دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

گراف جمع زیرمدول‌های غیراساسی

سعید رجائی *

استادیار گروه ریاضی (جبر)، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۴/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۹/۲۰

چکیده

در این مقاله، گراف $\Omega(M)$ از مدول M با مجموعه رئوس شامل همه‌ی زیرمدول‌های نابدیهی غیراساسی از مدول M معرفی شده است. دو زیرمدول متمایز N و K از M مجاورند درصورتی‌که $N+K$ غیراساسی باشد یا $N+K=M$. سپس اثر متقابل بین خواص نظریه‌ی گراف از $\Omega(M)$ و خواص جبری از M بررسی شده است. در ادامه تعمیم $\Omega(M)$ به گراف $\Omega_T(M)$ برای زیرمدول سره‌ی T از M بیان شده و به طور دوگان، گراف $\Lambda(M)$ از مدول M معرفی شده است، که گراف با مجموعه‌ی رئوس همه زیرمدول‌های نابدیهی غیرناچیز از مدول M است. دو راس متمایز N و K از گراف $\Lambda(M)$ مجاورند اگر و فقط اگر $N\cap K$ زیرمدول غیرناچیز M باشد یا این‌که $N\cap K=0$.

واژه‌های کلیدی: گراف کامل، زیرمدول اساسی، زیرمدول ناچیز، رادیکال و قلب مدول، مدول هم‌ضربی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: saeed_rajaee@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

در این مقاله همه‌ی حلقه‌ها جابه‌جایی با عضو همانی و همه‌ی مدول‌ها یکانی هستند. مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های $R-$ مدول M را با نماد $L(M)$ و مجموعه تمام زیرمدول‌های کمین M را با $Min(M)$ نشان می‌دهیم. $R-$مدول M را **صادق** می‌نامیم، هرگاه $Ann_R(M)=\circ$. یک زیرمدول N از M زیرمدول **ناچیز** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول L از M از تساوی $N+L=M$، نتیجه شود که $L=M$ و با نماد $N\ll M$ نشان می‌دهیم. به‌طور مشابه، ایده‌آل I از R یک ایده‌آل ناچیز است، هرگاه به عنوان یک زیرمدول از R ناچیز باشد. مجموعه‌ی هم زیرمدول‌های ناچیز از مدول M را با $\mathcal{S}(M)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $\circ\in\mathcal{S}(M)$ و $M\notin\mathcal{S}(M)$. زیرمدول غیرصفر N از M **اساسی** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول غیرصفر L از M داشته باشیم، $N\cap L\neq\circ$ و با نماد $N\leq_e M$ نشان می‌دهیم. مجموعه همه زیرمدول‌های اساسی از مدول M را با $\mathcal{E}(M)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $\circ\notin\mathcal{E}(M)$ و $M\in\mathcal{E}(M)$.

مدول M را **یکنواخت** می‌نامیم، هرگاه هر زیرمدول غیرصفر آن اساسی باشد، مراجع [۴]، [۱۴] را ببینید. به طور دوگان، مدول M را **تحویل‌ناپذیر-جمعی (خالی)** می‌نامیم، هرگاه نتوانیم M را به‌صورت جمع دو زیرمدول غیرصفر سره‌اش بنویسیم (هر زیرمدول سرهٔ آن ناچیز باشد. به‌طور معادل، برای زیرمدول‌های N_1,N_2 از M تساوی $N_1+N_2=M$ نتیجه بدهد که $N_1=M$ یا $N_2=M$).

مدول M یک $\boldsymbol{CS}$ - **مدول** نامیده می‌شود، هرگاه هر زیرمدول آن اساسی در یک جمعوندمستقیم از M باشد. بنابر ([۲۲]، قضیه ۱. ۸) مدول M شرط Acc روی زیرمدول‌های غیراساسی را برآورده می‌کند اگر و تنها اگر هر زیرمدول غیراساسی از M نوتری باشد اگر و تنها اگر هر زیرمدول غیراساسی از M متناهی مولد باشد. جمع همهٔ زیرمدول‌های کمین R -مدول M را با $Soc(M)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$Soc(M)=\sum_{L\in Min(M)}L=\bigcap_{E\in\mathcal{E}(M)}E,$$

بزرگ‌ترین زیرمدول M است که مشمول در هر زیرمدول اساسی از M است. اگر M آرتینی باشد، آنگاه $Soc(M)\leq_e M$. مدول M **نیم‌ساده** است اگر و تنها اگر $Soc(M)=M$. بنابر ([۴]، نتیجه ۹. ۱۰)، $Soc(M)\leq_e M$ اگر و تنها اگر هر زیرمدول غیرصفر از M شامل یک زیرمدول کمین از M باشد.

به‌طور دوگان، **رادیکال جاکبسون** از یک مدول M زیرمدول زیر است

$$Rad(M)=\Sigma_{L\in\mathcal{S}(M)}L=\cap_{m\in Max(M)}m.$$

درصورتی‌که M نوتری باشد، آنگاه

$$Rad(M)\in\mathcal{S}(M).$$

بنابر ([۴]، گزاره ۹. ۱۶)، اگر M نیم‌ساده باشد، آنگاه

$$Rad(M)=\circ.$$

رادیکال جاکبسون حلقه R به عنوان یک $R-$مدول را با $J(R)$ نشان می‌دهیم.

مدول M **یک‌ردیفی** نامیده می‌شود، هرگاه مجموعه $L(M)$ یک مجموعه مرتب خطی توسط نگاشت شمول باشد، یعنی، برای هر دو زیرمدول N_1 و N_2 از M، $N_1\subseteq N_2$ یا $N_2\subseteq N_1$. هم‌چنین $R-$مدول M **ردیفی** نامیده می‌شود، درصورتی‌که یک جمع‌مستقیم از مدول‌های یک‌ردیفی باشد، یعنی , $M=\oplus_{i\in A}M_i$. به طوری که برای هر $i\in A$، M_i مدول یک‌ردیفی است. به عنوان مثال، حلقه‌ی خارج‌قسمتی $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ برای هر عدد صحیح n یک حلقه ردیفی است و اگر n توانی از عددی اول باشد، آنگاه $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ یک‌ردیفی است. جهت مطالعه بیشتر در مورد مطالب پایه‌ای می‌توان به [۲، ۴، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶] مراجعه نمود.

