دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مشبکه جبرهای لی نرم پر

علی اکبر استاجی[۱*]، حسین اقدامی[۲]، تکتم حقدادی[۳]

[(۱)] گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران.
[(۲ و ۳)] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۹/۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۱۰

چکیده

در این مقاله، رابطه‌ی بین مجموعه‌های نرم و جبرهای لی نرم با نظریه مشبکه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مفاهیم مشبکه مجموعه‌های نرم، مجموعه‌های نرم پر و جبرهای لی نرم را معرفی کرده، سپس برخی از خواص آن‌ها را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم مشبکه مجموعه‌های نرم روی یک مجموعه پارامتر ثابت، با جبر بول مجموعه توانی، مجموعه‌ای چون X با رابطه‌ی شمول یکریخت است. بخصوص اتم‌ها در مشبکه مجموعه‌های نرم و مشبکه جبرهای لی نرم پر مشخص می‌شوند. پس از آن در جبرهای لی نرم پر عناصر فشرده را معرفی کرده و شرایط لازم و کافی برای فشرده بودن و اتمیک بودن مشبکه جبرهای لی نرم پر را بیان می‌کنیم و ثابت می‌کنیم اگر جبر لی نرم پر به عنوان عنصری از مشبکه جبرهای لی نرم پر فشرده باشد، آنگاه مجموعه‌ی پارامتر متناهی و جبر لی متناهیا تولید شده است. در ادامه به بررسی ارتباط بین ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال در جبرهای لی و عناصر اول و ماکسیمال در مشبکه جبرهای لی نرم پر می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: مشبکه، جبر لی، اتم، مشبکه فشرده.

*. عهده‌دار مکاتبات : Email:aaestaji@hsu.ac.ir

۱- مقدمه

بیشتر ابزارهای سنتی ریاضی برای مدل سازی، استدلال و محاسبه، دارای شاخص‌های قطعی و دقیق هستند. اما مسائل پیچیده‌ای در علوم اقتصادی، مهندسی، زیست شناسی، جامعه‌شناسی، پزشکی و ... وجود دارند که دارای شاخص‌های عدم قطعیت و نادقیق هستند. این مسائل که شامل اطلاعاتی غیر قطعی و احتمالی می‌باشند، به عنوان یک دانش ناقص و نادقیق، مدت زمان زیادی است که توجه فلاسفه، منطق‌دان‌ها و ریاضیدانان را به‌خود جلب کرده است. نظریه‌ی مجموعه‌های نرم رویکرد جدیدی نسبت به این مسائل ارائه می‌کند. نظریه‌ی مجموعه‌های نرم توسط ریاضیدان روسی مالودسف [۱] در سال ۱۹۹۹ معرفی شد. مالودسف معتقد بود که نظریه‌هایی که به عنوان ابزارهای ریاضی برای کار کردن با اطلاعات دارای شاخص عدم قطعیت وجود دارند، دارای محدودیت‌هایی هستند که به دلیل کمبود ابزارهای پارامتری کردن در این نظریه‌ها می‌باشد. مجموعه‌ی نرم یک ابزار ریاضی پارامتری شده است که با مجموعه‌ای از توصیفات تقریبی اشیاء سر و کار دارد. هر توصیف تقریبی شامل دو قسمت، یک گزاره و یک مجموعه - مقدار تقریبی است. در این نظریه بر خلاف نظریه‌ی مجموعه‌ها توصیف اولیه‌ی اشیاء دارای ماهیت تقریبی است. نبود هر گونه محدودیت در توصیف تقریبی اشیاء در نظریه‌ی مجموعه‌های نرم کار کردن با آن را راحت و آسان ساخته است. نظریه‌ی مجموعه‌های نرم دارای خصوصیات بالقوه‌ای است که سبب کاربردهای فراوان آن در حوزه‌های مختلف، از جمله نظریه‌ی بازی، تحقیق در عملیات، نظریه‌ی اندازه و نظریه‌ی احتمال شده است [۱] . مجی و همکارانش برای اولین بار در سال ۲۰۰۲ کاربردهایی از مجموعه‌های نرم در مسائل تصمیم‌گیری ارائه دادند[۲]. بعد از آن چن و همکارانش روش مناسب‌تری برای استفاده از این نظریه در مسائل تصمیم گیری ارائه دادند که دارای اشکالات موجود در [۲] نبود ([۳] را ببینید). این موضوع انگیزه‌ای شد برای ابداع شیوه‌های مفیدتر و متنوع‌تر برای استفاده ی این نظریه در مسائل تصمیم‌گیری از جمله تشخیص بیماری تعریف عملگرهای مختلف روی مجموعه‌های نرم نیز باعث توسعه و بهبود کاربردهای این نگرش در حوزه‌های مختلف شد. توسعه‌ی مطالعه‌ی مجموعه‌های نرم به ایده‌آل‌ها، حلقه‌ها و نیم‌حلقه‌ها، جبرهای لی، نظریه‌ی $\mathrm{BCK/BCI}-$جبر، منطق‌های چند ارزشی و همچنین ارتباط آن با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار نیز نشان از وجود شرایط بالقوه در این نظریه برای گسترش آن به سایر شاخه‌های علوم ریاضی دارد. این مقاله به شرح ذیل تنظیم شده است. در بخش دوم برخی از مفاهیم اساسی مقدماتی مربوط به مجموعه‌های نرم، جبر لی و مشبکه‌ها که در ادامه از آن‌ها استفاده می‌شود، را مرور می‌کنیم. در بخش سوم، مفهوم مشبکه‌مجموعه‌های نرم را معرفی کرده و خواص اصلی آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به ویژه به معرفی و مشخص سازی اتم‌ها در این مشبکه پرداخته و نشان می‌دهیم که این مشبکه یک جبر بول اتمیک است. در بخش چهارم، مفهوم مشبکه جبرهای لی نرم پر را مطرح کرده، در ادامه اتم‌ها و عناصر فشرده در این مشبکه‌ها را مشخص‌سازی می‌کنیم و شرایط لازم برای فشرده بودن و اتمیک بودن این مشبکه را بیان می‌کنیم. همچنین به ارتباط بین ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال در جبرهای لی و عناصر اول و ماکسیمال در مشبکه جبرهای لی نرم پر می‌پردازیم.

