u_1, a_1) + \dots + d(u_{i-1}, a_{i-1}) + D_2(u_i, a_i, b_i) + d(u_{i+1}, a_{i+1}) + \dots + d(u_k, a_k).$$

حال به‌ازای  $r \in \{1, 2\}$  داریم:

$$\sum_{u \in \mathcal{E}'(G)} \sum_{e \in E_i} q^{D_r(u, e)} = \sum_{u_1, a_1 \in \mathcal{E}'(G_1)} q^{d(u_1, a_1)} \dots \sum_{u_{i-1}, a_{i-1} \in \mathcal{E}'(G_{i-1})} q^{d(u_{i-1}, a_{i-1})} \sum_{u_i \in \mathcal{E}'(G_i)} \sum_{a_i, b_i \in E(G_i)} q^{D_r(u_i, a_i, b_i)} \sum_{u_{i+1}, a_{i+1} \in \mathcal{E}'(G_{i+1})} q^{d(u_{i+1}, a_{i+1})} \dots \sum_{u_k, a_k \in \mathcal{E}'(G_k)} q^{d(u_k, a_k)}$$

$$= W_{ve_r}(G_i; q) \prod_{i \neq j=1}^k (2W(G_j; q) + n_j).$$

در نتیجه به‌ازای  $r \in \{1, 2\}$  داریم:

$$W_{ve_r}(G; q) = \sum_{i=1}^k \sum_{u \in \mathcal{E}'(G)} \sum_{e \in E_i} q^{D_r(u, e)}$$

$$= \sum_{i=1}^k W_{ve_r}(G_i; q) \prod_{i \neq j=1}^k (2W(G_j; q) + n_j).$$

این اثبات را کامل می‌کند. ■

به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۳-۲ می‌توان شاخص‌های وینر رأسی-یالی حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها را محاسبه کرد.

**نتیجه ۳-۳:** برای  $1 \leq i \leq k$ ، فرض کنید  $G_i$  یک گراف همبند ساده از مرتبه‌ی  $n_i$  و اندازه‌ی  $m_i$  باشد. آن‌گاه به‌ازای  $r \in \{1, 2\}$  داریم:

**نتیجه ۳-۷:** شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف  $G = P_n \square P_m$  برابر است با:

$$W_{ve_1}(G) = \frac{nm}{3}[(n+m)(2nm - n - m + 1) - 2(2nm - 1)],$$

$$W_{ve_2}(G) = \frac{nm}{3}[(n+m)(2nm - n - m - 2) + 2(nm + 1)].$$

گراف  $P_n \square P_2$  که در شکل ۲ نشان داده شده است گراف نردبان<sup>۱۷</sup> با  $2n$  رأس نام دارد. این گراف در واقع گراف مولکولی منتسب به ساختارهای پلی‌آمینی می‌باشد و زنجیر پلی‌آمینی خطی<sup>۱۸</sup> نیز نامیده می‌شود. به‌عنوان حالت خاصی از نتیجه ۳-۷ می‌توان شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف نردبان را محاسبه کرد.

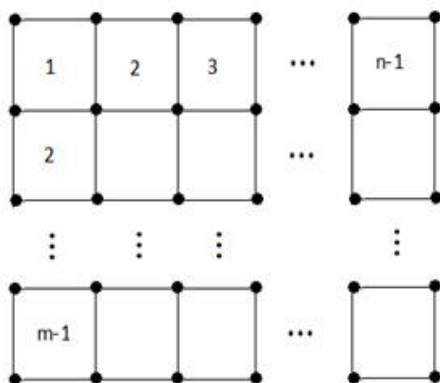
**لم ۳-۶:** [۱۲] شاخص وینر گراف‌های مسیر، دور و کامل عبارتند از:

$$W(P_n) = \binom{n+1}{3} \quad (\text{الف})$$

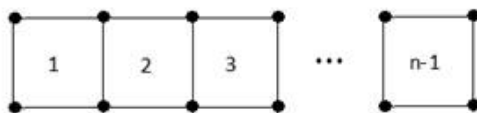
$$W(C_n) = \begin{cases} \frac{n^3}{8} & 2 \mid n \\ \frac{n(n^2-1)}{8} & 2 \nmid n \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$W(K_n) = \binom{n}{2} \quad (\text{ج})$$

گراف  $P_n \square P_m$  که در شکل ۱ نشان داده شده است را مشبکه‌ی مستطیلی  $n$  در  $m$  می‌نامیم. با استفاده از نتیجه ۳-۵، نتایج ۲-۸ و ۲-۱۰ و لم ۳-۶ می‌توان شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف  $P_n \square P_m$  را محاسبه کرد.