یک گراف G به عنوان یک زوج $(V(G),E(G))$ تعریف شده است که در آن $V(G)$ مجموعه رئوس G و $E(G)$ مجموعه از یال‌های G می‌باشد. برای دو راس مجزای a و b در گراف G درصورتی‌که آن‌ها مجاور یکدیگر باشند می‌نویسیم $a-b$.

گرافی که مجموعه رئوس آن تهی باشد را **گراف پوچ** و گرافی که مجموعه یال‌های آن تهی باشد را **گراف تهی** می‌نامیم.

درجه راس a از یک گراف G توسط $deg(a)$ نشان داده می‌شود و برابر تعداد یال‌های مجاور به a است.
اگر $|V(G)| \geq 2$ باشد، آن‌گاه یک **مسیر** از a به b یک دنباله از رئوس مجاور به‌صورت زیر است
$a - v_1 - v_2 - \cdots - v_n - b$.

فاصله‌ی بین دو راس مجزای a و b توسط $d(a,b)$ نشان داده می‌شود و طول کوتاه‌ترین مسیری است که a و b را به هم وصل می‌کند. اگر مسیری بین a و b وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $d(a,b) = \infty$. **قطر** یک گراف G برابر است با
$diam(G) = sup\{d(a,b)|a,b \in V(G)\}$.

متمم گراف G را با $\bar{G}$ نشان می‌دهیم و همچنین $V(G) = V(\bar{G})$. دو راس a و b در گراف $\bar{G}$ مجاورند اگر و تنها اگر در گراف G مجاور نباشند. دو گراف G و H یکریخت هستند، هرگاه یک تناظر یک‌به‌یک
$f: V(G) \longrightarrow V(H)$

موجود باشد به طوری که برای هر زوج x و y از راس‌های G، $x - y \in E(G)$ اگر و تنها اگر
$f(x) - f(y) \in E(H)$.

یک **راس عام** از گراف G راسی است که مجاور به همه دیگر راس‌های G می‌باشد. اگر یک گراف G شامل یک راس عام باشد و دارای هیچ یال اضافه نباشد آن را **گراف ستاره** می‌نامیم.
G را **گراف همبند** می‌نامیم، هرگاه بین هر دو راس از G یک مسیر موجود باشد. در غیر این‌صورت G را **ناهمبند** می‌نامیم.
کمر گراف G طول کوتاه‌ترین دور در G است و با $g(G)$ نشان داده می‌شود. اگر گراف G دارای هیچ دوری نباشد، آن‌گاه تعریف می‌کنیم $g(G) = \infty$.

۲- گراف جمع زیرمدول‌های غیراساسی

فرض کنید S زیرمدول M باشد. مجموعه همه زیرمدول‌های N از M به‌طوری‌که $N \cap S = \circ$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه بنابر لم زورن دارای یک عضو بیشین K است. دراین‌صورت K را یک **متمم** از S در M می‌نامیم. به‌عبارت دیگر، K زیرمدول بیشین از M در گردایه زیر است
$\{S \leq M | N \cap S = \circ\}$.

واضح است که $K \oplus S$ زیرمدول اساسی M است و برای هر زیرمدول $L \supsetneq K$، $L \cap S \neq \circ$. هم‌چنین M یک CS–مدول است اگر و تنها اگر هر زیرمدول متمم آن، جمعوندمستقیم M باشد.

تعریف ۱. گراف جمع زیرمدول‌های غیراساسی از مدول M را با نماد $\Omega(M)$ نشان می‌دهیم. مجموعه رئوس این گراف مجموعه تمام زیرمدول‌های نابدیهی غیراساسی از M است که برای راحتی آن را با $\mathcal{E}^*(M)$ نشان می‌دهیم. بنابراین
$V(\Omega(M)) = \mathcal{E}^*(M)$.

دو زیرمدول متمایز N و K از گراف $\Omega(M)$ مجاورند درصورتی‌که $N + K \in \mathcal{E}^*(M)$ یا $N + K = M$.

نکته ۲. الف) توجه کنید که گراف $\Omega(M)$ شامل گراف $G'(M)$ به عنوان یک زیرگراف است که توسط انصاری طرقی و محبوبی آبکنار در مرجع ([۸]، تعریف ۲. ۱) معرفی شده است.
ب) اگر R یک دامنه ایده‌آل اصلی PID باشد، آنگاه گراف $\Omega(R)$ شامل یک زیرگراف یکریخت با گراف $G(R)$ در مرجع [۲۱] می‌باشد، زیرا دو ایده‌آل متمایز Ra و Rb از مجموعه رئوس $\mathcal{E}^*(R)$ در $\Omega(R)$ مجاورند، درصورتی که $Ra + Rb = R$.
پ) درصورتی‌که X یک خانواده از زیرمدول‌های M باشد، زیرگراف $\Omega(M)$ با مجموعه رئوس $X \cap \mathcal{E}^*(M)$ را با نماد $\Omega^X(M)$ نشان می‌دهیم.
اینک به‌طور دوگان، گراف $\Lambda(M)$ را معرفی می‌کنیم که شامل گراف $G(M)$ به عنوان یک زیرگراف است که توسط انصاری طرقی، فرشادی‌فر و محبوبی آبکنار در مرجع [۷] معرفی شده است.

تعریف ۳. گراف $\Lambda(M)$ وابسته به مدول M گرافی است که رئوس آن همه زیرمدول‌های نابدیهی غیرناچیز از مدول M است که برای راحتی با نماد $\mathcal{S}^*(M)$ نشان می‌دهیم، یعنی $V\left(\Lambda(M)\right) = \mathcal{S}^*(M)$. به عبارت دیگر،

$$V\left(\Lambda(M)\right) = \{\circ \neq N < M | N \notin \mathcal{S}(M)\}.$$

دو راس متمایز در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر اشتراک آن‌ها زیرمدول غیرناچیز M و یا زیرمدول صفر M باشد. به عبارت دیگر، دو راس متمایز N, K در گراف $\Lambda(M)$ مجاورند، هرگاه

$$N \cap K = \circ \quad \text{یا} \quad N \cap K \notin \mathcal{S}(M).$$

در ادامه مثال‌هایی ارائه خواهد شد که نشان می‌دهند گراف‌های $\Lambda(M)$ و $\Omega(M)$ معرفی شده در این مقاله با گراف‌های $G(M)$ و $G'(M)$ معرفی شده در مراجع [۷] و [۸] متفاوت هستند.

