دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نقطه ثابت مشترک در فضاهای b− متریک کامل به روش کرک[1]

موسی آور[1]، خدیجه جاهدی*[2]، محمد جواد مهدی پور[3]

(۱ و ۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد شیراز، دانشگاه آزد اسلامی، شیراز، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۸/۱۰   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۲۳

چکیده

در این مقاله، مفهوم خودنگاشت‌های سازگار و به طور ضعیف سازگار را برای فضای $b-$ متریک تعریف می‌کنیم و با الهام از روش کرک و همکاران، به معرفی شرایطی جدید و تعدیل‌یافته جهت وجود نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر بفرد برای خانواده‌ای با تعداد زوج از خود نگاشت‌ها و دو خود نگاشت دیگر بر روی فضای $b-$ متریک کامل می‌پردازیم. همچنین به تعمیم قضیه نقطه ثابت مشترک برای یک دنباله و یک خانواده با تعدادی زوج از خود نگاشت‌ها روی فضای $b-$ متریک کامل می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: فضای $b-$ متریک، نقطه ثابت مشترک، خودنگاشت‌های سازگار، خودنگاشت‌های به طور ضعیف سازگار.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: mjahedi80@yahoo.com

1. Ciric

۱. تاریخچه و مقدمه

بورباکی[1] [۱] و باختین[2] [۲] اولین کسانی بودند که ایده فضای $b-$ متریک را مطرح کردند. چرویک[3][۳] در سال ۱۹۹۸ با ضعیف‌تر کردن خاصیت نامساوی مثلثی در فضای متریک معمولی به معرفی یک فضای متریک تعمیم‌یافته پرداخت و آن را $b-$ متریک نامید.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه غیرتهی باشد و $b \geq ۱$ یک عدد حقیقی باشد، تابع $d: X \times X \to [۰,\infty)$ را یک $b-$ متریک گوییم اگر برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

۱) $x = y$ اگر و فقط اگر $d(x,y) = ۰$.

۲) $d(x,y) = d(y,x)$.

۳) $d(x,y) \leq b[d(x,z) + d(z,y)]$.

زوج (X,d) را یک فضای $b-$متریک روی یک مجموعه غیرتهی X گوییم.

در حالت خاص $b = ۱$، فضای $b-$ متریک، همان فضای متریک معمولی است.

مثال ۲.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک معمولی و $p > ۱$ یک عدد حقیقی باشد. در این صورت (X,d^p) یک $b-$متریک با ضریب $b = ۲^{p-۱}$ می‌باشد.

$$d^p(x,y) = (d(x,y))^p.$$

اگر در حالت خاص، $p = ۲$ برای متر استاندارد روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، واضح است که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$،

$$d^2(x,y) = (d(x,y))^۲ = (x-y)^۲$$

یک $b-$متریک روی $\mathbb{R}$، با $b = ۲$ است ولی یک متریک معمولی روی $\mathbb{R}$ نیست.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای $b-$متریک باشد. در این صورت دنباله $\{x_n\}$ در X:

۱. همگرا است اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $d(x_n,x) \to ۰$ وقتی $n \to \infty$ و در این حالت می‌نویسیم $lim_{n\to\infty} x_n = x$.

۲. کوشی است اگر $d(x_n,x_m) \to ۰$ وقتی $n,m \to \infty$.

۳. فضای $b-$متریک (X,d) کامل است اگر هر دنباله کوشی در X، همگرا باشد.

۴. خودنگاشت $T: X \to X$ را پیوسته گوییم، هرگاه برای دنباله $\{x_n\}$ از X که، $lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = ۰$ داشته باشیم $lim_{n\to\infty} d(Tx_n,Tx) = ۰$.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای $b-$متریک و f و g دو خود نگاشت بر X باشند آن‌گاه:

۱. زوج $\{f,g\}$ را سازگار گوییم اگر $lim_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n) = ۰$، هرگاه $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد به‌طوریکه برای یک $t \in X$، $lim_{n\to\infty} fx_n = lim_{n\to\infty} gx_n = t$.

۲. زوج $\{f,g\}$ را به طور ضعیف سازگار گوییم اگر در نقاط انطباق خود با یکدیگر جابه‌جا شوند. یعنی اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوریکه $fx = gx$ آنگاه داریم:

$$gfx = fgx.$$

در فضای $b-$متریک (X,d)، هر دنباله همگرا دارای حد منحصر بفرد بوده و کوشی نیز می‌باشد اما هر $b-$متریک لزوماً پیوسته نیست. برای دیدن مثال به [۴] مراجعه شود.

بسیاری از محققین قضایای نقطه ثابت و نقطه‌ی ثابت مشترک را برای عملگرهای تک مقداری و چند مقداری روی فضای $b-$متریک مورد بررسی قرار داده‌اند. اطلاعات بیشتر در [۱۴-۵] است. در این مقاله با الهام از روش کرک و همکاران [۱۴] به اثبات وجود نقطه‌ی ثابت مشترک برای یک خانواده به تعداد زوج دلخواه و دو خود نگاشت دیگر در فضای متریک، بدون نیاز به پیوستگی $b-$متریک می‌پردازیم. در نهایت به تعمیم مطلب فوق برای یک دنباله دلخواه به همراه یک دسته زوج از خود نگاشت‌ها خواهیم پرداخت. با توجه به عدم پیوستگی $b-$متریک، نیاز به لم‌های زیر در مورد

1. *Bourbaki*
2. *Bakhtin*
3. *Czerwik*

دنباله های b − همگرا داریم.