شکل ۱: مشبکه‌ی مستطیلی  $n$  در  $m$



شکل ۲: گراف نردبان با  $2n$  رأس

17. Ladder graph

18. Linear polyomino chain

**نتیجه ۳-۸:** شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف  $L = P_n \square P_2$  برابر است با:

$$W_{ve_2}(R) = \begin{cases} \frac{nm^2}{12}[3m(2n-1) + 2(4n^2 + 3n - 4)], & 2 \mid m \\ \frac{nm}{12}[3m^2(2n-1) + 2m(4n^2 + 3n - 4) - 3(4n-1)], & 2 \nmid m \end{cases}$$

$$W_{ve_1}(L) = 2n^2(n-1),$$

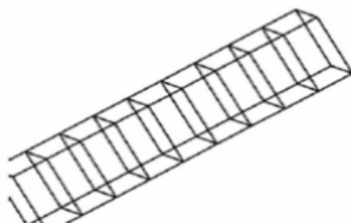
$$W_{ve_2}(L) = 2n(n^2 + 2n - 2).$$

یکی از معروفترین انواع نانولوله‌ها،  $C_4$ - نانولوله‌ها می‌باشند. در شکل ۳، ساختار یک  $C_4$ - نانولوله نشان داده شده است.  $C_4$ - نانولوله‌ی  $R = TUC_4(m, n)$  را می‌توان حاصل ضرب دکارتی گراف‌های  $P_n$  و  $C_m$  در نظر گرفت. [۱۴] با استفاده از نتیجه ۳-۵، نتایج ۲-۸ و ۲-۱۰ و لم ۳-۶ می‌توان شاخص‌های وینر رأسی-یالی  $C_4$ - نانولوله‌ها را محاسبه کرد.

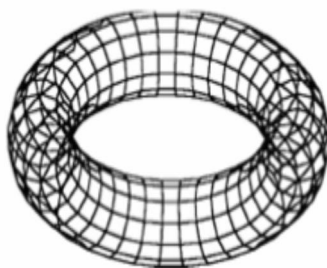
یکی از معروفترین انواع نانوجنبیره‌ها،  $C_4$ - نانوجنبیره‌ها می‌باشند. در شکل ۴، ساختار یک  $C_4$ - نانوجنبیره نشان داده شده است. در واقع  $C_4$ - نانوجنبیره‌ی  $S = TC_4(m, n)$  را می‌توان حاصل ضرب دکارتی گراف‌های  $C_m$  و  $C_n$  در نظر گرفت. [۱۴] با استفاده از نتیجه ۳-۵، نتایج ۲-۸ و ۲-۱۰ و لم ۳-۶ می‌توان شاخص‌های وینر رأسی-یالی  $C_4$ - نانوجنبیره‌ها را محاسبه کرد.

**نتیجه ۳-۹:** شاخص‌های وینر رأسی-یالی  $C_4$ - نانولوله‌ی  $R = TUC_4(m, n)$  برابر است با:

$$W_{ve_1}(R) = \begin{cases} \frac{nm}{12}[3m^2(2n-1) + 2mn(4n-9) + 4], & 2 \mid m \\ \frac{nm}{12}[3m^2(2n-1) + 2m(4n^2 - 9n + 2) + 3], & 2 \nmid m \end{cases}$$