۲- پیش نیازها

در این بخش برخی از مفاهیم اساسی مربوط به نظریه مجموعه‌های نرم، جبرهای لی و مشبکه‌ها را بیان می‌کنیم. برای مفاهیم مجموعه‌های نرم و جبرهای لی در این بخش، خواننده را به ترتیب به منابع [۴، ۵، ۶] و [۷] ارجاع می‌دهیم.

۲. ۱. مجموعه های نرم

فرض کنیم U مجموعه‌ی مرجع و E مجموعه‌ای از پارامترها باشد. هر پارامتر می‌تواند یک لغت یا یک جمله باشد. زوج $(f,E)_U$ را یک مجموعه‌ی نرم روی U می‌نامیم اگر و فقط اگر f تابعی از E به مجموعه توانی U باشد. مجموعه نرم $(f,E)_U$ را زیرمجموعه‌ی نرم $(g,F)_U$ می‌نامیم، اگر

(۱) $E \subseteq F$؛

(۲) برای هر عضو $e \in E$، $f(e) \subseteq g(e)$.
دو مجموعه نرم $(f,E)_U$ و $(g,F)_U$ مساویند؛ اگر $(f,E)_U$ و $(g,F)_U$ زیر مجموعه‌های نرم یکدیگر باشند. برای هر مجموعه نرم $(f,A)_U$ مجموعه‌ی

$$Supp(f) =: \{t \in A; f(x) \neq \emptyset\}$$

را تکیه گاه مجموعه نرم $(f,A)_U$ می‌نامیم. مکمل مجموعه‌ی نرم (f,A) روی U، مجموعه نرمی است که آن را با $(f,A)^C = (f^c,A)$ نمایش داده و در آن برای هر $a \in A$،

$$f^c(a) = U - f(a).$$

فرض کنید $(f,E)_U$ و $(g,F)_U$ دو مجموعه نرم روی U باشند. در این صورت
(۱) $(f,E)_U \tilde{\cup} (g,F)_U$ که آن را اجتماع توسعه یافته می‌نامیم، مجموعه نرم (h,C) روی U است که $C = E \cap F$ و به ازای هر $x \in C$،

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ;x \in E\backslash F \text{ اگر} \\ g(x) & ;x \in F\backslash E \text{ اگر} \\ f(x) \cup g(x) & ;x \in E \cap F \text{ اگر} \end{cases}$$

(۲) اگر $E \cap F \neq \emptyset$، در این صورت اشتراک محدود شده این دو مجموعه نرم، مجموعه‌ی نرم $(h,C)_U$ است که آن را با $(f,E)_U \Cap (g,F)_U$ نمایش داده و برای هر $x \in C$ به صورت $h(x) = f(x) \cap g(x)$ تعریف می‌شود؛ در اینجا $C = E \cap F$.
مجموعه نرم $(f,E)_U$ را در نظر بگیرید. این مجموعه را (۱) پوچ می‌نامیم و با $\tilde{\emptyset}$ نشان می‌دهیم، هرگاه برای هر $e \in E$، $f(e) = \emptyset$.
(۲) مطلق می‌نامیم هرگاه برای هر $e \in E$، $f(e) = U$ و آن را با $\tilde{E}_U$ نشان می‌دهیم.
(۳) پر می‌نامیم، اگر $Supp(f) = A$.

فرض کنیم $(f_i,A_i)_{i\in I}$ یک خانواده ناتهی از مجموعه‌های نرم روی مجموعه U باشد.

(۱) اجتماع این خانواده را با $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(f_i,A_i)$ نمایش داده و مجموعه نرم (h,C) است که $C = \bigcup_{i\in I} A_i$ و برای هر $c \in C$،

$$h(c) = \bigcup_{i\in I(c)} f_i(c)$$

که

$$I(c) = \{i \in I; c \in A_i\}.$$

(۲) اشتراک محدود شده‌ی این خانواده را با $\Cap_{i\in I}(f_i,A_i)$ نمایش داده و مجموعه نرم (h,C) است که $C = \bigcap_{i\in I} A_i$ و به ازای هر $c \in C$،

$$h(c) = \bigcap_{i\in I(c)} f_i(c)$$

که

$$I(c) = \{i \in I; c \in A_i\}.$$

۲. ۲. جبرهای لی

فرض کنید L یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. L همراه با یک تابع دو خطی $[.,.]: L \times L \to L$ را جبر لی می‌نامیم، اگر برای هر $x,y,z \in L$،

$$[x,x] = 0 \quad (۱)$$

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \quad (۲)$$

زیر فضای K از L را زیرجبر لی L گوییم، هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in K$، $[x_1,x_2] \in K$ و زیر فضای I از L را یک ایده‌آل لی از L می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in I$ و هر $y \in L$، $[x,y] \in I$.

گزاره۲-۱: اگر L یک جبر لی و $\{L_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرجبرهای (ایده‌آل‌های) L باشد، آنگاه $\bigcap_{i\in I} L_i$ یک زیرجبر لی (ایده‌آل) از L است. همچنین اگر $\{M_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر از زیر جبرهای لی L (ایده‌آل‌های) باشد، آنگاه $\bigcup_{i\in I} M_i$ یک زیرجبر لی (ایده‌آل) L است.
فرض کنید A یک جبر لی و $X \subseteq A$ باشد. زیرجبر تولید شده توسط X را با نماد $\langle X\rangle_{s.a}$ نمایش می‌دهیم و آن را اشتراک تمام زیرجبرهای A شامل X تعریف

می‌کنیم. به طور متناظر، ایده‌آل تولید شده توسط X را با نماد $\langle X\rangle_i$ نمایش می‌دهیم و آن را اشتراک تمام ایده‌آل‌های A که شامل X هستند، تعریف می‌کنیم.