لم ۵.۱. ([۲]) فرض کنیم (X,d) یک فضای b − متریک با $b \geq ۱$ باشد. فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به ترتیب به x و y، b− همگرا باشد. در این‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{۱}{b^{۲}} d(x,y) &\leq \lim_{n\to\infty} inf\, d(x_n,y_n)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} sup\, d(x_n,y_n)\\ &\leq b^{۲} d(x,y)\end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $x=y$، آن‌گاه داریم $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=۰$. علاوه بر این برای هر $z \epsilon X$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{b} d(x,z) &\leq \lim_{n\to\infty} inf\, d(x_n,z)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} sup\, d(x_n,z)\\ &\leq b\, d(x,z).\end{aligned}$$

لم ۶.۱. فرض (X,d) یک فضای b − متریک باشد. اگر وجود داشته باشند دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به طوری که $lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=۰$، هرگاه $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد به طوری که $lim_{n\to\infty} x_n = t$ برای بعضی $t \epsilon X$، آن‌گاه $lim_{n\to\infty} y_n = t$.

اثبات: با توجه به نامساوی مثلثی در فضای b − متریک داریم:

$$d(y_n,t) \leq b\,[d(y_n,x_n)+d(x_n,t)].$$

حال با در نظر گرفتن حد بالایی وقتی که $n\to\infty$ در نامساوی فوق داریم

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} sup\, d(y_n,t)\\ &\qquad \leq b\left[\lim_{n\to\infty} sup\, d(x_n,y_n) + \lim_{n\to\infty} sup\, d(x_n,t)\right]\\ &\qquad = ۰\,.\end{aligned}$$

بنابراین $lim_{n\to\infty} y_n = t$.

۲. نتایج اصلی

همانگونه که مطرح شد در اکثر قضایای نقطه ثابت مشترک، پیوستگی متر داده شده از ارکان حل مساله بود، در این قسمت بدون نیاز به پیوستگی b − متریک به اثبات وجود نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد برای خود نگاشت‌های سازگار و به طور ضعیف سازگار که در شرایط انقباض تعمیم‌یافته با قدری تعدیل در روش کرک و همکاران در فضای b − متریک با $b \geq 1$ صدق می‌کنند، می‌پردازیم.

در ابتدا شرایط قضیه نقطه‌ی ثابت مشترک بر روی فضای b − متریک (X,d) با ضریب $b > ۱$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور فرض می‌کنیم Φ گردایه‌ای از نگاشت‌های $\varphi:[۰,\infty)\to[۰,\infty)$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. φ روی $[۰,\infty)$ پیوسته است.

۲. به ازای هر $t>۰$، $\varphi(t)<t$ و $\varphi(۰)=۰$.

همانگونه که دیده می‌شود، بدون نیاز به فرض غیرنزولی بودن φ در روش کرک و همکاران، مساله را روی فضای b − متریک کامل اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $P_{۲n_۰}$ و ... و $P_۲$ و $P_۱$ و $Q_۱$ و $Q_۰$ خودنگاشت‌هایی روی فضای b−متریک کامل (X,d) با ضریب $b>۱$ باشند به طوری که شرایط زیر برقرار باشند.

۱.

$$\begin{aligned}Q_۱(X) \subseteq P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}(X) \text{ و } Q_۰(X)\\ \subseteq P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}(X);\end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned}&P_۲(P_۴\dots P_{۲n_۰}) = (P_۴\dots P_{۲n_۰})P_۲;\\ &P_۲P_۴(P_۶\dots P_{۲n_۰}) = (P_۶\dots P_{۲n_۰})P_۲P_۴;\\ &\vdots\\ &P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰-۲}(P_{۲n_۰})\\ &\qquad = (P_{۲n_۰})P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰-۲};\\ &Q_۰(P_۴\dots P_{۲n_۰}) = (P_۴\dots P_{۲n_۰})Q_۰;\\ &Q_۰(P_۶\dots P_{۲n_۰}) = (P_۶\dots P_{۲n_۰})Q_۰;\\ &\vdots\\ &Q_۰(P_{۲n_۰}) = (P_{۲n_۰})Q_۰;\\ &P_۱(P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}) = (P_۳\dots P_{۲n_۰-۱})P_۱;\end{aligned}$$

$$P_{۱}P_{۳}(P_{۵}\dots P_{۲n_{۰}-۱}) = (P_{۵}\dots P_{۲n_{۰}-۱})P_{۱}P_{۳};$$
$$\vdots$$
$$P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۳}(P_{۲n_{۰}-۱}) = (P_{۲n_{۰}-۱})P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۳};$$
$$Q_{۱}(P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۱}) = (P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۱})Q_{۱};$$
$$Q_{۱}(P_{۵}\dots P_{۲n_{۰}-۱}) = (P_{۵}\dots P_{۲n_{۰}-۱})Q_{۱};$$
$$\vdots$$
$$Q_{۱}(P_{۲n_{۰}-۱}) = (P_{۲n_{۰}-۱})Q_{۱};$$

۳. $P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}$ یا $Q_{۰}$ پیوسته باشند.

۴. زوج $(Q_{۰}, P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}})$ سازگار و زوج $(Q_{۱}, P_{۱}\dots P_{۲n_{۰}-۱})$ به طور ضعیف سازگار باشند.