شکل ۳: یک  $C_4$ - نانولوله



شکل ۴: یک  $C_4$ - نانوجنبیره

$$W_{ve_1}(H_{n_1, \dots, n_N}) = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^N n_i^2 [(N-1)$$

$$(\sum_{i=1}^N n_i - N) - \sum_{i=1}^N (n_i - 1) \sum_{i \neq j=1}^N \frac{1}{n_j}$$

$$+ (\sum_{i=1}^N n_i - 3N + 2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{n_j})],$$

$$W_{ve_2}(H_{n_1, \dots, n_N}) = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^N n_i^2 [N (\sum_{i=1}^N n_i - N)$$

$$- \sum_{i=1}^N (n_i - 1) \sum_{i \neq j=1}^N \frac{1}{n_j}].$$

در حالت خاصی که  $n_1 = n_2 = \dots = n_N = 2$ ، گراف همینگ  $H_{n_1, \dots, n_N}$  را ابرمکعب  $N$  بعدی نامیده و با  $Q_N$  نشان می‌دهیم. در واقع گراف  $Q_N$  دومین توان دکارتی گراف  $K_2$  می‌باشد. در شکل ۵، ابرمکعب‌های صفر تا چهار بعدی نشان داده شده‌اند. به‌عنوان حالت خاصی از نتیجه ۳-۱۱ می‌توان شاخص‌های وینر رأسی-یالی ابرمکعب  $N$  بعدی را برای  $N$  دلخواه محاسبه کرد.

**نتیجه ۳-۱۲:** شاخص‌های وینر رأسی-یالی ابرمکعب  $N$  بعدی برابر است با:

$$W_{ve_1}(Q_N) = 4^{N-1} N(N-1),$$

$$W_{ve_2}(Q_N) = 4^{N-1} N(N+1).$$

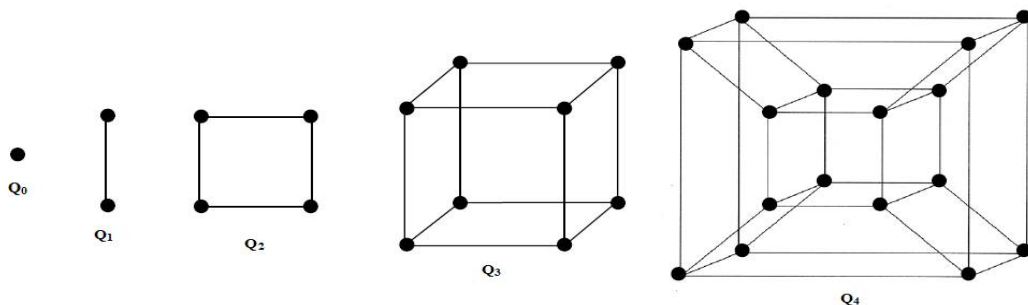
**نتیجه ۳-۱۰:** شاخص‌های وینر رأسی-یالی  $C_4$ -نانوچنبره‌ی  $S = TC_4(m, n)$  برابر است با:

$$W_{ve_1}(S) = \frac{n^2 m^2}{2} (n+m-2),$$

$$W_{ve_2}(S) = \begin{cases} \frac{n^2 m^2}{2} (n+m+2), & 2 \mid n, m \\ \frac{nm}{2} [(n+m)(nm-2) - 2 \nmid n, m \\ + 2nm], \\ \frac{nm^2}{2} [n^2 + n(m+2) - 2 \nmid n, 2 \mid m \\ - 2]. \end{cases}$$

گراف همینگ  $H_{n_1, \dots, n_N}$  گرافی است که مجموعه رؤس آن مجموعه‌ی  $N$  تایی‌های  $b_1 b_2 \dots b_N$  بوده که  $n_i \geq 2$  و  $b_i \in \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$  دو رأس از این گراف مجاورند اگر دقیقاً در یک مؤلفه تفاوت داشته باشند. به‌آسانی می‌توان نشان داد  $H_{n_1, \dots, n_N} = K_{n_1} \square K_{n_2} \square \dots \square K_{n_N}$ . با استفاده از نتیجه ۳-۳، نتایج ۲-۸ و ۲-۱۰ و لم ۳-۶ می‌توان شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف همینگ را محاسبه کرد.