نکته ۴. هر حلقه R را می‌توان به عنوان یک R-مدول روی خودش در نظر گرفت از این‌رو $\Omega(R)$ گراف جمع ایده‌آل‌های غیراساسی از R است. گراف متمم از $\Omega(R)$ را با $\overline{\Omega}(R)$ نشان می‌دهیم که مجموعه رئوس آن $V(\Omega(R))$ است و دو ایده‌آل I و J در $\overline{\Omega}(R)$ مجاور هستند، هرگاه $I + J \in \mathcal{E}(R)$ و نیز همچنین $I + J \neq R$.

اسمیت و ودادی در مرجع [۲۲]، قضایای ۱. ۴ و ۱. ۸ یک رده‌بندی از مدول‌هایی که شرط DCC و ACC روی زیرمدول‌های غیراساسی را برآورده می‌کنند را ارائه کرده‌اند. واضح است که مدول‌های یکنواخت و مدول‌های آرتینی (نوتری) شرط DCC (به ترتیب ACC) روی زیرمدول‌های غیراساسی را برآورده می‌کنند.

قضیه ۵. احکام زیر برای یک R-مدول M را در نظر می‌گیریم.

الف) M شرط ACC روی زیرمدول‌های غیراساسی را برآورده می‌کند.

ب) هر زیرمدول $N \in \mathcal{E}^*(M)$ نوتری است.

پ) هر زیرمدول غیراساسی از M متناهی مولد است.

ت) برای هر زنجیر افزایشی $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های نابدیهی غیراساسی M، گراف $\Omega(M)$ شامل یک زیرگراف کامل است. در این‌صورت (الف ⇔ب⇔ پ) و (الف ⇐ ت).

در حالت خاص، اگر M مدولی یک‌ردیفی باشد و $|\mathcal{E}^*(M)| = s$، آنگاه $\Omega(M)$ گراف کامل K_s است.

اثبات. بنابر ([۲۲]، قضیه ۱. ۸)، احکام (الف)، (ب) و (پ) معادل هستند. اکنون نشان می‌دهیم (الف⇐ ت). فرض کنید که $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ یک زنجیر افزایشی از زیرمدول‌های نابدیهی غیراساسی M باشد، در این‌صورت عدد صحیح مثبتی مانند s موجود است به طوری‌که

$$N_s = N_{s+1} = \cdots.$$

اکنون زیرمجموعه $S = \{N_1, \dots, N_s\}$ از مجموعه $V(\Omega(M))$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که برای هر $1 \leq i \neq j \leq s$، $N_i + N_j = N_t$ که در آن $\mathrm{t} = \max\{i, j\}$ زیرمدولی غیراساسی از M است از این‌رو برای هر $1 \leq i \neq j \leq s$، $N_i - N_j$ یالی در $\Omega^S(M)$ می‌باشد. این ایجاب می‌کند که $\Omega^S(M) = K_s$ زیرگرافی کامل از $\Omega(M)$ است. اگر M مدولی یک‌ردیفی باشد و $|\mathcal{E}^*(M)| = s$، آنگاه برای هر $1 \leq i \neq j \leq s$، $N_i + N_j = N_i$ یا این که $N_i + N_j = N_j$ که هر دو زیرمدول‌های غیراساسی در M هستند. بنابراین $N_i - N_j$ یالی در $\Omega^S(M)$ می‌باشد.

توجه کنید که (ت⇐الف) لزوماً درست نیست زیرا هر زنجیر افزایشی از زیرمدول‌های نابدیهی غیراساسی یک زیرگراف کامل القا می‌کند در حالی که ممکن است این زنجیر ایستا نباشد.

نکته ۶. فرض کنید M یک R- مدول و N و K زیرمدول‌های غیرصفر M باشند، به‌طوری‌که K غیراساسی در M است و $N \subseteq K$. دراین‌صورت واضح است که N زیرمدولی غیراساسی از M می‌باشد. بعلاوه، در این حالت، $deg(N) \leq deg(K)$.

بعلاوه، اگر N و K زیرمدول‌های نابدیهی غیراساسی M باشند و یک مسیر از N به K در $\Omega(M)$ وجود داشته

باشد، آنگاه واضح است که برای همه زیرمدول‌های غیرصفر $N_1 \leq N$ و نیز $K_1 \leq K$ همچنین یک مسیر از N_1 به K_1 در $\Omega(M)$ وجود دارد.

قضیه ۷. فرض کنید $m \in Max(R)$ یک ایده‌آل غیراساسی R باشد، دراین‌صورت m یک راس عام در $\Omega(R)$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید I ایده‌آل دلخواهی از $\mathcal{E}^*(R)$ باشد. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض کنید $I \subseteq m$ باشد. بنابر نکته ۶ I ایده‌آل غیراساسی R است. از آنجا که

$$I + m = m \in \mathcal{E}^*(R),$$

پس $I - m$ یک یال در $\Omega(R)$ است.

حالت ۲. فرض کنید $I \nsubseteq m$ و $I \in \mathcal{E}^*(R)$، دراین‌صورت $I + m = R$ و لذا بنابر تعریف ۱، $I - m$ یک یال در $\Omega(R)$ است. بنابراین m یک راس عام در $\Omega(R)$ است.

توجه کنید که اگر (R, m) یک حلقه موضعی باشد، آنگاه برای هر ایده‌آل غیرصفر I از R، $I \subseteq m$ و لذا

$$I \cap m = I \neq 0.$$

بنابراین $m \in \mathcal{E}(R)$ در این‌صورت m یک راس از گراف $\Omega(R)$ نمی‌باشد و در این حالت $\Omega(R)$ گراف پوچ است.

نتیجه ۸. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_n$. احکام زیر برقرارند.

الف) اگر (a) و (b) ایده‌آل‌هایی از R باشند، به‌طوری که $a|b$ و $(a) \in \mathcal{E}^*(R)$، آنگاه $(b) \in \mathcal{E}^*(R)$. همچنین $(a) - (b)$ یک یال در $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ است. بعلاوه، اگر $(a, b) = 1$، آنگاه $(a) - (b)$ یالی در $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ است.

ب) فرض کنید $a_1|a_2|\ldots|a_s|n$ یک زنجیر بیشین از مقسوم‌علیه‌های عدد طبیعی n و (a_1) ایده‌آل غیراساسی R باشد. دراین‌صورت $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ شامل زیرگراف کامل K_s است.