قضیه ۲-۲: فرض کنید L یک جبر لی و X یک زیر مجموعه ناتهی از L باشد. در این صورت

$$< X >_{s.a}= span_{\mathbb{F}}\{[x_1,\cdots,x_n] | n\in\mathbb{Z}^{>0}, x_1,\cdots,x_n\in X\}$$
و
$$< X >_{i}= span_{\mathbb{F}}\{x,[a_1,\cdots,a_n,x] | n\in\mathbb{Z}^{>0}, x\in X, a_i\in L\}$$

تعریف ۲-۳: جبر لی L را نیم ساده گوییم، هر گاه به صورت جمع مستقیمی از ایده‌آل‌های ساده آن نوشته شود.

۲. ۳. مشبکه‌ها

برای مفاهیم مشبکه‌ها در این بخش، خواننده را به منابع [۸] و [۹] ارجاع می‌دهیم.

مجموعه‌ی مرتب جزئی L را که برای هر $x,y\in L$،
$$x\vee y:=\sup\{a,b\}, x\ \wedge y:=\inf\{a,b\}$$

در L وجود داشته باشند را مشبکه می‌نامیم. زیر مجموعه غیر تهی S از L را یک زیرمشبکه می‌نامیم، اگر برای هر $x,y\in S$، $x\vee y\in S$ و $x\wedge y\in S$.

علاوه بر این مشبکه‌ی L را کامل می‌نامیم، هر گاه برای هر زیر مجموعه S از L، $\vee S$ و $\wedge$S در L موجود باشند.

مشبکه‌ی L را در نظر بگیرید. عنصر a متعلق به L را:

(۱) بزرگترین عضو L می‌نامیم اگر برای هر x$\in L$ $x\leq a$.

(۲) کوچکترین عضو L می‌نامیم اگر برای هر $x\in L$، $x\geq a$

(۳) عضو سره L می‌نامیم، در صورتی که برابر با بزرگترین عضو L نباشد.

مشبکه L را کران‌دار می‌نامیم، در صورتی که دارای بزرگترین و کوچکترین عضو باشد.

مشبکه کران‌دار L را در نظر بگیرید. عنصر a متعلق به L را

(۱) ماکسیمال نامیم، اگر سره باشد و برای هر عضو سره $x\in L$ از $a\leq x$ نتیجه شود که $a=x$.

(۲) اتم نامیم، در صورتی که مخالف کوچکترین عضو L باشد و برای هر $x\in L$ که مخالف کوچکترین عضو L باشد از $x\leq a$ نتیجه شود که $x=a$.

(۳) اول نامیم، اگر سره باشد و برای هر دو عضو $x,y\in L$ از $x\wedge y=a$ نتیجه شود که $x=a$ یا $y=a$.

زیر مجموعه ناتهی A از مجموعه‌ی مرتب جزئی L را ایده‌آل نامیم، اگر برای هر $x\in L$ و $a\in A$ از $x\geq a$ نتیجه شود که $x\in A$ و همچنین برای هر $\mathrm{v},\mathrm{w}\in A$ عنصر $z\in A$ به قسمی وجود داشته باشد که $\mathrm{v}\leq z$ و $\mathrm{w}\leq z$.

۳. ۳. مشبکه مجموعه‌های نرم

در این بخش ابتدا به معرفی مشبکه مجموعه‌های نرم و مشبکه مجموعه‌های نرم پر می‌پردازیم و سپس برخی از خواص اساسی آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $S(E,U)$ مجموعه تمام مجموعه‌های نرم روی مجموعه U باشند، یعنی؛

$$S(E,U)=\{f:A\subseteq E, f:A\to P(U) \text{تابع است}\}$$

به سادگی دیده می‌شود که $(S(E,U),\widetilde{\subseteq})$ یک مجموعه مرتب جزئی است. در قضیه زیر نشان می‌دهیم که این مشبکه توزیع پذیر کامل نیز هست.

قضیه ۳-۱: $(S(E,U),\widetilde{\subseteq})$ مشبکه‌ای توزیع پذیر کامل است به قسمی که برای هر خانواده از مجموعه‌های نرم $\{(f_\lambda,A_\lambda)\}_{\lambda\in A}\subseteq S(E,U)$

$$\widetilde{\vee}_{\lambda\in A}(f_\lambda,A_\lambda)=\widetilde{\cup}_{\lambda\in A}(f\lambda,A_\lambda). \quad (۱)$$

$$\widetilde{\wedge}_{\lambda\in A}(\mathrm{f}_\lambda,\mathrm{A}_\lambda)=\Cap_{\lambda\in \mathrm{A}}(\mathrm{f}_\lambda,\mathrm{A}_\lambda). \quad (۲)$$

برهان. با توجه به تعریف $\widetilde{\bigvee}_{\lambda\in A}(f_\lambda, A_\lambda)$ و $\widetilde{\bigwedge}_{\lambda\in A}(f_\lambda, A_\lambda)$ مجموعه‌هایی نرم هستند. کافی است نشان دهیم که این مشبکه توزیع پذیر نیز هست. فرض کنیم (f,A)، (g,B) و (h,C) مجموعه‌هایی نرم باشند. قرار می‌دهیم:

$$(f,A) \Cap \left((g,B)\widetilde{\cup}(h,C)\right) = (k, A\cap(B\cup C))$$

و

$$\left((f,A)\Cap(g,B)\right)\widetilde{\cup}\left((f,A)\Cap(h,C)\right) = (l, (A\cap B)\cup(A\cap C)).$$

