

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM  
JOURNAL OF  
NUMERICAL  
RESEARCH IN  
MATHEMATICS

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# حل عددی مسائل اشتورم-لیوویل با توابع کاردینال چیشف

محمد شهریاری<sup>۱\*</sup>، بهزاد نعمتی سرای<sup>۲</sup>، فیروز پاشائی<sup>۳</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

<sup>(۲)</sup> دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان، کدپستی ۴۵۱۳۷-۶۶۷۳۱ ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۰/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۷/۰۲

## چکیده

در این مقاله، هدف اصلی ارائه‌ی یک روش عددی نوین برای تقریب مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی در حل مسأله‌ی اشتورم-لیوویل منظم است. به عنوان یک هدف راهبردی، ساختار توابع کاردینال چیشف مبتنی بر چندجمله‌ای‌های چیشف نوع اول بیان و بررسی می‌شود. شیوه‌ی محوری کار، تقلیل مسأله‌ی اشتورم-لیوویل به یک دستگاه معادلات جبری است که نیازمند به کارگیری ماتریس عملیاتی مشتق خواهد بود. حل دستگاه معادلات جبری منجر به تقریب عددی مقادیر ویژه و توابع ویژه مسأله اصلی می‌گردد. ارائه‌ی مثال‌های عددی عملکرد روش و اهمیت آن را نمایان‌تر می‌سازد.

**واژه‌های کلیدی:** مسأله اشتورم-لیوویل، چندجمله‌ای چیشف، تابع کاردینال چیشف، ماتریس عملیاتی مشتق.

## ۱. مقدمه

مسئله اشتورم-لیوویل نقش بسزایی در ریاضیات، فیزیک، شاخه‌های دیگر علوم پایه و بویژه در علوم مهندسی ایفاء می‌کند [۱۸]. مطالعه اغلب پدیده‌های فیزیکی نظیر ارتعاش نخ، برهم‌کنش ذرات اتمی، نوسانات آزاد کره‌ی زمین نیازمند حل مسئله اشتورم-لیوویل است [۱]. صورت کلی معادله اشتورم-لیوویل به شکل

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x)y \quad (1)$$

با شرایط مرزی جدا بصورت

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0, \\ y'(b) + Hy(b) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

است، که در آن  $h, H \in \mathbb{R}$  ضرایب حقیقی و  $p(x), q(x)$  توابع حقیقی و پیوسته هستند و برای هر  $x \in [a, b]$  داریم:  $p(x) > 0$  و  $w(x) > 0$ . در حالت تعمیم یافته، اگر  $h = \infty$  یا  $H = \infty$ ، آنگاه به ترتیب شرط  $y(a) = 0$  یا  $y(b) = 0$  اعمال می‌گردد. ضریب  $\lambda \in \mathbb{C}$  پارامتر طیفی نامیده می‌شود. بدون ایجاد خللی در کلیت مسئله، در شرایط مرزی (۲)، حالت  $a = 0$  و  $b = 1$  را در نظر می‌گیریم. با به کارگیری تبدیل لیوویل [۲]، مسئله اشتورم-لیوویل (۱) - (۲) به معادله دیفرانسیل

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (3)$$

با شرایط مرزی

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0, \\ y'(1) + Hy(1) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

تبدیل می‌شود. جواب‌های مسئله اشتورم-لیوویل شامل محاسبه مقادیر ویژه و توابع ویژه متناظر آنها است. با توجه به قضیه [۱۸]، یک دنباله نامتناهی از مقادیر ویژه  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

وجود دارد به طوری که تابع ویژه متناظر با  $\lambda_k$  که به صورت  $y_k(x) = y(x, \lambda_k)$  تعریف می‌شود، دارای دقیقاً  $k - 1$  صفر در بازه  $(0, 1)$  است و تمامی توابع ویژه متناظر به مقادیر ویژه، متمایز و متعامد هستند [۳].