اثبات. الف) از آنجا که $a|b$ پس $(b) \subseteq (a)$. اینک $(a) \in \mathcal{E}^*(R)$، بنابر نکته ۶، $(b) \in \mathcal{E}^*(R)$ و لذا $(a) + (b) = (a)$ ایده‌آلی غیراساسی از R است. این نتیجه می‌دهد که $(a) - (b)$ یالی در $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ است. بعلاوه، اگر $(a, b) = 1$، آنگاه

$$(a) + (b) = R,$$

و از این‌رو (a) مجاور به (b) در $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ است.

ب) بنابر (الف) یک زنجیر با طول بیشین از ایده‌آل‌های نابدیهی غیراساسی به صورت زیر داریم

$$(a_s) \subseteq (a_{s-1}) \subseteq \cdots \subseteq (a_1).$$

واضح است که برای هر $1 \leq i \neq j \leq s$، (a_i) مجاور به (a_j) در $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ است. این نتیجه می‌دهد که $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ شامل زیرگراف کامل K_s می‌باشد.

یادآوری می‌کنیم که یک R–مدول M **ضربی** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آلی مانند I از R موجود باشد به‌طوری‌که $N = IM$، مراجع [۳، ۵، ۹، ۱۲] را ببینید.

تعریف ۹. الف) R–مدول M را **هم–نیم‌ساده** می‌نامیم درصورتی‌که هر زیرمدول سره M اشتراکی از زیرمدول‌های بیشین M باشد. هر مدول نیم‌ساده یک مدول هم–نیم‌ساده است ([۴]، صفحات ۱۲۳– ۱۲۲).

ب) R–مدول M را **هم‌هسته‌ای** می‌نامیم، هرگاه هر زیرمدول سره از M مشمول در یک زیرمدول بیشین M باشد. در این حالت، بنابر ([۴]، گزاره ۹. ۱۸) $Rad(M)$ بزرگ‌ترین زیرمدول یکتای ناچیز از M است.

مثال ۱۰. مدول‌های هم–نیم‌ساده، متناهی مولد و مدول‌های ضربی مدول‌های هم‌هسته‌ای می‌باشند.

مثال ۱۱. فرض کنید M یک مدول شبه‌موضعی باشد. در این‌صورت $\Omega^{Max(M)}(M)$ یک زیرگراف کامل از $\Omega(M)$ است.

یادآوری می‌کنیم که یک مدول M دارای **بعد متناهی** (**رتبه متناهی**) است، هرگاه هیچ جمع‌مستقیم نامتناهی

از زیرمدول‌های غیرصفر در M موجود نباشد.

قضیه ۱۲. اگر M یک R – مدول نیم‌ساده باشد، آنگاه $\Omega(M)$ گراف کامل است.

اثبات. از آنجا که هر زیرمدول دلخواه غیربدیهی N از M یک زیرمدول متمم است از این‌رو N جمعوندمستقیم M است. بنابراین N زیرمدول غیراساسی M می‌باشد و لذا تنها زیرمدول اساسی M خودش است. برای هر دو زیرمدول متمایز $N_۱, N_2$ از مجموعه راس‌های $V(\Omega(M))$، $N_۱ + N_2$ زیرمدول غیراساسی M است یا $N_1 + N_2 = M$. این نتیجه می‌دهد که $N_۱ - N_2$ یالی در $\Omega(M)$ است. بعلاوه، از آنجا که $rank(M) = n$ اگر و تنها اگر M یک جمع‌مستقیم از n زیرمدول‌های ساده باشد. در این حالت، $\Omega(M)$ گراف کامل $K_{n,n}$ است. اگر $rank(M) = \infty$، آنگاه $\Omega(M)$ گراف کامل K_∞ است.

مثال ۱۳. الف) اگر n عدد طبیعی مربع- آزاد باشد، آنگاه $\mathbb{Z}_n$ حلقه‌ی نیم‌ساده است و لذا $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ گراف کامل است (شکل ۱).

فرض کنید $n = p_1p_2 \dots p_s$ تجزیه عدد طبیعی n به اعداد اول متمایز باشد. در این‌صورت $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ گراف کامل K_s است. اگر $s \geq 3$، آنگاه $g(\Omega(\mathbb{Z}_n)) = 3$.

کافی است برای حالت $s = 2$ حکم ثابت شود. از آنجا که,$(p_1) \cap (p_2) = (۰)$ پس تنها ایده‌آل‌های نابدیهی غیراساسی $\mathbb{Z}_n$، (p_1) و (p_2) می‌باشند. از این‌که $(p_1) + (p_2) = \mathbb{Z}_n$ نتیجه می‌شود که (p_1) مجاور به (p_2) در $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ است (شکل ۱). به طریق مشابه برای هر $1 \leq i \neq j \leq s,$

$(p_i) - (p_j)$ یالی در $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ می‌باشد. بوضوح، اگر $s \geq 3$، آنگاه $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ دارای یک دور به طول ۳ است، از این‌رو $g(\Omega(\mathbb{Z}_n)) = 3$.

ب) فرض کنید p یک عدد اول و k عددی طبیعی باشد. ایده‌آل‌های غیرصفر $\mathbb{Z}_{p^k}$ یک زنجیر افزایشی اکید به‌صورت زیر دارد:

$$(p^{k-1}) \subset \dots \subset (p^2) \subset (p) \subset (1).$$

اشتراک هر دو ایده‌آل در زنجیر بالا شامل

$$(p^{k-1}) \neq (۰)$$

است. از این‌رو $\mathbb{Z}_{p^k}$ حلقه یکنواخت است و لذا $\Omega(\mathbb{Z}_{p^k})$ گراف پوچ می‌باشد.

تعریف ۱۴. الف) R–مدول M **هم‌ضربی** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول N از M ایده‌آلی مانند I از R موجود باشد به‌طوری‌که $N = (۰:_M I)$، مراجع [۱، ۵، ۶] را ببینید.

توجه کنید که ایده‌آل I در تعریف مدول هم‌ضربی ممکن است منحصربفرد نباشد. به‌طور مثال، برای $\mathbb{Z}$ –مدول $M = \mathbb{Z}_{2^\infty}$ داریم $(۰:_M 6\mathbb{Z}) = (۰:_M 2\mathbb{Z})$.