**نتیجه ۳-۱۱:** شاخص‌های وینر رأسی-یالی گراف همینگ  $H_{n_1, \dots, n_N}$  برابر است با:



شکل ۵: ابرمکعب‌های صفر تا چهار بعدی

- [9] A. Heydari. On the Wiener and terminal Wiener index of generalized Bethe trees. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 69:141-150 (2013)
- [10] A. Nikseresht, Z. Sepasdar. On the Kirchhoff and the Wiener indices of graphs and block decomposition. *Electronic Journal of Combinatorics*. 21(1):# P1.25 (2014)
- [11] H. Hosoya. On some counting polynomials in Chemistry. *Discrete Applied Mathematics*. 19:239-257 (1988)
- [12] B. E. Sagan, Y. N. Yeh, P. Zhang. The Wiener polynomial of a graph. *International Journal of Quantum Chemistry*. 60(5):959-969 (1996)
- [13] D. Stevanović. Hosoya polynomial of composite graphs. *Discrete Mathematics*. 235:237-244 (2001)
- [14] M. V. Diudea. Hosoya polynomial in tori. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 45:109-122 (2002)
- [15] H. B. Walikar, H. S. Ramane, L. Sindagi, S. S. Shirakol, I. Gutman. Hosoya polynomial of thorn trees, rods, rings, and stars. *Kragujevac Journal of Science*. 28:47-56 (2006)
- [16] M. Eliasi, A. Iranmanesh. Hosoya polynomial of hierarchical product of graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 69:111-119 (2013)
- [17] M. H. Khalifeh, H. Yousefi-Azari, A. R. Ashrafi, S. G. Wagner. Some new results on distance-based graph invariants. *European Journal of Combinatorics*. 30:1149-1163 (2009)
- [1] N. Trinajstić, *Chemical Graph Theory*. CRC Press. Boca Raton (1992)
- [2] R. Todeschini, V. Consonni. *Handbook of Molecular Descriptors*. Wiley-VCH. Weinheim (2000)
- [3] H. Wiener. Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of American Chemical Society*. 69(1):17-20 (1947)
- [4] Z. Yarahmadi, G. H. Fath-Tabar. The Wiener, Szeged, PI, vertex PI, the first and second Zagreb indices of N-branched phenylacetylenes dendrimers. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 65(1):201-208 (2011)
- [5] M. R. Darafsheh, M. H. Khalifeh. Calculation of the Wiener, Szeged, and PI indices of a certain nanostar dendrimer. *Ars Combinatoria*. 100:289-298 (2011)
- [6] A. R. Ashrafi. Wiener index of nanotubes, toroidal fullerenes and nanostars. In: F. Cataldo, A. Graovac, O. Ori (Eds.). *The Mathematics and Topology of Fullerenes*. Springer Netherlands. Dordrecht pp. 21-38 (2011)
- [7] A. R. Ashrafi, Z. Mohammad-Abadi. On Wiener index of one-heptagonal nanocone. *Current Nanoscience*. 8(1):180-185 (2012)
- [8] Y. Alizadeh. Wiener index of  $SC_5C_7[p, q]$  nanotubes. *Optoelectronics and Advanced Materials-Rapid Communications*. 7(11):943-946 (2013)

electron energy of alternant hydrocarbons. *Chemical Physics Letters*. 17(4):535-538 (1972)

[18] M. Azari, A. Iranmanesh. Computation of the edge Wiener indices of the sum of graphs. *Ars Combinatoria*. 100:113-128 (2011)

[19] M. Azari, A. Iranmanesh, A. Tehranian. Two topological indices of three chemical structures. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 69:69-86 (2013)

[20] M. Azari, A. Iranmanesh, A. Tehranian. Maximum and minimum polynomials of a composite graph. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*. 5(9):825-830 (2011)

[21] M. Azari, A. Iranmanesh. Computing Wiener-like topological invariants for some composite graphs and some nanotubes and nanotori. In: I. Gutman (Ed.). *Topics in Chemical Graph Theory*. Univ. Kragujevac. Kragujevac pp. 69-90 (2014)

[22] M. Azari, A. Iranmanesh. Clusters and various versions of Wiener-type invariants. *Kragujevac Journal of Mathematics*. 39(2):155-171 (2015)

[23] M. Azari. A note on vertex-edge Wiener indices of graphs. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*. 7(1):11-17 (2016)

[24] M. Azari, A. Iranmanesh. On the vertex-edge Wiener polynomials of the disjunctive product of graphs. *Acta Universitatis Apulensis*. 45(1):61-72 (2016)

[25] M. Azari, A. Iranmanesh. Joins, coronas and their vertex-edge Wiener polynomials. *Tamkang Journal of Mathematics*. 47(2):163-178 (2016)

[26] I. Gutman, N. Trinajstić. Graph theory and molecular orbitals. Total  $\pi$  -