فرض کنیم $t\in A\cap(B\cup C)$ در این صورت

(۱) اگر $t\in A\cap B$ و $t\notin C$، آنگاه:

$$l(t) = f(t)\cap g(t) = k(t).$$

(۲) اگر $t\in A$, $t\notin B$ و $t\in C$، آنگاه:

$$l(t) = f(t)\cap h(t) = k(t).$$

(۳) اگر $t\in A\cap B\cap C$ ، آنگاه

$$l(t) = f(t)\cap\left(g(t)\cup h(t)\right) = (f(t)\cap g(t))\cup(f(t)\cap h(t)) = k(t)$$

بنابراین

$$(f,A)\Cap\left((g,B)\widetilde{\cup}(h,C)\right) = ((f,A)\Cap(g,B))\,\widetilde{\cup}((f,A)\Cap(h,C)).$$

اکنون مجموعه‌های نرم روی یک مجموعه پارامتر ثابت را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $A\subseteq E$ یک مجموعه پارامتر ثابت و $S_A(U)$ مجموعه تمام مجموعه‌های نرم روی U با مجموعه پارامتر A باشند. واضح است که اگر (f,A) و (g,A) دو مجموعه نرم روی U باشند، آنگاه $(f,A)\Cap(g,A)$ و $(f,A)\widetilde{\cup}(g,A)$ مجموعه‌های نرم روی U هستند.

نتیجه ۳-۲: $(S_A(U),\widetilde{\subseteq})$ زیر مشبکه‌ای از مشبکه $(S(E,U);\widetilde{\cup},\Cap)$ می‌باشد.

قضیه۳-۳: مجموعه نرم (f,A) در $(S_A(U),\widetilde{\subseteq})$ اتم است اگر و تنها اگر عنصر منحصر به فرد $t_0\in A$ به قسمی وجود داشته باشد که $|f(t_0)|=1$ و برای هر $t_0\neq t\in A$، $f(t)=\emptyset$.

برهان. ابتدا فرض کنیم (f,A) یک اتم باشد. پس $f\neq\emptyset$ و لذا $t_0\in A$ به قسمی وجود دارد که $f(t_0)\neq\emptyset$. فرض کنیم $x\in f(t_0)$ و تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & ;t\neq t_0 \text{ اگر} \\ \{x\} & ;t=t_0 \text{ اگر}\end{cases}$$

واضح است که $\emptyset\neq g\in S_A(U)$ و $g\,\widetilde{\subseteq}\,f$. از این رو طبق تعریف اتم $f\,\widetilde{\cong}\,g$. بنابراین

$$f(t_0) = g(t_0) = \{x\}$$

یعنی؛ $|f(t_0)|=1$. حال فرض کنیم مجموعه نرم h به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$h(t) = \begin{cases} f(t_0) & ;t\neq t_0 \text{ اگر} \\ \emptyset & ;t=t_0 \text{ اگر}\end{cases}$$

در این صورت $\emptyset\neq h\,\widetilde{\subseteq}\,f$ و در نتیجه $h\,\widetilde{\cong}\,f$، یعنی برای هر $t\neq t_0$،

$$f(t) = h(t) = \emptyset.$$

عکس گزاره با توجه به تعریف اتم بدیهی است.

مشبکه کران دار L را اتمیک نامیم، در صورتی که هر عنصر آن به صورت اتصالی از اتم‌های آن نوشته شود.

قضیه ۳-۴: $(S_A(U);\widetilde{\cup},\Cap)$ جبر بول اتمیک است.

برهان. فرض کنید $(f,A)_U$ یک مجموعه نرم باشد. برای هر $t\in Supp(f)$ ، قرار می‌دهیم

$$f(t) = \{f_\lambda^t\}_{\lambda\in\Lambda_t}$$

و برای هر $t \in Supp(f)$ و $\lambda \in \Lambda_t$، مجموعه نرم
$g_\lambda^t: A \to P(U)$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_\lambda^t(a) = \begin{cases} \{f_\lambda^t\} & ; a = t \text{ اگر } \\ \emptyset & ; a \neq t \text{ اگر } \end{cases}$$

اکنون به سادگی دیده می‌شود که

$$f = \tilde{\bigvee_{\substack{t \in Supp(f) \\ \lambda \in \Lambda_t}}} g_\lambda^t$$

که بنا بر قضیه ۳-۳، $(f,A)_U$ به صورت اتصالی از اتم‌ها است.

فرض کنید A یک جبر بول و $\{p(i,j)\}_{(i,j)\in I\times J}$ زیر مجموعه‌ای از A باشد. می‌گوییم خانواده $\{p(i,j)\}_{(i,j)\in I\times J}$ در قانون توزیع پذیری کامل صدق می‌کند، هرگاه

$$\bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J} p(i,j) = \bigvee_{a\in J^I}\bigwedge_{i\in I} p(i,a(i)),$$

که J^I مجموعه همه توابع از I به J است. با توجه به قضیه (۶-۱۴) و نتیجه (۷-۱۴) از [۱۰]، برای یک جبر بول A عبارت‌های زیر معادلند:

(۱) A با میدانی از همه زیر مجموعه‌های یک مجموعه یکریخت است. در حقیقت اگر X مجموعه اتم‌های A باشد، آنگاه تناظر یک به یک $p \to \{q \in X: q \leq p\}$ بین A و $P(X)$ وجود دارد.

(۲) A اتمیک است.

(۳) A کاملاً توزیع پذیر است.

با توجه به قضیه ۳-۴ و توضیحات قبل، گزاره زیر به سادگی بر قرار است.