در اکثر موارد، تعیین جواب‌ها و مقادیر ویژه دقیق مسئله اشتورم-لیوویل مشکل و گاهی غیرممکن است. لذا، برای تعیین آن‌ها چندین روش تقریبی مختلف ارائه و بررسی شده است. روش تفاضل متناهی تصحیح شده برای مسئله اشتورم-لیوویل متناوب یک نمونه است که در مرجع [۴] آمده است. روسو و همکاران مسئله اشتورم-لیوویل متناوب را با دو معادله ریکاتی با ضرایب ثابت حل کردند [۵]. در سال ۲۰۰۸ م. بوجورک و همکاران [۱] و در سال ۲۰۱۲ م. جوکار و همکاران [۶] مسئله اشتورم لیوویل منظم را به ترتیب با به کارگیری موجک هار و موجک مثلثاتی حل کردند. البته، پیش از این‌ها، یوسل [۷] یک روش مرتبه چهارم برای تقریب مقادیر ویژه مسئله اشتورم-لیوویل متناوب معرفی کرد. در این مقاله مسئله اشتورم-لیوویل منظم (۳) با شرایط مرزی (۴) را در نظر می‌گیریم. به کمک توابع کاردینال چبیشف و با به کارگیری ماتریس عملیاتی مشتق، مقادیر ویژه مسئله (۳)-(۴) را به دست می‌آوریم. برای مطالعه‌ی بیشتر مسائل اشتورم-لیوویل به [۸-۱۴] مراجعه کنید. طرح کلی مطالب این مقاله به صورت زیر است:

در بخش ۲، توابع کاردینال چبیشف در بازه  $[0, 1]$  را توصیف می‌کنیم، از این توابع برای ایجاد ماتریس عملیاتی مشتق استفاده می‌کنیم. در بخش ۳، یک روش پیشنهادی برای تقریب جواب از مسئله (۳) و (۴) را به کار می‌بریم. در نتیجه، مسئله مقدار ویژه به یک مقدار ویژه جبری ماتریسی تبدیل می‌شود که با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس تولید شده، تقریبی از مقادیر ویژه مسئله (۳)-(۴) به دست می‌آید. در نهایت در بخش ۴، نتایج عددی را گزارش می‌دهیم و دقت و کارایی روش عددی پیشنهاد شده را با ارائه‌ی مثال‌های عددی نشان می‌دهیم.

## ۲. توابع کاردینال چبیشف

۲-۱- توابع کاردینال چبیشف. فرض کنید  $P_{n+1}(t)$  تابع چبیشف نوع اول از مرتبه  $n + 1$  باشد. این توابع در بازه  $[-1, 1]$  به صورت

$$P_{n+1}(t) = \cos((n+1) \arccos(t)), \quad (5)$$

**۲-۲- ماتریس عملیاتی مشتق.** با مشتق‌گیری از

تابع برداری  $\Phi_n(x)$  معرفی شده در (۸) می‌توان به رابطه

$$\Phi'_n(x) = D\Phi_n(x) \quad (۹)$$

رسید که  $D$  ماتریس عملیاتی مشتق برای توابع کاردینال چیشف (۶) بوده و توسط فرآیند زیر به دست می‌آید [۱۶]. فرض کنید  $\Phi'_n(x)$  تابعی برداری باشد که از مشتق‌گیری اعضای تابع برداری  $\Phi_n(x)$  به دست آمده است، داریم

$$\Phi'_n(x) = [C'_1(x), \dots, C'_{n+1}(x)]^T. \quad (۱۰)$$

تمام اعضای این بردار توابعی با محل  $[0, 1]$  هستند و لذا می‌توان این توابع را به کمک توابع کاردینال چیشف با به کارگیری معادله (۷)، به صورت

$$C'_j(x) = \sum_{i=1}^{n+1} C'_j(x_i) C_i(x). \quad (۱۱)$$

تقریب زد. با مقایسه (۹) و (۱۱)، ماتریس عملیاتی مشتق به صورت

$$D = \begin{bmatrix} C'_1(x_1) & \dots & C'_1(x_{n+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C'_{n+1}(x_1) & \dots & C'_{n+1}(x_{n+1}) \end{bmatrix}_{(n+1)(n+1)}$$

به دست می‌آید.