ب) R –مدول M دارای خاصیت $(*)$ است، هرگاه برای هر دو ایده‌آل I و J از R داشته باشیم:

$$Ann_M(I) + Ann_M(J) = Ann_M(I \cap J)$$

پ) R–مدول M **هم‌ضربی قوی** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول N از M ایده‌آل یکتایی مانند I از R موجود باشد به‌طوری‌که $N = (۰:_M I)$.

نتیجه ۱۵. فرض کنید M یک R–مدول هم‌ضربی قوی باشد. اگر $J(R) = ۰$، آنگاه $\Omega(M)$ گراف کامل است.

اثبات. از آنجا که M یک مدول هم‌ضربی قوی است بنابر ([۲۲]، قضیه ۲. ۵) $N \leq_e M$ اگر و تنها اگر ایده‌آلی ناچیز مانند $I \ll R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N = (۰:_M I)$. از این‌که $J(R) = ۰$، نتیجه می‌شود که M زیرمدول غیربدیهی اساسی ندارد. به عبارت دیگر، همه زیرمدول‌های غیربدیهی M غیراساسی هستند، پس M نیم‌ساده است. بنابراین طبق قضیه ۱۲، $\Omega(M)$ گراف کامل می‌باشد.

مثال ۱۶. الف) مدول $M = \mathbb{Z}_6$ را به عنوان یک $\mathbb{Z}$– مدول در نظر می‌گیریم. گراف $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ مطابق شکل ۲ (الف) است.

ب) مدول $M = \mathbb{Z}_{12}$ به عنوان یک $\mathbb{Z}$– مدول را در

نظر می‌گیریم. گراف $\Omega(\mathbb{Z}_{12})$ مطابق شکل ۲ (ب) است.

پ) مدول $M=\mathbb{Z}_{24}$ به عنوان یک $\mathbb{Z}$– مدول را در نظر می‌گیریم. گراف $\Omega(\mathbb{Z}_{24})$ مطابق شکل ۲ (پ) است.

ت) مدول $M=\mathbb{Z}_{36}$ به عنوان یک $\mathbb{Z}$– مدول را در نظر می‌گیریم. گراف‌های $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$ و $\overline{\Omega}(\mathbb{Z}_{36})$ مطابق شکل ۳ هستند.

با توجه به مثال ۱۶، در زیر توضیح می‌دهیم که گراف $\Omega(M)$ که در این مقاله تعریف شده است با گراف $G'(M)$ معرفی شده توسط انصاری طرقی و ودادی در مرجع [۸] متفاوت است.

با توجه به شکل ۳، گراف $\Omega(M)$ در حالت کلی ممکن است هیچ دوری نداشته باشد.

ث) ([۷]، مثال ۲. ۱۶) مدول $M=\mathbb{Z}$ به‌عنوان یک $\mathbb{Z}$– مدول را در نظر می‌گیریم. تنها زیرمدول ناچیز M زیرمدول صفر است و همهٔ زیرمدول‌های غیرصفر M غیرناچیز می‌باشند. از آنجا که اشتراک هر دو زیرمدول غیرصفر M همچنین زیرمدولی غیرصفر است پس این اشتراک غیرناچیز است از این‌رو آن‌ها مجاورند و لذا $\Lambda(M)$ گراف کامل است.

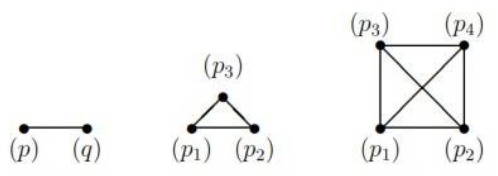
نکته ۱۷. الف) توجه کنید که $\Omega(\mathbb{Z}_{24})$ یک گراف همبند است. همچنین ایده‌آل (۳) یک راس برشی می‌باشد این نشان می‌دهد که قضیه ۲. ۱۱ از مرجع [۸] در گراف $\Omega(\mathbb{Z}_{24})$ برقرار نیست.

ب) از آنجا که $Min(\mathbb{Z}_{24})=\{(8),(12)\}$ و نیز ایده‌آل (۳) یک راس عام از $\Omega(\mathbb{Z}_{24})$ است از این‌رو قضایای ۲. ۷ و ۲. ۱۳ از مرجع [۸] در گراف $\Omega(\mathbb{Z}_{24})$ برقرار نیستند.

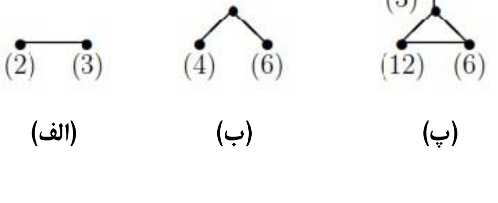
پ) با توجه به مثال ۱۶ (ت)، $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$ یک گراف همبند است و $diam(\Omega(\mathbb{Z}_{36}))=3$. این نشان می‌دهد که قضیه ۲. ۹ از مرجع [۸] در $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$ برقرار نیست.

یادآوری می‌کنیم ایده‌آل‌های I,J از حلقه R **هم‌اول** نامیده می‌شوند، هرگاه $I+J=R$. حلقه R **نیم‌اول** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر ایده‌آل I از R و هر عدد صحیح مثبت n، $I^n=0$ نتیجه بدهد که $I=0$.

قضیه ۱۸. فرض کنید R یک حلقه نیم‌اول، I,J ایده‌آل‌های R و $S=\{0\neq I\in L(R)\mid Ann(I)\neq 0\}$ باشند. احکام زیر برقرارند.



شکل ۱. گراف‌های $\Omega(\mathbb{Z}_{pq})$ ، $\Omega(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})$ ، $\Omega(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3p_4})$



شکل ۲. (پ) (ب) (الف)

الف) اگر I,J ایده‌آل‌های هم‌اول R باشند و $Ann(I)\neq 0$ و $Ann(J)\neq 0$، آنگاه I مجاور به J در گراف $\Omega(R)$ است.

ب) اگر $Ann(I)\neq 0$ یک ایده‌آل اساسی R باشد، آنگاه I یک راس عام در گراف $\Omega^S(R)$ است.

اثبات. الف) از آنجا که R نیم‌اول است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل اساسی، صادق باشد از این‌رو I ایده‌آل غیراساسی است اگر و تنها اگر $Ann(I)\neq 0$. بنابه فرض هردوی I و J ایده‌آل‌های غیراساسی R هستند. از طرف دیگر، $I+J=R$ است. این نتیجه می‌دهد که I مجاور به J در گراف $\Omega(R)$ است. بعلاوه، در این حالت قرار می‌دهیم:

$$S=\{0\neq I\in L(R)\mid Ann(I)\neq 0\}.$$

واضح است که $V(\Omega(R))=S$. بنابراین $\Omega(R)$ شامل زیرگراف کاملی است که مجموعه رئوس آن در S است و دو ایده‌آل I,J مجاورند درصورتی‌که ایده‌آل‌های هم‌اول R باشند.