گزاره ۳-۵: برای هر $S_A(U)$، مجموعه‌ای مانند X به قسمی وجود دارد که

$$(S_A(U), \tilde{\subseteq}) \cong (P(X), \subseteq).$$

فرض کنید $FS_A(U)$ مجموعه تمام مجموعه‌های نرم پر روی مجموعه U باشد. در این صورت واضح است که

$$FS_A(U) \subseteq S_A(U).$$

لم ۳-۶: برای هر خانواده دلخواه $\{(f_\lambda, A)\}_{\lambda\in\Lambda}$، از مجموعه‌های نرم پر روی U، $\tilde{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda}(f_\lambda, A)$ یک مجموعه نرم پر است.

برهان. از آنجا که برای هر $t \in A$ و هر $\lambda \in \Lambda$، $f_\lambda(t) \neq \phi$. بنابراین $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(t) \neq \phi$.

در مثال زیر نشان می‌دهیم که اشتراک دو مجموعه نرم پر الزاماً یک مجموعه نرم پر نیست.

مثال ۳-۷: فرض کنید $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$، $A = \{p_1, p_2\}$ و $E = \{p_1, p_2, p_3\}$. مجموعه‌های نرم پر $f: A \to P(U)$ با ضابطه $f(p_1) = \{u_1, u_2\}$، $f(p_2) = \{u_2, u_3\}$

و $g: A \to P(U)$ با ضابطه

$$g(p_2) = \{u_2\}, g(p_1) = \{u_3, u_4\}$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$(f \wedge g)(p_1) = f(p_1) \cap g(p_1) = \phi$$

و

$$(f \wedge g)(p_2) = f(p_2) \cap g(p_2) = \{u_2\}$$

بنابراین $f \wedge g \notin FS_A(U)$.

لم ۳-۶ و مثال ۳-۷ نشان می‌دهد که $(FS_A(U), \tilde{\subseteq})$ یک زیرمشبکه از $(S_A(U), \tilde{\subseteq})$ نیست.

۴. مشبکه جبرهای لی نرم و جبرهای لی نرم پر

در این بخش به معرفی مشبکه جبرهای لی نرم می‌پردازیم. فرض کنید L یک جبر لی روی میدان $\Bbbk$ باشد. مجموعه نرم $(f, A)_L$ را یک جبر لی نرم می‌نامیم، هر گاه برای هر $t \in A$ ، $f(t)$ یک زیرجبر لی از L باشد. توجه داریم که در جبرهای لی نرم

$Supp(f) = \{t \in A; f(t) \neq \{0\}\}.$

اگر $Supp(f) = A$، $(f, A)_L$ را جبر لی نرم پر می‌گوییم. مجموعه جبرهای لی نرم پر روی جبر لی L را با نماد $FS_A(L)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۴-۱: مجموعه‌ی مرتب جزئی $(FS_A(L), \widetilde{\subseteq})$ یک مشبکه‌ی کامل است و :

(۱) مجموعه نرم مطلق $\tilde{A}_L$ بزرگترین عضو مجموعه مرتب جزئی $FS_A(L)$ و جبر لی نرم $0: A \to P(L)$ تعریف شده با $0(t) = \{0\}$ کوچکترین عضو این مجموعه مرتب جزئی است.

(۲) برای هر $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq S_{cf}(A, U)$،

$\widetilde{\bigwedge}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$.

(۳) برای هر $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq S_{cf}(A, U)$،
$\widetilde{\bigvee}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda = h$ که در آن برای هر $t \in A$ ،
$h(t) = \langle \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(t)\rangle$.

برهان. فرض کنید $f \in FS_A(L)$ یک جبر لی نرم و $t \in A$ دلخواه باشند. در این صورت

$$\begin{aligned}(f\widetilde{\wedge}0)(t) &= f(t) \cap 0(t)\\ &= f(t) \cap \{0\} = \{0\}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(f\widetilde{\vee}0)(t) &= f(t) \cup 0(t)\\ &= f(t) \cup \{0\} = f(t).\end{aligned}$$

به علاوه

$$(f\widetilde{\wedge}\tilde{A}_L)(t) = f(t) \cap L = f(t)$$

و

$$(f\widetilde{\vee}\tilde{A}_L)(t) = \langle f(t) \cup L\rangle = <\mathrm{L}> = L$$

بنابراین $\tilde{\mathrm{A}}_\mathrm{L}$ و 0 به ترتیب بزرگترین و کوچکترین عناصر مجموعه‌ی مرتب جزئی $(FS_A(L), \widetilde{\subseteq})$ هستند. با توجه به گزاره ۲-۱، $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ و $\langle \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(t)\rangle$ زیر جبرهایی از L هستند و از این رو $(FS_A(L), \widetilde{\subseteq})$ یک مشبکه‌ی کامل است.

مثال زیر نشان می‌دهد که اگر $(f, A)_L$ یک جبر لی نرم پر باشد، آنگاه مکمل آن لزوماً یک جبر لی نرم نیست.

مثال ۴-۲: فرض کنید $L = \mathbb{R}^3$ فضای برداری حقیقی با براکت لی $[x, y] = x \times y$ باشد. مجموعه‌ی نرم $(f, \mathbb{R}^3)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y, z) = \begin{cases}\{(0,0,0)\} & ; (x, y, z) = (0,0,0) \text{ اگر}\\ \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\} & ; (x, y, z) = (x, 0,0)\text{، } x \neq 0 \text{ اگر}\\ \mathbb{R}^3 & ; \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

واضح است که $f \in FS_A(L)$. با توجه به تعریف مکمل یک مجموعه نرم

$$f^c(0,0,0) = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$$

یک زیرجبر لی از $\mathbb{R}^3$ نیست. لذا $f^c \notin FS_A(L)$.