**۳. توصیف روش عددی**

در این قسمت مسأله اشتورم-لیوویل (۳) و (۴) را با به کارگیری توابع کاردینال چیشف حل می‌کنیم. برای این هدف ابتدا فرض می‌کنیم تابع مجهول  $u(x)$  بر حسب

توابع کاردینال چیشف به صورت

$$u(x) = U^T \Phi_n(x). \quad (۱۲)$$

تقریب زده شده است که  $U$  یک ماتریس مجهول  $(n+1) \times (n+1)$  بوده و هدف تعیین مقادیر درایه‌های آن است. با مشتق‌گیری از طرفین (۱۲) و به کارگیری ماتریس عملیاتی مشتق، رابطه

$$u'(x) = U^T_n(x) = U^T D\Phi_n(x), \quad (۱۳)$$

تعریف می‌شوند که تشکیل یک سیستم متعامد از توابع چندجمله‌ای با تابع وزن  $(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$  می‌دهند. توابع کاردینال چیشف مرتبه  $n$  با به کارگیری این سیستم از توابع متعامد به صورت زیر معرفی می‌شوند،

$$C_j(t) = \frac{P_{n+1}(t)}{P'_{n+1}(t)(t-t_j)}, \quad j = 1, \dots, n+1, \quad (۶)$$

که در آن  $t_j$ ها صفرهای چندجمله‌ای چیشف  $P_{n+1}(t)$  بوده و به آسانی با استفاده از فرمول  $t_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2(n+1)}$  قابل محاسبه هستند [۱۵]. باید توجه کرد که برای تقریب یک تابع با به کارگیری چندجمله‌ای‌های چیشف، لازم است ضرایب فوریه آن محاسبه شود. برای این کار باید از ضرب داخلی استفاده کرد که مستلزم انتگرال‌گیری به تعداد جملات بسط بر حسب چندجمله‌ای‌های چیشف است. این کار هزینه محاسبات را تا حدی بالا می‌برد. برای بسط تابع دلخواه بر حسب توابع کاردینال چیشف دیگر نیازی به چنین انتگرال‌هایی نداریم و همین امر باعث کاهش محاسبات و در نتیجه افزایش در سرعت محاسبات می‌شود. همچنین باید به این نکته اشاره کرد که این توابع همانند چندجمله‌ای‌های چیشف قابل انتقال به بازه دلخواه هستند. هر تابع  $f(x)$  در بازه  $[0, 1]$  به صورت

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x_j) C_j(x) = F^T \Phi_n(x) \quad (۷)$$

تقریب زده می‌شود که در این معادله بردار ضرایب فوریه  $F$  و تابع برداری  $\Phi_n$  به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$F^T = [f(x_1), \dots, f(x_{n+1})], \quad (۸)$$

$$\Phi_n(x) = [C_1(x), \dots, C_{n+1}(x)]^T.$$

لازم به ذکر است که توابع کاردینال چیشف را می‌توان به بازه دلخواه انتقال داد. با توجه به محل تابع  $f$  که در بازه  $[0, 1]$  قرار گرفته از تغییر متغیر  $x = \frac{t+1}{2}$  برای انتقال پایه‌ها از بازه  $[-1, 1]$  به  $[0, 1]$ ، استفاده می‌کنیم. با استفاده از این تغییر متغیر نقاط  $x$  انتقال یافته نقاط  $t_j$  در  $[0, 1]$  هستند.

در سیستم نهایی مستقل از هم هستند. لذا سیستمی که حل می‌شود دارای جواب منحصر به فرد خواهد بود.

#### ۴. مثال‌های عددی

در این بخش، چند مثال عددی از مسأله اشتورم-لیوویل را ارائه می‌دهیم. به جز مثال ۱، که دارای مقادیر ویژه دقیق است، در بقیه مثال‌ها، برای محاسبه مقادیر ویژه دقیق از بسته نرم‌افزاری MATSLISE2، که برای مسائل اشتورم-لیوویل نوشته شده، استفاده می‌کنیم [۱۷]. البته باید توجه کرد که نرم‌افزار حاضر نیز تقریبی از مقادیر ویژه با دقت مناسب را ارائه می‌دهد. تمامی مثال‌های ارائه شده با نرم‌افزار Maple حل شده است.