۵. $\varphi \in \phi$ وجود داشته باشد به گونه‌ای به ازای هر $u, v \in X$،

$$\begin{aligned}
&d(Q_{۰}u, Q_{۱}v)\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi(d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}u, Q_{۰}u)),\\
&\varphi(d(P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۱}v, Q_{۱}v)),\\
&\varphi(d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}u, P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۱}v)),\\
&\varphi(\frac{۱}{۲}[d(P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۱}v, Q_{۰}u)\\
&+d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}u, Q_{۱}v)]\}.
\end{aligned}$$

در این صورت $Q_{۰}, Q_{۱}, P_{۱}, P_{۲}, \dots, P_{۲n_{۰}}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر بفرد در X دارند.

اثبات: فرض کنیم $x_{۰} \in X$. بنابر شرط (۱) وجود دارند $x_{۱}, x_{۲} \in X$ به طوری که

$$Q_{۰}(x_{۰}) = P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۱}\left(x_{۱}\right) = y_{۰}$$

و

$$Q_{۱}(x_{۱}) = P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}(x_{۲}) = y_{۱}\ ..$$

برای هر $n \in N$، دنباله $\{y_n\}$ را به صورت زیر می‌سازیم.

$$Q_{۰}(x_{۲n}) = P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۱}(x_{۲n+۱}) = y_{۲n}$$

و

$$Q_{۱}(x_{۲n+۱}) = P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}(x_{۲n+۲}) = y_{۲n+۱}.$$

حال نشان می‌دهیم که $\{y_n\}$ دنباله کوشی است.
در شرط (۵) قرار می‌دهیم،

$$u = x_{۲n}, v = x_{۲n+۱},$$

از این پس برای راحتی از نماد زیر استفاده می‌کنیم

$P'_{۱} = P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}$ و $P'_{۲} = P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{۰}-۱}$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&d(Q_{۰}x_{۲n}, Q_{۱}x_{۲n+۱})\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi(d(P'_{۱}x_{۲n}, Q_{۰}x_{۲n})),\\
&\varphi(d(P'_{۲}x_{۲n+۱}, Q_{۱}x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(d(P'_{۱}x_{۲n}, P'_{۲}x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\frac{۱}{۲}[d(P'_{۲}x_{۲n+۱}, Q_{۰}x_{۲n})\\
&+d(P'_{۱}x_{۲n}, Q_{۱}x_{۲n+۱})]\}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&d(y_{۲n}, y_{۲n+۱})\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi(d(y_{۲n-۱}, y_{۲n})),\\
&\varphi(d(y_{۲n}, y_{۲n+۱})), \varphi(d(y_{۲n-۱}, y_{۲n})),\\
&\varphi(\frac{۱}{۲}[d(y_{۲n}, y_{۲n}) + d(y_{۲n-۱}, y_{۲n+۱})])\}\\
&= \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi(d(y_{۲n-۱}, y_{۲n})),\\
&\varphi(d(y_{۲n}, y_{۲n+۱})), \varphi(\frac{۱}{۲}[dy_{۲n-۱}, y_{۲n+۱}))\}\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} \max\{\varphi(d(y_{۲n-۱}, y_{۲n})),\\
&\varphi(d(y_{۲n}, y_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\frac{b}{۲}[d(y_{۲n-۱}, y_{۲n}) + d(y_{۲n}, y_{۲n+۱})])\}\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi(d(y_{۲n-۱}, y_{۲n})),\\
&\varphi(d(y_{۲n}, y_{۲n+۱})), \varphi(bmax[d(y_{۲n-۱}, y_{۲n}),
\end{aligned}$$

$$d(y_{2n}, y_{2n+1})]]\} \tag{1}$$
$$< \frac{1}{b^{2n_0+1}} max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\}$$

اگر برای بعضی از nها،

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) > d(y_{2n-1}, y_{2n})$$

آن‌گاه از نابرابری (۱) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} d(y_{2n}, y_{2n+1}) &\le \frac{1}{b^{2n_0+1}}\, d(y_{2n}, y_{2n+1}) \\ &\le d(y_{2n}, y_{2n+1})\ , \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌شود،

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) < d(y_{2n}, y_{2n+1}).$$

و این تناقض است. لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم،

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \le d(y_{2n-1}, y_{2n}).$$

از این رو طبق نامساوی (۱) داریم،

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \le \frac{1}{b^{2n_0+1}}\, d(y_{2n-1}, y_{2n}) \tag{2}$$

و به طور مشابه برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$d(y_{2n-1}, y_{2n}) \le \frac{1}{b^{2n_0+1}}\, d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) \tag{3}$$

از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$d(y_n, y_{n-1}) < \frac{1}{b^{2n_0+1}}\, d(y_{n-1}, y_{n-2})\ .$$

قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{1}{b^{2n_0+1}}$ و $n \ge 2$، بنابراین برای هر $n \ge 2$ رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n-1}) &< \lambda\, d(y_{n-1}, y_{n-2}) \\ &< \lambda^2 d(y_{n-2}, y_{n-3}) \\ &< \lambda^{n-1} d(y_1, y_0). \end{aligned}$$

به عبارت دیگر برای هر$n \in \mathbb{N}$ ،

$$d(y_n, y_{n-1}) < \lambda^{n-1} d(y_1, y_0). \tag{4}$$

پس برای هر $n > m,\ m, n \in \mathbb{N}$ ،

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) \le\ & bd\left(y_m, y_{m+1}\right) \\ &+ b^2 d\left(y_{m+1}, y_{m+2}\right) + \cdots \\ &+ b^{n-m-1} d\left(y_{n-1}, y_n\right) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