ب) فرض کنید $I\in S$ و $Ann(I)\leq_e R$، آنگاه برای هر $J\in S$ خواهیم داشت:

$$Ann(I+J)=Ann(I)\cap Ann(J)\neq 0.$$

بنابراین $I+J$ ایده‌آل غیراساسی R است و لذا I و J در گراف $\Omega(R)$ مجاورند. این نتیجه می‌دهد که گراف $\Omega(R)$ شامل یک زیرگراف ستاره $\Omega^S(R)$ با راس عام.

۳- رابطه بین گراف‌های $\Omega(R)$ و $\Lambda(M)$ در مدول‌های هم‌ضربی

اکنون یک تعمیم از مفهوم زیرمدول اساسی از مرجع [۱۹] را یادآوری می‌کنیم و با استفاده از آن گراف $\Omega_T(M)$ که تعمیم گراف $\Omega(M)$ برای زیرمدول سره T از M می‌باشد را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱۹. الف) زیرمدول N از M **هم‌محض** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر ایده‌آل I از R تساوی زیر برقرار باشد

$$(N:_M I)=N+(0:_M I).$$

مراجع [۶، ۱۸] را ببینید.

ب) فرض کنید M یک $R-$ مدول و T زیرمدول سره M باشد. زیرمدول K از M را $\boldsymbol{T}-$ **اساسی** می‌نامیم، هرگاه $K\nsubseteq T$ و برای هر زیرمدول L از M رابطه $K\cap L\subseteq T$ نتیجه بدهد که $L\subseteq T$. در این حالت، می‌نویسیم $K\trianglelefteq_T M$. در حالت خاص، برای $T=0$، این همان تعریف زیرمدول اساسی K از مدول M است. در این حالت، گراف جمع زیرمدول‌های T–غیراساسی M را با نماد $\Omega_T(M)$ نشان می‌دهیم که مجموعه رئوس آن همه زیرمدول‌های نابدیهی T–غیراساسی می‌باشد. دو راس K_1 و K_2 مجاورند درصورتی‌که زیرمدول K_1+K_2 T–غیراساسی از M باشد و یا این‌که $K_1+K_2=M$.

مثال ۲۰. برای هر عدد صحیح مثبت $n\geq 2$، $\mathbb{Z}_n$ به عنوان یک $\mathbb{Z}$ – مدول، هم‌ضربی است. اگر n یک عدد طبیعی مربع–آزاد باشد، آنگاه هر زیرمدول $\mathbb{Z}_n$ یک زیرمدول هم‌محض است، مراجع [۶، ۲۰] را ببینید.

قضیه ۲۱. فرض کنید M یک R–مدول هم‌ضربی و T زیرمدول سره هم‌محض M باشد و $T\leq K_1$، $K_2\leq M$. در این‌صورت K_1-K_2 یالی از $\Omega_T(M)$ است اگر و تنها اگر $Soc\left(\frac{M}{T}\right)\nsubseteq (K_1+K_2)/T$.

$\Omega(\mathbb{Z}_{36})$ $\overline{\Omega}(\mathbb{Z}_{36})$ **شکل ۳.**

اثبات. بنابر ([۲۳]، قضیه ۱. ۲)، از آنجا که M مدول هم‌ضربی و T یک زیرمدول سره هم‌محض M است از این‌رو M/T یک R –مدول هم‌ضربی غیرصفر است. بنابر ([۸]، لم ۲. ۲ a)، هر زیرمدول غیرصفر از M/T شامل یک زیرمدول کمین از M/T است.

در حالت خاص، $Min(M/T) \neq \emptyset$.

اینک بنابر ([۸]، لم ۲. ۲، a) و ([۱۹]، لم ۳. ۲) برای هر $i = 1,2$، $K_i \ntrianglelefteq_T M$ اگر و تنها اگر

$$K_i/T \ntrianglelefteq_e M/T$$

اگر و تنها اگر

$$Soc(M/T) \nsubseteq K_i/T \ .$$

این ایجاب می‌کند که $K_1 - K_2$ یک یال از گراف $\Omega_T(M)$ است اگر و تنها اگر

$$K_1 + K_2 \ntrianglelefteq_T M$$

اگر و تنها اگر

$$Soc(M/T) \nsubseteq (K_1 + K_2)/T$$

و حکم ثابت است. به‌طوری‌که $N = IM$.

اکنون نگاشت $\Phi: V(\Omega(R)) \longrightarrow V(\Omega(M))$ با ضابطه $\Phi(I) = IM$ را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح Φ یک تناظر یک‌به‌یک است. فرض کنید I و J مجاور در گراف $\Omega(R)$ باشند.

حالت ۱. اگر $I + J$ ایده‌آل نابدیهی و غیراساسی R باشد، آنگاه

$$\Phi(I+J) = (I+J)M = IM + JM$$
$$= \Phi(I) + \Phi(J)$$

نیز زیرمدول نابدیهی و غیراساسی M است. بنابراین $\Phi(I)$ و $\Phi(J)$ مجاور در گراف $\Omega(M)$ هستند.

حالت ۲. اگر $I + J = R$، آنگاه

$$\Phi(I+J) = IM + JM = RM = M.$$

این نتیجه می‌دهد که در این حالت نیز $\Phi(I)$ و $\Phi(J)$ مجاور در گراف $\Omega(M)$ هستند.

قضیه ۲۴. فرض کنید M یک $R-$ مدول صادق هم‌ضربی قوی و دارای خاصیت $(*)$ باشد. در این‌صورت $\Omega(R) \cong \Lambda(M)$.

اثبات. نگاشت $\Psi: V(\Omega(R)) \longrightarrow V(\Lambda(M))$, با ضابطه $\Psi(\mathrm{I}) = (\circ:_M I)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\Psi(\mathrm{I}) = \Psi(J)$، در این‌صورت

$$(\circ:_M I) = (\circ:_M J).$$

از آنجا که M هم‌ضربی قوی است از این‌رو نتیجه می‌شود که

$$I = (\circ:_R (\circ:_M I)) = (\circ:_R (\circ:_M J)) = J \cdot$$

بنابراین Ψ یک‌به‌یک است.