**مثال ۱.** در این مثال به دنبال یافتن مقادیر ویژه مسأله اشتورم-لیوویل (۳) با تابع پتانسیل  $q(x) = 0$  و با شرایط مرزی دیریکله هستیم. برای این مسأله مقدار دقیق مقادیر ویژه برابر  $\lambda_k = (k\pi)^2$  است. مقادیر ویژه تقریبی و خطای مطلق به دست آمده از روش ارائه شده، در جدول ۱ گزارش شده است.

**مثال ۲.** مقادیر ویژه و توابع ویژه مسأله اشتورم لیوویل (۳) با تابع پتانسیل  $q(x) = e^x$  و با شرایط مرزی  $y'(0) - y(0) = 0, y(1) = 0$

را به دست می‌آوریم. مقادیر ویژه دقیق [۱۷]، مقادیر ویژه تقریبی و خطای مطلق در جدول ۲ ارائه شده است. همچنین شکل ۱ توابع ویژه  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$  و  $y_4(x)$  با  $n = 12$  را نشان می‌دهد.

را به دست می‌آوریم. با مشتق‌گیری دوباره از طرفین رابطه (۱۳) داریم:

$$u''(x) = U^T D^2 \Phi_n(x). \quad (14)$$

به دست می‌آید. به طور مشابه تابع  $q(x)$  را برای به کارگیری جملات توابع کاردینال چیشف به صورت

$$q(x) = Q^T \Phi_n(x) \quad (15)$$

بسط می‌دهیم، به طوری که  $Q$  یک ماتریس  $(n+1) \times (n+1)$  خواهد بود. با جایگذاری معادلات (۱۲)، (۱۴) و (۱۵) در (۱۳) رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$-U^T D^2 \Phi_n(x) + Q^T \Phi_n(x) U^T \Phi_n(x) = \lambda U^T \Phi_n(x) \quad (16)$$

حال با به کارگیری روش هم محلی با نقاط هم محلی  $x_j$  برای  $j = 2, 3, \dots, n+1$  یک سیستم  $n-2$  معادله با  $n+1$  مجهول به دست می‌آوریم. با به کارگیری شرایط مرزی (۴) به شکل تغییر یافته زیر

$$\begin{aligned} U^T \Phi_n(0) - h U^T D \Phi_n(0) &= 0, \\ U^T \Phi_n(1) + H U^T D \Phi_n(1) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

یک دستگاه معادله همگن با  $n$  معادله و  $n+1$  مجهول به صورت (۱۶) و (۱۷) به دست می‌آید. با بازنویسی یکی از مجهولات به وسیله مجهولات دیگر نتایج عددی را به دست می‌آوریم. با توجه به استفاده از ریشه‌های توابع چیشف به عنوان نقاط هم مکانی معادلات به دست آمده

جدول ۱: جواب‌های تقریبی و محاسبه خطا برای مثال ۱ با  $n = 12$  و  $n = 20$

k	$\Lambda_k^{12}$	$ \Lambda_k^{12} - \lambda_k $	$\Lambda_k^{20}$	$ \Lambda_k^{20} - \lambda_k $
1	9.869604395563	5.5264E-09	9.8696044010806	8.80007E-12
2	39.4784062566	1.13478E-05	39.478417604353	4.40536E-12
3	88.83202365	0.00558404	88.8264396085	1.30511E-09
4	158.01962291	0.105952493	157.91367026	1.57429E-07
5	245.3075	1.432610027	246.7400743	3.57272E-05
Time	2.876411	-	9.213187	-

جدول ۲: جواب‌های تقریبی و محاسبه خطا برای مثال ۲ با  $n = 12$  و  $n = 16$ 

k	$\lambda_k[17]$	$\Lambda_k^{12}$	$ \Lambda_k^{12} - \lambda_k $	$\Lambda_k^{16}$	$ \Lambda_k^{16} - \lambda_k $
1	5.543117477409	5.5431174763	1.1093E-09	5.54311747742853	1.923E-11
2	25.79584848098	25.79587333	2.4849E-05	25.7958481261574	3.54823E-07
3	65.35307024756	65.3615332916	0.008463044	65.3528136100302	0.000256638
4	124.5946962679	124.5261333096	0.068562958	124.601387291074	0.006691023
5	203.5617396971	199.2622085888	4.299531108	204.079805843166	0.518066146
Time	-	6.261217	-	14.367124	-