گزاره ۴-۳: جبر لی $(f, A)_L$ یک اتم است اگر و تنها اگر عنصر منحصر به فرد $t_0 \in A$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که $f(t_0) \neq \{0\}$ زیر جبر لی L باشد که هیچ زیر جبر لی غیر بدیهی نداشته باشد و برای هر $f(t) = \{0\}, t \neq t_0$.

برهان. با توجه به تعریف اتم $f \neq 0$. علاوه بر این برای هر $t \in A$، $f(t)$ یک زیرجبر لی از L بوده و لذا $0 \in f(t)$. از این رو عنصر $t_0 \in A$ موجود است که $f(t_0) \neq \{0\}$.
اکنون فرض کنید M یک زیرجبر لی غیر بدیهی از $f(t_0)$ باشد. برای هر $t_0 \in A$، مجموعه نرم

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & ; t \neq t_0 \text{ اگر}\\ M & ; t = t_0 \text{ اگر}\end{cases}$$

را تعریف می‌کنیم. در این صورت به سادگی دیده می‌شود که $0 \neq g \in FS_A(L)$ و $g \mathrel{\widetilde{\subseteq}} f$ که با اتم بودن f در تناقض است. در نتیجه $f(t_0)$ زیرجبر لی غیر بدیهی ندارد. حال برای هر $t_0 \neq t \in A$ مجموعه نرم

$$g(t)=\begin{cases}\{0\} & ;t \neq t_0 \text{ اگر } \\ f(t_0) & ;t = t_0 \text{ اگر }\end{cases}$$

را تعریف می‌کنیم. در این صورت $0 \neq g \mathrel{\widetilde{\subseteq}} f$. با توجه به تعریف اتم $g \mathrel{\widetilde{=}} f$ و لذا برای هر $t \neq t_0$، $f(t) = g(t) = \{0\}$.
به سادگی دیده می‌شود که $(f,A)_L$ یک اتم است.

قضیه ۴-۴: فرض کنید L یک جبر لی به قسمی باشد که هر زیرجبر لی آن نیم ساده است. در این صورت $(FS_A(L),\widetilde{\subseteq})$ مشبکه‌ی اتمیک است.

برهان. فرض کنید $0 \neq f \in FS_A(L)$. برای هر $t \in A$، مجموعه‌ی $f(t)$ یک زیرجبر لی از L است که بنا به فرض نیم ساده است. لذا طبق تعریف ۲-۳، $f(t) = \bigoplus_{i\in N_t} M_i^t$ که در آن M_i^tها زیرجبر ساده از L است و $N_t = \{1,2,\cdots,t\}$. حال برای هر $t \in A$ و $i \in N_t$ مجموعه نرم $f_i^t : A \to P(U)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_i^t(a)=\begin{cases}M_i^t & ;t = a \text{ اگر } \\ \{0\} & ;t \neq a \text{ اگر }\end{cases}$$

با توجه به گزاره ۴-۳، f_i^tها اتم بوده و به سادگی دیده می‌شود که

$$f = \widetilde{\bigvee_{\substack{t\in A\\ i\in N_t}}} f_i^t$$

از این رو $(FS_A(L),\widetilde{\subseteq})$ مشبکه‌ی اتمیک است.

قضیه ۴-۵: فرض کنید $p \in FS_A(L)$ یک عنصر اول باشد. در این صورت برای هر $t \in A$، زیرجبر لی $p(t)$ یک ایده‌آل لی تحویل ناپذیر از L است.

برهان. فرض کنید $t_0 \in A$ عنصری ثابت اما دلخواه بوده و ایده‌آل‌های H و K از L به قسمی وجود داشته باشند که $p(t_0) = H \cap K$. مجموعه‌های نرم $f, g : A \to P(L)$ را به صورت

$$f(t)=\begin{cases}H & ;t = t_0 \text{ اگر } \\ \{0\} & ;t \neq t_0 \text{ اگر }\end{cases}$$

و

$$g(t)=\begin{cases}K & ;t = t_0 \text{ اگر } \\ \{0\} & ;t \neq t_0 \text{ اگر }\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $(f,A)_L$ و $(g,A)_L$ جبرهای لی نرم بوده و $f \mathbin{\widetilde{\wedge}} g \mathrel{\widetilde{\subseteq}} p$. از آن‌جا که p یک عنصر اول از مشبکه‌ی $FS_A(L)$ است، پس $f \mathrel{\widetilde{\subseteq}} p$ یا $g \mathrel{\widetilde{\subseteq}} p$. اگر $f \mathrel{\widetilde{\subseteq}} p$، آنگاه برای هر $t \in A$، $f(t) \subseteq p(t)$. به‌ویژه

$$\begin{aligned} H &= f(t_0) \subseteq p(t_0) \\ &= H \cap K \subseteq H \end{aligned}$$

و لذا $p(t_0) = H$. به‌طور مشابه می‌توان دید که اگر $g \mathrel{\widetilde{\subseteq}} p$ آنگاه $p(t_0) = K$. بنابراین $p(t_0)$ یک ایده‌آل تحویل ناپذیر است.

مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های مشبکه $FS_A(L)$ را با $Id(FS_A(L))$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه تحت شمول یک مجموعه مرتب جزئی است.

لم ۴-۶: اگر $f \in FS_A(L)$، آنگاه $I_f = \{g \in FS_A(L) | g \mathrel{\widetilde{\subseteq}} f\}$ یک ایده‌آل از مشبکه‌ی $FS_A(L)$ است.

برهان. بنا به تعریف ایده‌آل، سر راست نتیجه می‌شود.

قضیه ۴-۷: فرض کنید ایده‌آل $I \in Id(FS_A(L))$ یک عنصر اول باشد. در این صورت اگر $\vee I$ عضو سره مشبکه $FS_{\mathrm{A}}(\mathrm{L})$ باشد، آنگاه عنصر اول است.