بنابر ([۲۳]، گزارهٔ ۲. ۴)، در یک $R-$ مدول هم‌ضربی قوی M، زیرمدول N از M ناچیز است اگر و تنها اگر ایده‌آلی اساسی مانند I از R موجود باشد به‌طوری‌که $N = (\circ:_M I)$. این نتیجه می‌دهد $N \notin \mathcal{S}(M)$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد ایده‌آل $I \in \mathcal{E}^*(R)$ به‌طوری‌که $N = (\circ:_M I)$. بنابراین Ψ پوشا است. اکنون فرض کنید I و J مجاور در گراف $\Omega(R)$ باشند.

حالت ۱. اگر $I + J$ ایده‌آل نابدیهی و غیراساسی R باشد، آنگاه از آنجا که M دارای خاصیت $(*)$ است بنابراین

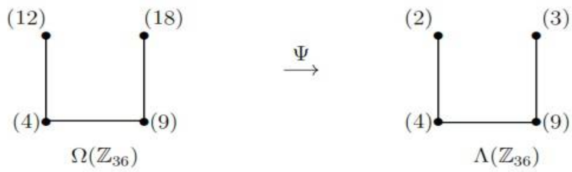
$$\Psi(I+J) = (\circ:_M I+J)$$
$$= (\circ:_M I) \cap (\circ:_M J)$$
$$= \Psi(I) \cap \Psi(J)\ ,$$

زیرمدولی غیرناچیز از M است. بنابراین $\Psi(I)$ مجاور به $\Psi(J)$ در گراف $\Lambda(M)$ است.

حالت ۲. اگر $I + J = R$، در این‌صورت

$$\Psi(I+J) = (\circ:_M I+J) = (\circ:_M R)$$
$$= (\circ:_M I) \cap (\circ:_M J)$$
$$= \Psi(I) \cap \Psi(J) = \circ \cdot$$

بنابراین $\Psi(I)$ مجاور به $\Psi(J)$ در گراف $\Lambda(M)$ است.



شکل ۴

مثال ۲۵. مدول $M=\mathbb{Z}_{36}$ را به عنوان یک $\mathbb{Z}_{36}$–مدول در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان درستی قضیه ۲۴ را بررسی کرد.
توجه کنید که

$$\Psi\big((4)\big)=\big(0:_M(4)\big)=(9).$$
$$\Psi\big((9)\big)=\big(0:_M(9)\big)=(4).$$
$$\Psi\big((18)\big)=\big(0:_M(18)\big)=(2).$$
$$\Psi\big((12)\big)=\big(0:_M(12)\big)=(3)\cdot$$

بنابراین $\Omega\left(\mathbb{Z}_{36}\right)\cong\mathbf{\Lambda}\left(\mathbb{Z}_{36}\right)$.
در مرجع [۸]، اثر متقابل بین خواص نظریه گراف از $G'(M)$ و خواص جبری از M در حالتی که مدول M هم‌ضربی باشد بررسی شده است. می‌دانیم که R–مدول M موضعی است اگر و تنها اگر

$$Rad(M)\in Max(M)$$

و

$$Rad(M)\in\mathcal{S}(M).$$

در ادامه به طرح دو سوال زیر می‌پردازیم.

سوال ۲۶. آیا به ازای هر گراف دلخواه G، مدولی مانند M وجود دارد که $\Omega(M)=G$ (یا $\mathbf{\Lambda}(M)=G$) باشد؟

پاسخ. جواب منفی است. گراف تهی G با $n\geq 3$ راس و هیچ یال را در نظر می‌گیریم. (فرض خلف) فرض کنید که مدولی مانند M وجود دارد به‌طوری‌که $\Omega(M)=G$ و $\mathcal{E}^*(M)=\{K_1,\dots,K_n\}$ که در آن K_i زیرمدول‌های نابدیهی غیراساسی متمایز و همه آن‌ها کمین هستند، زیرا در غیر این‌صورت اگر به ازای یک $1\leq s\leq n$ زیرمدول K_s دارای زیرمدول غیرصفر سره‌ای مانند N باشد، آنگاه بنابر نکته ۶ N غیراساسی است و لذا $1\leq t\leq n$ وجود دارد به‌طوری‌که $0\neq N=K_t<K_s$ و لذا $K_t+K_s=K_s$. بنابراین گراف G یال K_t-K_s را دارد که تناقض می‌باشد.
اکنون یکی از زیرمدول‌های ناصفر غیراساسی از مدول M مانند K_1 را انتخاب می‌کنیم اگر به ازای یک اندیس $2\leq j\leq n$، داشته باشیم $K_1\cap K_j\neq 0$، با توجه به کمین بودن K_i–ها برای همه‌ی $1\leq i\leq n$، دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

حالت ۱: اگر $K_1\cap K_j=K_1$، آنگاه $K_1\subseteq K_j$ و چون K_j کمین است، از این‌رو $K_1=K_j$ که با فرض متمایز بودن راس‌های گراف G در تناقض است.

حالت ۲: مشابه حالت قبل اگر $K_1\cap K_j=K_j$، آنگاه $K_j\subseteq K_1$ و چون K_1 کمین است، از این‌رو $K_1=K_j$, که تناقض است.

بنابراین هر زیرمدول نابدیهی غیراساسی از M کمین است. اگر زیرمدول ناصفر L در $Min(M)$ باشد و $K_1\cap L=0$، آنگاه L غیراساسی است و برای یک اندیس $1\leq i\leq n$ باید داشته باشیم: $K_i=L$. درصورتی‌که $K_1\cap L\neq 0$، بنابر کمین بودن آن‌ها نتیجه می‌شود که $K_1=L$. از این‌رو $Min(M)=\mathcal{E}^*(M)$ این نتیجه می‌دهد که $Soc(M)=K_1+\cdots+K_n$.
می‌دانیم که $N=Soc(M)$ بزرگترین زیرمدول نیم ساده یکتا از مدول M است و نیز

$$Soc\big(Soc(M)\big)=Soc(M),$$

پس $N=Soc(N)$ نیم‌ساده می‌باشد. ازآنجا که یک R–مدول N نیم‌ساده است اگر و تنها اگر دارای هیچ زیرمدول سره اساسی نباشد، از این‌رو $N=Soc(M)$ نمی‌تواند زیرمدول سره اساسی داشته باشد و این تناقض است زیرا K_1+K_2 یک زیرمدول سره اساسی از $Soc(M)$ می‌باشد و لذا فرض خلف باطل است. به طور

دوگان پاسخ در مورد $\mathbf{\Lambda}(M) = G$ منفی است.