حال با استفاده از (۴) و از آن‌جا که $b\lambda < 1$،

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\le (b\lambda^m + b^2\lambda^{m+1} + \cdots \\ &\quad + b^{n-m-1}\lambda^{n-1} \\ &\quad + \cdots) d(y_1, y_0) \\ &\le b\lambda^m[1 + b\lambda + (b\lambda)^2 \\ &\quad + \cdots] d(y_1, y_0) \\ &= \frac{b\lambda^m}{1 - b\lambda}\, d(y_1, y_0). \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\lim_{m\,,\,n\to\infty} d(y_n, y_m) = 0\ .$$

در نتیجه $\{y_n\}$ یک دنباله b– کوشی در فضای b– متریک کامل است. پس $z \epsilon X$ وجود دارد به طوری که،

$$\lim_{n\to\infty} y_n = z.$$

در حقیقت

$$\lim_{n\to\infty} Q_0 x_{2n} = \lim_{n\to\infty} Q_1 x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P'_2\, x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P'_1 x_{2n} = z \tag{5}$$

حال نشان می‌دهیم z یک نقطه ثابت مشترک نگاشت‌های Q_1 و Q_0 و P_1 و P_2 و ... و P_{2n_0} است. بدین جهت، حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنیم $P'_1 = P_2 P_4 \dots P_{2n_0}$ پیوسته است. پس،

$$\lim_{n\to\infty} P'_1 P'_1\, x_{2n} = P'_1 z$$

و

$$\lim_{n\to\infty} P'_{۱}\, Q_{۰}\, x_{۲n} = P'_{۱} z\,.$$

از این‌که $\{Q_{۰}\,,\, P'_{۱}\}$ سازگارند، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} d(P'_{۱} Q_{۰} x_{۲n}\ ,\, Q_{۰} P'_{۱}\, x_{۲n}) = ۰\,.$$

بنابراین با استفاده از لم ۶.۱ داریم

$$\lim_{n\to\infty} Q_{۰} P'_{۱}\, x_{۲n} = P'_{۱} z\,.$$

الف: فرض کنیم $d(P'_{۱}z,z) \neq ۰$. اگر در شرط (۵) قضیه قرار دهیم $u = P'_{۱}x_{۲n}$ و $v = x_{۲n+۱}$،

$$\begin{aligned}
&d(Q_{۰} P'_{۱} x_{۲n}, Q_{۱} x_{۲n+۱})\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}}\, max\{\varphi(d(P'_{۱}P'_{۱}x_{۲n}, Q_{۰}P'_{۱}\, x_{۲n})),\\
&\varphi(d(P'_{۲}x_{۲n+۱}, Q_{۱}x_{۲n+۱})), \varphi(d(P'_{۱}P'_{۱}x_{۲n}, P'_{۲}x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\frac{۱}{۲}[d(P'_{۲}x_{۲n+۱}, Q_{۰}P'_{۱}\, x_{۲n})\\
&+ d(P'_{۱}P'_{۱}x_{۲n}, Q_{۱}x_{۲n+۱})])\}\,.
\end{aligned}$$

با استفاده از پیوستگی و خواص φ و نیز لم ۵.۱ در نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{b^{۲}} d(P'_{۱}z,z)\\
&\leq \limsup_{n\to\infty} d(Q_{۰}P'_{۱}\, x_{۲n}, Q_{۱}x_{۲n+۱})\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\, \varphi(\limsup_{n\to\infty} d(P'_{۱}P'_{۱}x_{۲n}, Q_{۰}P'_{۱}x_{۲n})),\\
&\varphi(\limsup_{n\to\infty} d(P'_{۲}x_{۲n+۱}, Q_{۱}x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\limsup_{n\to\infty} d(P'_{۱}P'_{۱}x_{۲n}, P'_{۲}x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\frac{۱}{۲}[\limsup_{n\to\infty} d(P'_{۲}x_{۲n+۱}, Q_{۰}P'_{۱}x_{۲n})\\
&+ \limsup_{n\to\infty} d(P'_{۱}P'_{۱}x_{۲n}, Q_{۱}x_{۲n+۱})])\}\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi(b^{۲}d(P'_{۱}z, P'_{۱}z)), \varphi(b^{۲}d(z,z)),\\
&\varphi(b^{۲}d(P'_{۱}z,z)), \varphi(\frac{b^{۲}}{۲}[d(z,P'_{۱}z)\\
&\qquad + d(P'_{۱}z,z)])\}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{b^{۲}}\, d(P'_{۱}z,z)\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} \varphi(b^{۲}d(P'_{۱}z,z))\\
&< \frac{۱}{b^{۲n_{۰}}} d(P'_{۱}z,z).
\end{aligned}$$

از این رو

$$d(P'_{۱}z,z) \leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}-۲}}\ d(P'_{۱}z,z).$$

در نتیجه $d(P'_{۱}z,z) < d(P'_{۱}z,z)$ و این تناقض است. پس

$$d(P'_{۱}z,z) = ۰.$$

بنابراین $P'_{۱}z = z$.