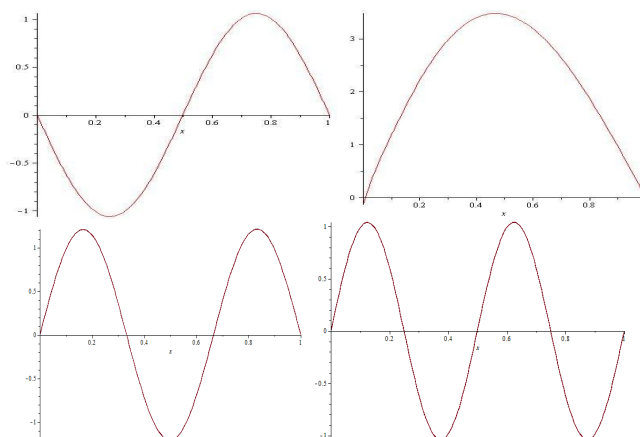
مثال ۳. مسئله اشتورم لیوویل (۳) با تابع پتانسیل  $q(x) = x$  و با شرایط مرزی  $y'(0) - y(0) = 0$ ,  $y'(1) + y(1) = 0$

مثال ۳. مسئله اشتورم لیوویل (۳) با تابع پتانسیل  $q(x) = \sin(x)$  و با شرایط مرزی  $y(0) = 0$ ,  $y(5) = 0$

را به دست می‌آوریم. مقادیر ویژه دقیق [۱۷]، مقادیر ویژه تقریبی و خطای مطلق در جدول ۴ ارائه شده است.

را در نظر بگیرید. مقادیر ویژه دقیق [۱۷]، مقادیر ویژه تقریبی و خطای مطلق در جدول ۳ ارائه شده است.

مثال ۴. برای آخرین مثال، مقادیر ویژه مسئله اشتورم

شکل ۱. توابع ویژه  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  و  $y_4(x)$  با  $N = 12$ جدول ۳: جواب‌های تقریبی و محاسبه خطا برای مثال ۳ با  $n = 12$  و  $n = 16$ 

k	$\lambda_k[17]$	$\Lambda_k^{12}$	$ \Lambda_k^{12} - \lambda_k $	$\Lambda_k^{16}$	$ \Lambda_k^{16} - \lambda_k $
1	0.50632034187	0.50630302678	1.73151E-05	0.50631974395	5.97918E-07
2	1.90152325935	1.90153558297	1.23236E-05	1.90152179979	1.45957E-06
3	3.74195402588	3.74065560245	0.001298423	3.74194828035	5.74553E-06
4	6.48631428802	6.48127660778	0.00503768	6.48623464752	7.96405E-05
5	10.0296711016	9.9793164540	0.050354648	10.0300799113	0.00040881
Time	-	8.689125	-	18.338712	-

جدول ۴: جواب‌های تقریبی و محاسبه خطا برای مثال ۴ با  $n = 12$  و  $n = 16$ 

k	$\lambda_k[17]$	$\Lambda_k^{12}$	$ \Lambda_k^{12} - \lambda_k $	$\Lambda_k^{16}$	$ \Lambda_k^{16} - \lambda_k $
1	2.20087016085657	2.20087016100	1.4343E-10	2.20087016085657	0
2	13.9967404040974	13.996740153	2.51097E-07	13.9967404040944	3.00027E-12
3	43.8580631711174	43.859853991	0.00179082	43.8580637459436	5.74826E-07
4	93.2696579189639	93.333854673	0.064196754	93.2697298261245	7.19072E-05
5	162.381013179600	160.05623251	2.32478067	162.367219665623	0.013793514
Time	-	3.122473	-	7.752141	-

### ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک تکنیک عددی برای محاسبه مقادیر ویژه و توابع ویژه مسأله اشتورم-لیوویل منظم ارائه شد. از توابع کاردینال چبیشف برای تقریب مقادیر ویژه و توابع ویژه مسأله اشتورم-لیوویل استفاده شد. مسأله با به کارگیری ماتریس عملیاتی مشتق، به مجموعه‌ای از معادلات جبری تبدیل شده و با حل معادلات جبری، مقادیر ویژه و توابع ویژه مسأله محاسبه شدند. در نهایت مثال‌های عددی برای اعتبار و کاربرد تکنیک در جدول‌های ۱-۴ ارائه شد.