برهان. فرض کنید $f, g \in FS_{\mathrm{A}}(\mathrm{L})$ دو جبر لی نرم باشند و $f \wedge g = \vee I$. بنا به لم قبل I_f و I_g متعلق به $Id(FS_A(L))$ بوده و $I_f \wedge I_g \subseteq I$. حال چون I یک عنصر اول است، پس $I_f \subseteq I$ یا $I_g \subseteq I$. اگر $I_f \subseteq I$ آنگاه، $f = \vee I_f \subseteq \vee I$. به‌طور مشابه اگر $I_g \subseteq I$، آنگاه $g = \vee I_g \subseteq \vee I$.

قضیه ۴-۸: فرض کنید $(f, A)_L$ یک جبر لی نرم پر روی L باشد. در این صورت f در مشبکه‌ی $FS_A(L)$ ماکسیمال است اگر و تنها اگر عنصر منحصر به فرد $t_0 \in A$ به قسمی وجود داشته باشد که $f(t_0)$ زیر جبر ماکسیمال از L بوده و برای هر $t(\neq t_0)$، $f(t) = L$.

برهان. واضح است که اگر برای هر $\mathrm{t} \in \mathrm{A}$، $f(t) = L$ آنگاه $f = \widetilde{A}_L$ و لذا f ماکسیمال نیست. بنابراین عنصر $\mathrm{t}_0 \in \mathrm{A}$ به قسمی وجود دارد که $f(t_0) \neq L$. فرض کنید K یک زیرجبر لی از L و شامل $f(t_0)$ باشد. نشان می‌دهیم که $K = L$.

مجموعه‌ی نرم $h: A \to P(L)$ با ضابطه

$$h(t) = \begin{cases} K & ; t = t_0 \\ f(t) & ; t \neq t_0 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. واضح است که $h \in FS_A(L)$ و $f \mathrel{\widetilde{\subset}} h \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \tilde{A}_L$. چون f عنصر ماکسیمال است پس $h \cong \tilde{A}_L$. به‌ویژه $K = h(t_0) = L$. اکنون فرض کنید $\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1 \in \mathrm{A}$ به قسمی وجود داشته باشند که $f(t_0) \neq L$ و $f(t_1) \neq L$. حال مجموعه‌ی نرم $h: A \to P(L)$ را به صورت

$$h(t) = \begin{cases} f(t_0) & ; t = t_0 \text{ اگر} \\ f(t_1) & ; t = t_1 \text{ اگر} \\ L & ; \text{سایر موارد} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $\tilde{A}_L \neq h \mathrel{\widetilde{\in}} FS_A(L)$ و $f \mathrel{\widetilde{\subseteq}} h$ که با ماکسیمال بودن f در تناقض است. از این رو، عنصر منحصر به فرد $t_0 \in A$ موجود است که $f(t_0)$ یک زیرجبر لی ماکسیمال از L است.

فرض کنید $(h, A)_L \in FS_A(L)$ یک جبر لی نرم باشد. پس برای هر $t \in A$، $f(t) \subseteq g(t)$. اگر $t \neq t_0$، آنگاه $L = f(t) \subseteq h(t)$ و در نتیجه $h(t) = L$. اگر $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$، آنگاه

$\mathrm{L} \neq f(t_0) \subseteq h(t_0)$

و با توجه به اینکه $f(t_0)$ زیرجبر لی ماکسیمال از L است، پس $h(t_0) = L$. بنابراین $h = \tilde{A}_L$ و f یک عنصر ماکسیمال است.

مثال زیر تاکید می‌کند که اگر برای هر $\mathrm{t} \in \mathrm{A}$، $f(t)$ زیرجبر لی ماکسیمال باشد، آنگاه f الزاما یک عنصر ماکسیمال نیست.

مثال ۴-۹: فرض کنید $\tilde{A}_L \neq f \in FS_A(L)$ یک جبر لی نرم باشد و برای هر $\mathrm{t} \in \mathrm{A}$، $f(t)$ یک زیرجبر لی ماکسیمال از L باشد. در این صورت برای هر $\mathrm{t} \in \mathrm{A}$، $f(t) \neq L$. اکنون فرض کنید t_0 یک عنصر دلخواه از A باشد که بعد از انتخاب ثابت است. مجموعه‌ی نرم $h: A \to P(L)$ با ضابطه

$$h(t) = \begin{cases} f(t_0) & ; t = t_0 \text{ اگر} \\ L & ; \mathrm{t} \neq \mathrm{t}_0 \text{ اگر} \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت $h \mathrel{\widetilde{\in}} FS_A(L)$ و $f \mathrel{\widetilde{\subseteq}} h \mathrel{\widetilde{\subset}} \tilde{A}_L$. بنابراین f در مشبکه‌ی $(FS_A(L), \widetilde{\subseteq})$ عنصر ماکسیمال نیست .

قضیه ۴-۱۰: فرض کنید $(f, A)_L \in FS_A(L)$ عنصری فشرده باشد. در این صورت برای هر $\mathrm{t} \in \mathrm{A}$، $f(t)$ زیرجبر لی متناهیا تولید شده از L است.

برهان. فرض کنید $(f,A)_L \in FS_A(L)$ فشرده باشد. لذا برای هر $t \in A$، زیر مجموعه ناتهی B_t از $f(t)$ به قسمی وجود دارد که $f(t) =< B_t >$. برای هر $b = \{b_t\}_{t\in A} \in \prod_{t\in A} B_t$ مجموعه‌ی نرم $f_b: A \to P(L)$ را به صورت $f_b(t) =< b_t >$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $f_b \,\widetilde{\subseteq}\, f$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{f_b; b \in \prod B_t\} \,\widetilde{\subseteq}\, FS_A(L)$$

لذا برای هر $t \in A$،

$$\begin{aligned}(\widetilde{\vee}\mathcal{A})(t) &= (\widetilde{\bigvee_{b\in\prod B_t}} f_b)(t)\\ &=< \cup_{b\in\prod B_t} f_b(t) >\\ &=< \cup_{b\in\prod B_t} < b_t >>\\ &=< B_t >= f(t).\end{aligned}$$

بنابراین $\vee\mathcal{A} = f$. از طرفی f عنصری فشرده است، پس زیرگردایه‌ی متناهی $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ به قسمی موجود است که $f = \widetilde{\cup}\mathcal{B}$. از این رو برای هر $t \in A$، $f(t)$ زیر جبر لی متناهیا تولید شده از L است.