ب: فرض کنیم $d(Q_{۰}z,z) \neq ۰$. در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = z$ و $v = x_{۲n+۱}$. با استفاده از لم ۵.۱ داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{b^{۲}} d(Q_{۰}z,z)\\
&\leq \limsup_{n\to\infty}\ d(Q_{۰}z, Q_{۱}x_{۲n+۱})\\
&\leq \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\, \varphi(\limsup_{n\to\infty} d(P'_{۱}z, Q_{۰}z)),\\
&\varphi(\limsup_{n\to\infty} d(P'_{۲}x_{۲n+۱}, Q_{۱}x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\limsup_{n\to\infty} d(P'_{۱}z, P'_{۲}x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\frac{۱}{۲}[\limsup_{n\to\infty} d(P'_{۲}x_{۲n+۱}, Q_{۰}z)\\
&+ \lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_{۱}z, Q_{۱}x_{۲n+۱})])\}.
\end{aligned}$$

با استفاده از خاصیت (۲) در تعریف φ داریم،

$$\frac{1}{b^{2}}d(Q_0 z,z)$$
$$\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{ \varphi(b^{2}d(z,Q_0 z)),$$
$$\varphi(b^{2}d(z,z)),\varphi(b^{2}d(z,z)),$$
$$\varphi(\frac{b^{2}}{2}[d(z,Q_0 z)+d(z,z)])\}$$
$$< \frac{1}{b^{2n_0+2}}(b^{2}d(z,Q_0 z))$$
$$=\frac{1}{b^{2n_0}}d(z,Q_0 z).$$

در نتیجه با توجه به آن‌که $b>1$،

$$d(Q_0 z,z)<\frac{1}{b^{2n_0-2}}d(z,Q_0 z)$$

از این‌رو $d(Q_0 z,z)<d(z,Q_0 z)$ و این تناقض است. پس

$$d(Q_0 z,z)=0.$$

به عبارت دیگر $Q_0 z=z$.

ج: فرض کنیم $d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)\neq 0$. در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=P_4 \dots P_{2n_0} z$ و $v=x_{2n+1}$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم:

$$\frac{1}{b^{2}}d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)$$
$$\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(b^{2}d(P_4 \dots P_{2n_0} z,P_4 \dots P_{2n_0} z)),$$
$$\varphi(b^{2}d(z,z)),\varphi(b^{2}d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)),$$
$$\varphi(\frac{b^{2}}{2}[d(z,P_4 \dots P_{2n_0} z)$$
$$+d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)])\}$$
$$<\frac{1}{b^{2n_0+2}}(b^{2}\, d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z))$$
$$=\frac{1}{b^{2n_0}}d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z),$$

در نتیجه

$$d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)<d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)$$

و این تناقض است. بنابراین $P_4 \dots P_{2n_0} z=z$. در این صورت

$$P_2 z=P_2 P_4 \dots P_{2n_0} z=z$$

و

$$P_2 P_4 \dots P_{2n_0} z=P_2 z.$$

با ادامه این مراحل داریم

$$Q_0 z=P_2 z=P_4 z=\cdots=P_{2n_0} z=z.$$

د: چون $Q_0(X)\subseteq P_2'(X)$، عنصر $v\in X$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$z=Q_0 z=P_2' v.$$

با فرض $d(z,Q_1 v)\neq 0$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=x_{2n}$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{1}{b^{2}}d(z,Q_1 v)$$
$$\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(b^{2}d(z,z)),$$
$$\varphi(b^{2}d(z,Q_1 v)),\varphi(b^{2}d(z,z)),$$
$$\varphi(\frac{b^{2}}{2}[d(z,z)+d(z,Q_1 v)])\}$$
$$<\frac{1}{b^{2n_0+2}}(b^{2}d(z,Q_1 v))$$
$$=\frac{1}{b^{2n_0}}d(z,Q_1 v).$$

که نتیجه می‌شود $Q_1 v=z$. بنابراین

$$P_1 P_3 \dots P_{2n_0-1} v=Q_1 v=z.$$

از آن‌جا که $(Q_1, P_1P_3\dots P_{2n_0-1})$ به طور ضعیف سازگار است، داریم

$$P_1P_3\dots P_{2n_0-1}Q_1v = Q_1P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v.$$

بنابراین

$$P_1P_3\dots P_{2n_0-1}z = Q_1z.$$

ر: با فرض $d(Q_1z,z)\neq 0$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=x_{2n}$ و $v=z$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b^2}d(z,Q_1z)\\
&\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{\varphi(b^2d(z,z)),\\
&\varphi(b^2d(Q_1z,Q_1z)),\varphi(b^2d(z,Q_1z)),\\
&\varphi(\frac{b^2}{2}[d(Q_1z,z)+d(z,Q_1z)])\}\\
&< \frac{1}{b^{2n_0+2}}\,(b^2d(z,Q_1z))\\
&= \frac{1}{b^{2n_0}}d(z,Q_1z).
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌شود $Q_1z=z$ و همچنین

$$P_1P_3\dots P_{2n_0-1}z = Q_1z = z.$$

ز: با فرض $d(z,P_3\dots P_{2n_0-1}z)\neq 0$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=x_{2n}$ و $v=P_3\dots P_{2n_0-1}z$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b^2}d(z,P_3\dots P_{2n_0-1}z)\\
&\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{\varphi(b^2d(z,z)),\\
&\varphi(b^2d(P_3\dots P_{2n_0-1}z,P_3\dots P_{2n_0-1}z)),\\
&\varphi(b^2d(z,P_3\dots P_{2n_0-1}z)),\\
&\varphi(\frac{b^2}{2}[d(P_3\dots P_{2n_0-1}z,z)\\
&+d(z,P_3\dots P_{2n_0-1}z)])\}\\
&< \frac{1}{b^{2n_0+2}}\,(b^2d(z,P_3\dots P_{2n_0-1}z))\\
&= \frac{1}{b^{2n_0}}d(z,P_3\dots P_{2n_0-1}z).
\end{aligned}$$

از این‌رو $P_3\dots P_{2n_0-1}z=z$. بنابراین

$$P_1P_3\dots P_{2n_0-1}z = P_1z,$$

و

$$P_1z = P_3\dots P_{2n_0-1}z = z\,.$$

پس $P_1z=z$. با ادامه این روش خواهیم داشت

$$Q_1z = P_1z = P_3z = \dots = P_{2n_0-1}z = z.$$

از این‌رو با توجه به قسمت (ج) ثابت کرده‌ایم

$$\begin{aligned}
Q_0z = Q_1z = P_1z = P_2z = \cdots\\
= P_{2n_0-1}z = P_{2n_0}z = z.
\end{aligned}$$

به عبارت دیگر z یک نقطه ثابت مشترک خود نگاشت‌های $Q_0\,, Q_1, P_1, P_2, \dots, P_{2n_0}$ است.