سوال ۲۷. آیا گراف $\Omega(M)$ همواره همبند است؟

پاسخ. در حالت کلی جواب منفی است، زیرا فرض کنید M یک مدول هم‌ضربی تحویل‌ناپذیر–جمعی باشد. بنابر (نکته ۲، الف)، دو زیرمدول N و K از $\Omega(M)$ مجاورند اگر و تنها اگر

$$N + K \in \mathcal{E}^*(M).$$

در این حالت، گراف $\Omega(M)$ همان گراف $G'(M)$ در مرجع [۸] است. بنابر ([۸]، قضیه ۲. ۷)، گراف $\Omega(M)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر $|Max(M)| = 2$.

توجه کنید که بنابر ([۸]، ملاحظهٔ ۲. ۸) اگر $\mathbb{Z}$–مدول $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ را در نظر بگیریم، آنگاه عضوهای $\mathcal{E}^*(M)$ عبارتند از:

$$M_1 = (1,0)\mathbb{Z}, M_2 = (0,1)\mathbb{Z},$$
$$M_3 = (1,2)\mathbb{Z}, M_4 = (1,1)\mathbb{Z},$$
$$M_5 = (0,2)\mathbb{Z}.$$

می‌توان بررسی که زیرگراف $G'(M)$ از $\Omega(M)$ ناهمبند است در صورتی‌که گراف $\Omega(M)$ همبند است.

به‌طور دوگان، اگر M یک R –مدول یکنواخت باشد، آنگاه گراف $\mathbf{\Lambda}(M)$ در تعریف ۳ و گراف $G(M)$ در ([۷]، تعریف ۲. ۱) یکسان هستند، زیرا در این‌صورت به ازای هر دو زیرمدول غیربدیهی غیرناچیز N, K از M، $N \cap K \neq ۰$. اینک، اگر M یک R –مدول غیرصفر ضربی یکنواخت با شرط $|Max(M)| = 2$ باشد، آنگاه بنابر ([۷]، قضیه ۲. ۸)، گراف $\mathbf{\Lambda}(M)$ ناهمبند است. توجه کنید که شرط یکنواخت بودن را نمی‌توان حذف کرد. بنابر (مثال ۲۵، شکل ۴)، گراف $\mathbf{\Lambda}\left(\mathbb{Z}_{۳۶}\right)$ همبند است درصورتی‌که گراف $G\left(\mathbb{Z}_{۳۶}\right)$ همبند نیست. این نتیجه می‌دهد که در حالت کلی گراف $\mathbf{\Lambda}(M)$ لزوماً همبند نیست.

تشکر و قدردانی

نویسنده مقاله از توضیحات و نظرات داوران محترم که باعث بهبود مقاله شده است تشکر و قدردانی می‌نماید.

فهرست منابع

[1] Y. AL.Shaniafi, P.F. Smith, Comultiplication modules over commutative rings, Journal of commutative algebra, 3 (1) (2011), 1-29.

[2]
T. Albu, G.F. Birkenmeier, A. Erdogan, A . Tercan, Ring and Module Theorey. (2009).

[3] D.D. Anderson, Some remarks on multiplication ideals II. Comm. in Algebra 28 (2000), 2577-2583.

[4] F.W. Anderson, K.R. Fuller, Rings and Categories of Modules. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 13, 2nd ed., Springer-Verlag, (1992).

[5] H. Ansari-Toroghy, F. Farshadifar, The dual notion of multiplication modules, Taiwanese J. Math. 11 (4) (2007), 1189-1201.

[6] H. Ansari-Toroghy, F. Farshadifar, On comultiplication modules. Korean Ann Math, 2008, 25(2): 57–66

[7] H. Ansari-Toroghy, F. Farshadifar, F. Mahboobi-Abkenar, The small intersection graph relative to multiplication modules. Journal of Algebra and Related Topics 4 (21) (2016), 21-32.

[8] H. Ansari-Toroghy, F. Mahboobi-Abkenar, The large sum graph relative to comultiplication
modules, arxiv: 1609.00955 v1, 2016.

[9] A. Barnard, Multiplication modules, J.Algebra 71 (1981), 74-178.

[10] J. Beachy, Some aspects of noncommutative localization, in Non-commutative Ring Theory, Kent State University, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 545, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[11] M. Baser, N. Agayev, On reduced and semicommutative modules, Turkish J. Math. 30 (2006), 285-291.

[12] Z.A. El-Bast, P.F. Smith, Multiplication modules, Comm. Algebra 16 (1988) 755-779.

[13] N.V. Dung, D.V. Huynh, P.F. Smith, R. Wisbauer, Extending modules, Pitman Research Note in Math, Series 313 Longman Harlow, 1994.

[14] F. Kasch, Modules and Rings, Academic Press, London, New York, 1982.

[15] Golan JS: Quasi-Semiperfect modules. Quart J.Math., Oxford 1971, 173-182.

[16] KR. Goodearl, Ring theory, Non-singular rings and modules. New York and Basel: Marcel Dekker INC, 1976.

[17] A. Nikseresht, H. Sharif, On comultiplication and R-multiplication modules, Journal of Algebraic systems, 2 (1) (2014), 1-19.

[18] S. Rajaee, Quasi-copure submodules, Canad. Math. Bull. **59** (2016), 197-203.

[19] S. Safaeeyan, N.Saboori Shirazi, Essential Submodules with respect to an Arbitrary Submodule, Journal of Mathematical Extension, Vol. 7, No. 3, (2013), 15-27.

[20] S. Safaeeyan, Strongly duo and comultiplication modules, Journal of Algebraic Systems, Vol. 3, No. 1, (2016), 53-64.

[21] P. K. Sharma and S. M. Bhatwadekar, A note on graphical

representation of rings, J. Algebra 176 (1995), 124-127.

[22] P.F.Smith, M.R.Vedadi, Modules with chain conditions on Non-essential submodules, Communication in Algebra, 32 (5) (2004), 1881-1894.

[23] Y. Wang, Y. Liu, A Note on Comultiplication Modules, Algebra Colloquium 21 (1) (2014) 147-150.