قضیه ۴-۱۱: فرض کنید A یک مجموعه پارامتر متناهی و $(f,A)_L$ یک جبر لی نرم پر باشد. اگر برای هر $t \in A$، $f(t)$ یک زیرجبر متناهیا تولید شده از L باشد، آنگاه $(f,A)_L$ فشرده است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq FS_A(L)$ به قسمی باشد که $f \,\widetilde{\subseteq} \vee\mathcal{A}$. لذا برای هر $t \in A$،

$$f(t) \subseteq (\widetilde{\vee}\mathcal{A})(t) =< \cup_{g\in\mathcal{A}} g(t) >.$$

قرار می‌دهیم $f(t) =< a_1^t, \cdots, a_{n_t}^t >$. برای هر $1 \le i \le n_t$، $g_۱^i, \ldots, g_{i_t}^i \in \mathcal{A}$ به قسمی وجود دارند که $a_i^t \in< \cup_{j=۱}^{i_t} g_j^i(t) >$. فرض کنید برای هر $t \in A$،

$$g_t = \left\{g_j^i; ۱ \le i \le n_t, ۱ \le j \le i_t\right\}.$$

اگر $\mathcal{B} = \cup_{t\in A} g_t$، آنگاه $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ و $f \,\widetilde{\subseteq} \vee\mathcal{B}$. مثال زیر نشان می‌دهد که اگر A متناهی نباشد، آنگاه جبر لی نرم پر $(f,A)_L$ به قسمی وجود دارد که فشرده نیست.

مثال ۴-۱۲: فرض کنید A نامتناهی و $L = \{0,1\}$ یک جبر لی باشد. جبر لی نرم $f: A \to P(L)$ با ضابطه $f(t) = L$ برای هر $t \in A$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $a \in A$، مجموعه‌ی نرم $f_a: A \to P(L)$ را به صورت:

$$f(x) = \begin{cases} f(t_0) & ; t = t_0 \text{ اگر} \\ L & ; t \neq t_0 \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین $f_a \in FS_A(L)$ و $f = \widetilde{\vee}_{a\in A} f_a$، اما f عنصر فشرده نیست.

قضیه ۴-۱۳: فرض کنید مشبکه‌ی $FS_A(L)$ فشرده باشد. در این صورت مجموعه‌ی پارامتر A متناهی و L جبر لی متناهیا تولید شده است.

برهان. ابتدا فرض کنید مجموعه‌ی پارامتر A متناهی نباشد، در این صورت با توجه به مثال ۴-۱۲، $FS_A(L)$ لزوما فشرده نیست، که تناقض است. بنابراین، مجموعه‌ی پارامتر A متناهی است. اکنون فرض کنید A متناهی بوده اما L متناهیا تولید شده نباشد. قرار می‌دهیم $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ و $L = \langle B \rangle$ که $|B|$ نامتناهی است. برای هر $b \in B$ و $t \in A$ مجموعه‌ی نرم $f_b: A \to P(L)$ را به صورت $f_b(t) =< b >$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $f_b \in FS_A(L)$. اگر $\mathcal{A} = \{f_b | b \in B\}$ را در نظر بگیریم، آنگاه

$$\begin{aligned}\widetilde{\bigvee_{b\in B}} f_b(t) &=< \bigcup_{b\in B} f_b(t) >\\ &=< b | b \in B >= L.\end{aligned}$$

بنابراین f_b $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{L}} = \widetilde{\bigvee}_{b\in B} f_b$ و برای هر زیر مجموعه متناهی S از B، $\widetilde{\bigvee}_{b\in B} f_b \neq \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{L}}$ و این با فشرده بودن مشبکه‌ی $FS_A(L)$ تناقض دارد. از این رو، L باید جبر لی متناهیا تولید شده نیز باشد.

فهرست منابع

[1] D. Molodstov, Soft set theory firs results, Comput. Math. Appl. 31-37 (1999)

[2] P. K. Maji, A. R. Roy,R. Biswas, An application of soft sets in a decision making problem, Comptuers Math. Applie 44:1077-1083 (2011)

[3] D. Chen, E. C. C. Tsang, D. S. Yeung, X. Wang, The parameterization reduction of soft sets and its applications, Computers and Mathematics with Applications 49: 757–763 (2005)

[4] D. Pei, D. Miao, From soft set to information systems, Proceedings of Granular computing IEEE 2: 617-621 (2005)

[5] P. K. Maji, R. Biswas,A. R. Roy, Soft Set Theory, Computers and Mathematics with Applications 45: 555–562 (2003)

[6] U. Acar, F. Koyuncu, B. Tanay, Soft sets and soft rings, Comput. Math. Appl 59: 3458-3463 (2010)

[۷] ملیحه یوسف زاده، «جبرهای لی با بعد متناهی و نظریه نمایش»، جهاد دانشگاهی واحد اصفهان، (۱۳۹۶).

[8] M. M. Ebrahimi, M. Mahmoudi, Frame, Technical Report, Shahid Beheshti University (1996)

[9] J. Picado, A. Pulter, Frames and locales: topology without points, Birkhauser, Springer Basel (2012)

[10] S. Givant, P. Halmos, Introduction to Boolean Algebras, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer - Verlag (2009)