حالت دوم: فرض کنیم Q_0 پیوسته باشد. از طرفی طبق

$$lim_{n\to\infty}P'_1x_{2n} = lim_{n\to\infty}Q_0\,x_{2n} = z, \quad (5)$$

نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}Q_0P'_1x_{2n} = Q_0z$$

و

$$\lim_{n\to\infty}Q_0\,Q_0\,x_{2n} = Q_0z.$$

از آن‌جایی که $\{Q_0\,, P'_1\}$ سازگار است، داریم

$$\lim_{n\to\infty}(P'_1Q_0x_{2n}\,, Q_0P'_1x_{2n}) = 0.$$

بنابراین با استفاده از لم ۶.۱،

$$\lim_{n\to\infty}P'_1Q_0x_{2n} = Q_0z.$$

س: با فرض $d(Q_0z,z)\neq 0$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=Q_0x_{2n}$ و $v=x_{2n+1}$ و با

استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{1}{b^2}d(Q_0 z,z)$$
$$\le \frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{\varphi(b^2d(Q_0 z,Q_0 z)),$$
$$\varphi(b^2d(z,z)),\varphi(b^2d(Q_0 z,z)),$$
$$\varphi(\frac{b^2}{2}[d(z,Q_0 z)+d(Q_0 z,z)])\}$$
$$<\frac{1}{b^{2n_0+2}}\ (b^2d(Q_0 z,z))$$
$$=\frac{1}{b^{2n_0}}d(Q_0 z,z)\ .$$

در نتیجه $d(Q_0 z,z)=0$. پس $Q_0 z=z$. اینک مشابه مراحل (د)، (ر)، (ز) و با ادامه مرحله (ز) در حالت اول داریم:
$$Q_1 Z=P_1 z=P_3 z=\cdots=P_{2n_0-1}z=z.$$

ش: با توجه به شرط (۱) قضیه، چون $Q_1(X)\subseteq P_2P_4\dots P_{2n_0}(X)$، $z\in X$ وجود دارد به طوری که
$$Q_1 z\in Q_1(X)\subseteq P_2P_4\dots P_{2n_0}(X).$$

بنابراین $w\in X$ وجود دارد به طوری که
$$Q_1 z=P_2P_4\dots P_{2n_0}\ w=z.$$

با فرض $d(Q_0 w,z)\ne 0$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=w$ و $v=x_{2n+1}$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{1}{b^2}d(.Q_0 w,z)$$
$$\le \frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{\varphi(b^2d(z,Q_0 w)),$$
$$\varphi(b^2d(z,z)),\varphi(b^2d(z,z)),$$
$$\varphi(\frac{b^2}{2}[d(z,Q_0 w)+d(z,z)])\}$$
$$<\frac{1}{b^{2n_0+2}}\ (b^2d(Q_0 w,z))$$
$$=\frac{1}{b^{2n_0}}d(Q_0 w,z)\ .$$

در نتیجه $d(Q_0w,z)=0$. پس $Q_0 w=z$. از این‌رو داریم
$$Q_0 w=z=P_2P_4\dots P_{2n_0}\ w.$$

از آن‌جا که $(Q_0,P_2P_4\dots P_{2n_0})$ سازگار است، به طور ضعیف سازگار نیز است. بنابراین
$$Q_0 z=P_2P_4\dots P_{2n_0}\ z=z.$$

همانند مرحله (ج) می‌توان ثابت کرد که
$$P_2 z=P_4 z=\cdots=P_{2n_0}\ z=Q_0 z=z.$$

پس z، یک نقطه‌ی ثابت مشترک نگاشت‌های $Q_0,Q_1,P_1,P_2,\dots,P_{2n_0}$ است.

اثبات یکتایی: فرض کنیم که z' یک نقطه ثابت مشترک دیگر از نگاشت‌های $Q_0,Q_1,P_1,P_2,\dots,P_{2n_0}$ باشد، در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=z$ و $v=z'$ در این صورت:
$$d(Q_0 z,Q_1 z')$$
$$\le \frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{\varphi(d(P_1'z,Q_0 z)),$$
$$\varphi(d(P_2'z',Q_1 z'))\ ,\varphi(d(P_1'z,P_2'z')),$$
$$\varphi(\frac{1}{2}[d(P_2'z',Q_0 z)+d(P_1'z,Q_1 z')])\}.$$

بنابراین
$$d(z,z')$$
$$\le \frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{\varphi\big(d(z,z)\big),\varphi\big(d(z',z')\big),$$
$$\varphi\big(d(z,z')\big),\varphi(\frac{1}{2}[d(z',z)+d(z,z')])\}$$
$$=\frac{1}{b^{2n_0+2}}\varphi\big(d(z,z')\big)<\frac{1}{b^{2n_0+2}}d(z,z').$$

در نتیجه $d(z,z')<d(z,z')$ و این تناقض است.