*index Sturm–Liouville eigenvalues for problems in physics*. Computer Physics Communications, 2009. **180** (2): p. 241-250.

10. El-Daou, M.K. and N.R. Al-Matar, *An improved Tau method for a class of Sturm–Liouville problems*. Applied Mathematics and Computation, 2010. **216** (7): p. 1923-1937.

11. Altıntan, D. and Ö. Uğur, *Variational iteration method for Sturm–Liouville differential equations*. Computers & Mathematics with Applications, 2009. **58** (2): p. 322-328.

12. El-Gamel, M., *Numerical comparison of sinc-collocation and Chebychev-collocation methods for determining the eigenvalues of Sturm–Liouville problems with parameter-dependent boundary conditions*. SeMA Journal, 2014. **66** (1): p. 29-42.

13. Lakestani, M. and B.N. Saray, *Numerical solution of telegraph equation using interpolating scaling functions*. Computers & Mathematics with Applications, 2010. **60** (7): p. 1964-1972.

14. Chen, L. and H.-P. Ma, *Approximate solution of the Sturm–Liouville problems with Legendre–Galerkin–Chebyshev collocation method*. Applied Mathematics and Computation, 2008. **206** (2): p. 748-754.

15. Dehghan, M. and M. Lakestani, *The use of Chebyshev cardinal functions for solution of the second-order one-dimensional telegraph equation*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2009. **25** (4): p. 931-938.

16. Lakestani, M. and M. Dehghan, *Numerical solution of Riccati equation using the cubic B-spline scaling functions*

## فهرست منابع

1. Bujurke, N., C. Salimath, and S. Shiralashetti, *Computation of eigenvalues and solutions of regular Sturm–Liouville problems using Haar wavelets*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008. **219** (1): p. 90-101.

2. Hille, E., *Lectures on ordinary differential equations*. 1969.

3. Freiling, G. and V.A. Yurko, *Inverse Sturm–Liouville problems and their applications*. 2001: NOVA Science Publishers New York.

4. Condon, D., *Corrected finite difference eigenvalues of periodic Sturm–Liouville problems*. Applied numerical mathematics, 1999. **30** (4): p. 393-401.

5. Khmelnytskaya, K., H. Rosu, and A. González, *Periodic Sturm–Liouville problems related to two Riccati equations of constant coefficients*. Annals of Physics, 2010. **325** (3): p. 596-606.

6. Jokar, M., M. Lakestani, and M. Shahriari, *Computation of half-eigenvalues periodic sturm-liouville problem using trigonometric wavelets*. International Journal of Nonlinear Science, 2012. **13** (4): p. 495-504.

7. Yücel, U., *Approximate Eigenvalues of Periodic Sturm–Liouville Problems Using Differential Quadrature Method*. Applied Mathematical Sciences, 2007. **1** (25): p. 1217-1229.

8. Ghelardoni, P., G. Gheri, and M. Marletta, *Spectral corrections for Sturm–Liouville problems*. Journal of computational and applied mathematics, 2001. **132** (2): p. 443-459.

9. Ledoux, V., M. Van Daele, and G.V. Berghe, *Efficient computation of high*

---

*and Chebyshev cardinal functions.* Computer Physics Communications, 2010. **181** (5): p. 957-966.

17. Trif, D., *Matlab package for the Schrödinger equation.* Journal of Mathematical Chemistry, 2008. **43** (3): p. 1163-1176.

18. Miller, K. R., *Introduction to Differential Equations.* 1991: Prentice Hall.