بنابراین $d(z,z')=0$ در نتیجه $z=z'$. پس z یک نقطه ثابت منحصر به فرد از خودنگاشت‌های $Q_0,Q_1,P_1,P_2,\dots,P_{2n_0}$ است.

برای $n_0\in\mathbb{N}$ فرض کنیم $\mathcal{B}_b$ خانواده توابع کراندار مانند β از $[0,\infty)$ به $[0,\frac{1}{b^{2n_0+2}})$ باشد. با استفاده از $\mathcal{B}_b$ می‌توان به تعمیم دیگری از شرایط انقباض برای اثبات وجود نقطه‌ی ثابت مشترک منحصربفرد برای یک خانواده به تعداد زوج و دو خود نگاشت دیگر در فضای b-متریک کامل، بدون نیاز به پیوستگی b-متریک با $b>1$ می‌پردازیم.

واضح است که $\mathcal{B}_b\neq\emptyset$ کافی است تابع $\beta(t)=\frac{1}{b^{2n_0+2}}e^{-t}$ برای $t>0$ و برای $t=0$، $\beta(t)\in[0,\frac{1}{b^{2n_0+2}})$ در نظر گیریم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۴) قضیه ۱.۲ برقرار باشد و برای هر $u,v\in X$ و هر $n_0\in\mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$
\begin{aligned}
&d(Q_0u,Q_1v)\\
&\le \beta(d(Q_0u,Q_1v))max\{d(P_2P_4\dots P_{2n_0}u,Q_0u),\\
&d(P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v,Q_1v),\\
&d(P_2P_4\dots P_{2n_0}u,P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v),\\
&\frac{1}{2}[d(P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v,Q_0u)\\
&+d(P_2P_4\dots P_{2n_0}u,Q_1v)]\}.
\end{aligned}
$$

در این صورت $Q_0,Q_1,P_1,P_2,\dots,P_{2n_0}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

اثبات: با توجه به خاصیت $\beta(t)<\frac{1}{b^{2n_0+2}}$ مراحل اثبات به نحو مناسب مشابه اثبات قضیه ۱.۲ می‌باشد.

در زیر نشان می‌دهیم فرض $b>1$ در فضای b-متریک، کمک می‌کند تا بدون وجود خانواده ϕ و تبدیل نامساوی به صورت نامساوی اکید به نتیجه‌ای مشابه قضیه ۱.۲ برسیم.

نتیجه ۳.۲. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۴) قضیه ۱.۲ برقرار باشد و برای هر $u,v\in X$ و هر $n_0\in\mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$
\begin{aligned}
&d(Q_0u,Q_1v)\\
&<\frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{d(P_2P_4\dots P_{2n_0}u,Q_0u),\\
&d(P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v,Q_1v),\\
&d(P_2P_4\dots P_{2n_0}u,P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v),\\
&\frac{1}{2}[d(P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v,Q_0u)\\
&+d(P_2P_4\dots P_{2n_0}u,Q_1v)]\}.
\end{aligned}
$$

در این صورت $Q_0,Q_1,P_1,P_2,\dots,P_{2n_0}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

نتیجه ۴.۲. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۴) قضیه ۱.۲ برقرار باشد و برای هر $0<t<1$ و هر $u,v\in X$ و هر $n_0\in\mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$
\begin{aligned}
&d(Q_0u,Q_1v)\\
&<\frac{t}{b^{2n_0+2}}max\{d(P_2P_4\dots P_{2n_0}u,Q_0u),\\
&d(P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v,Q_1v),\\
&d(P_2P_4\dots P_{2n_0}u,P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v),\\
&\frac{1}{2}[d(P_1P_3\dots P_{2n_0-1}v,Q_0u)\\
&+d(P_2P_4\dots P_{2n_0}u,Q_1v)]\}.
\end{aligned}
$$

در این صورت $Q_0,Q_1,P_1,P_2,\dots,P_{2n_0}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای b-متریک کامل با $b>1$ بوده و J یک مجموعه اندیس‌گذاری دلخواه باشد. اگر $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ و $\{P_i\}_{i=1}^{2n_0}$ دو خانواده از خودنگاشت‌ها روی X باشند، که در شرایط زیر صدق کنند:

۱. برای هر $\alpha\in J$، $T_\alpha(X)\subseteq P_2P_4\dots P_{2n_0}(X)$.

۲. $\beta\in J$ وجود داشته باشد به طوری که $T_\beta(X)\subseteq P_1P_3\dots P_{2n_0-1}(X)$.

۳. روابط زیر برقرار باشند:

$$P_2(P_4 \dots P_{2n_0}) = (P_4 \dots P_{2n_0})P_2;$$
$$P_2P_4(P_6 \dots P_{2n_0}) = (P_6 \dots P_{2n_0})P_2P_4;$$
$$\vdots$$
$$P_2P_4 \dots P_{2n_0-2}\left(P_{2n_0}\right) = (P_{2n_0})P_2P_4 \dots P_{2n_0-2};$$
$$T_\beta(P_4 \dots P_{2n_0}) = (P_4 \dots P_{2n_0})T_\beta;$$
$$T_\beta(P_6 \dots P_{2n_0}) = (P_6 \dots P_{2n_0})T_\beta;$$
$$\vdots$$
$$T_\beta P_{2n_0} = P_{2n_0} T_\beta;$$
$$P_1(P_3 \dots P_{2n_0-1}) = (P_3 \dots P_{2n_0-1})P_1;$$
$$P_1P_3(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})P_1P_3;$$
$$\vdots$$
$$P_1P_3 \dots P_{2n_0-3}\left(P_{2n_0-1}\right) = (P_{2n_0-1})P_1P_3 \dots P_{2n_0-3}$$
$$T_\alpha(P_3 \dots P_{2n_0-1}) = (P_3 \dots P_{2n_0-1})T_\alpha;$$
$$T_\alpha(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})T_\alpha;$$
$$\vdots$$
$$T_\alpha(P_{2n_0-1}) = (P_{2n_0-1})T_\alpha.$$

۴. $P_2P_4 \dots P_{2n_0}$ یا T_β پیوسته باشند.

۵. زوج $(T_\beta, P_2 \dots P_{2n_0})$ سازگار و زوج‌های $(T_\alpha, P_1 \dots P_{2n_0-1})$ برای هر $\alpha \in j$، به طور ضعیف سازگار باشد.

۶. $\varphi \in \phi$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که به ازای $n_0 \in \mathbb{N}$ و هر $u, v \in X$

$$\begin{aligned} &d\left(T_\beta u, T_\alpha v\right) \\ &\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, T_\beta u)), \\ &\varphi(d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v, T_\alpha v)), \\ &\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v)), \\ &\varphi(\frac{1}{2}[d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v, T_\beta u) \\ &+d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, T_\alpha v)])\}. \end{aligned}$$

در این صورت P_iها برای هر $i = 1, \dots, 2n_0$ و T_αها برای هر $\alpha \in J$، یک نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

اثبات: فرض کنید T_{α_0} یک عنصر ثابت در $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ باشد. در قضیه ۱.۲ قرار می‌دهیم برای یک $\beta \in J$ با شرط (۲) قضیه $Q_0 = T_\beta$ و $Q_1 = T_{\alpha_0}$.
آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که یک $z \in X$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$\begin{aligned} &T_\beta z = T_{\alpha_0} z = P_2P_4 \dots P_{2n_0} z \\ &= P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z = z. \end{aligned}$$

فرض کنیم $\alpha \in J$ دلخواه باشد. در این صورت بنا به شرط (۶) قضیه داریم

$$\begin{aligned} &d\left(T_\beta z, T_\alpha z\right) \\ &\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} z, T_\beta z)), \\ &\varphi(d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z, T_\alpha z)), \\ &\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} z, P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z)), \\ &\varphi(\frac{1}{2}[d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z, T_\beta z) \\ &+d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} z, T_\alpha z)])\}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &d(z, T_\alpha z) \\ &\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi\left(d(z,z)\right), \varphi(d(z, T_\alpha z)), \\ &\varphi\left(d(z,z)\right), \varphi(\frac{1}{2}[d(z,z) + d(z, T_\alpha z)])\} \\ &< \frac{1}{b^{2n_0+2}} d(z, T_\alpha z). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(z, T_\alpha z) < d(z, T_\alpha z)$$

و این تناقض است. پس $d(z, T_\alpha z) = 0$. بنابراین به ازای هر $\alpha \in J$، $T_\alpha z = z$. با توجه به شرط (۶) قضیه، P_i ها و T_α ها یک نقطه ثابت مشترک منحصر بفرد در X دارند.

فهرست منابع

[1] Bourbaki, N. Topologic Generale; Herman: Paris, France, (1974).

[2] Bakhtin, I. A., The contraction mapping principle in almost metric spaces, Funct. Anal. 30, (1989), 26–37.

[3] Czerwik, S., Nonlinear set-valued contraction mappings in b−metric spaces, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46(2), (1998), 263–276.

[4] Hussain, N. and Shah, M. H. KKM mappings in cone b−metric spaces, *Comput. Math. Appl.*, 62, (2011), 1677–1684.

[5] Aghajani, A., Abbas, M. and Roshan, J. R., Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces, *Mathematica Slovaca*, 64(4),(2014), 941–960.

[6] Akkouchi, M., Common fixed point theorems for two selfmappings of a b-metric space under an implicit relation, *Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B: Mathematics and Statistics,* 40(6), (2011), 805-810.

[7] Aydi, H., Bota, M., Karapmar, E., and Mitrović, S., A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b-metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications,* (2012): 88: 2012.

[8] Aydi, H., Bota, M., Karapmar, E., Moradi, S., A common fixed point for weak ∅-contractions on b-metric spaces, *Fixed Point Theory,* 13(2), (2012), 337-346.

[9] Boriceanu, M., Strict fixed point theorems for multivalued operators in b−metric spaces, *International Journal of Modern Mathematics*, 4(3), (2009), 285–301.

[10] Boriceanu, M., Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b−metrics, *Studia Univ. "Babes–Bolyai", Mathematica*, Volume LIV, 3, (2009).

[11] Boriceanu, M., Bota, M. and Petrusel, A., Multivalued fractals in b−metric spaces, *Cent. Eur. J. Math*, 8 (2), (2010), 367-377.

[12] Czerwik, S, Dlutek, K. Singh, S. L., Round-off stability of iteration procedures for set-valued operators in b−metric Spaces, *J Nature Phys Sci*., 11, (2007), 87–94.

[13] Hussain, N. Dori´c, D. Kadelburg, Z. and Radenovi´c, S. Suzuki-type fixed point results in metric type spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, (2012).

[14] Ciric, L., Razani, A. Radenovic, S. Ume, J. S., Common fixed point theorems for families of weakly compatible maps, *Comput. Math. Appl.*, 55, (2008), 2533-2543.