دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

روش تحلیلی جدید مبتنی بر معادله ریکاتی برای یافتن جواب‌های سالیتونی معادله غیرخطی لاکشمینن- پوسیزین- دانیل

احمد نیرمه*

استادیار، گروه ریاضی محض (معادلات دیفرانسیل)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۰/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۸/۲۸

چکیده

در این مقاله روش تحلیلی مبتنی بر معادله ریکاتی از نوع $\phi'(\xi)=\gamma(t)\phi^2(\xi)+\beta(t)\phi(\xi)+\alpha(t)$، جهت تبدیل معادله غیر خطی لاکشمینن–پوسیزین–دانیل به یک معادله معمولی غیرخطی و به‌دست آوردن جواب‌های سالیتونی آن، مورد مطالعه قرار گرفته شده است. جواب های به‌دست آمده از نوع امواج سالیتونی هستند که با استفاده از تغییر متغیر موجی حاصل شده‌اند. این جواب‌ها از آنجایی که با معرفی ساختار جدیدی از شکل جواب‌ها، حاصل شده‌اند جدید بوده و این ایده می‌تواند برای بسیاری از معادلات غیر خطی مراتب بالا که یافتن جواب برای آنها مشکل است، مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: معادله غیرخطی لاکشمینن–پوسیزین–دانیل[۱]، روش معادله ریکاتی[۲]، امواج سالیتونی[۳]، جواب تحلیلی[۴].

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: a.neirameh@gonbad.ac.ir

1. Nonlinear Lakshmanan-Porsezian-Daniel (LPD) equation
2. Riccati Equation
3. soliton waves
4. Analytical solution

۱. مقدمه

مشاهده جواب‌های تحلیلی دقیق نقش بسیار مهمی در مطالعه معادلات دیفرانسیل جزیی و کلاسیک دارد. در طبیعت بسیاری از پدیده‌های فیزیکی غیرخطی هستند که به وسیله معادلات دیفرانسیل جزیی تعریف می‌شوند. امروزه با پیشرفت سریع سیستم‌های محاسباتی مبتنی بر کامپیوتر، تحقیق برای یافتن جواب‌های دقیق از معادلات دیفرانسیل جزیی مورد توجه زیادی قرار گرفته شده است چون جواب‌های دقیق تحقیق برای یافتن پدیده‌های فیزیکی و بررسی صحت جواب‌های عددی را ممکن می‌سازد. روش‌های زیادی تاکنون جهت تبدیل معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی به معادلات دیفرانسیل معمولی و سپس یافتن جواب‌های آن‌ها از جمله روش تابع نمایی[۱-۲]، روش تبدیل تابع گویا[۳]، روش تابع هایپربولیک ژاکوبی [۴]، روش تانژانت بهبود یافته [۵]، روش تابع جیپریم جی [۶-۷]، روش ساده ترین معادلات[1] [۸]، روش زیر معادله[2] [۹]، روش خدریاشف[3] [۱۰] و ... مطرح شده‌اند. ساختار تمامی این روش‌ها استفاده از نوعی تغییر متغیر موجی جهت تبدیل یک معادله دیفرانسیل جزیی غیرخطی به یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌باشد. انچه مد نظر ما در این مقاله تحقیقی می‌باشد بسط و استفاده از روشی تحلیلی مبتنی بر معادله ریکاتی از نوع $\phi'(\xi)=\gamma(t)\phi^2(\xi)+\beta(t)\phi(\xi)+\alpha(t)$ می‌باشد. کاربرد این روش برای معادلاتی از این نوع با توجه به اینکه این نوع معادلات دارای پیچیدگی‌های خاصی می‌باشند بیانگر دقت و کاربردی بودن این روش می‌باشد. در این مقاله برآنیم تا جواب‌های معادله دیفرانسیل جزیی غیرخطی معادله غیرخطی لاکشمنن-پوسیزین-دانیل که به صورت زیر بیان می‌شود[۱۱-۱۲]

$$\begin{aligned} iq_t + aq_{xx} + bq_{xt} + cF\left(|q|\right)q = \\ \sigma q_{xxxx} + \alpha\left(q_x\right)^2 q^* + \\ \beta|q_x|^2 q + \gamma|q|^2 q_{xx} + \\ \lambda q^2 q_{xx}^* + \delta|q|^4 q, \end{aligned} \qquad (۱)$$

را مورد مطالعه قرار دهیم. در این معادله تابع $q(x,t)$ بیانگر تابع موجی با مقادیر مختلط وابسته به متغیرهای x و t می‌باشد که به ترتیب نمادهای مکان و زمان هستند. اولین معادله سمت چپ نمایش دهنده زمانی از موج غیر خطی در حالی که ضریب × بیانگر پراکندگی سرعت گروهی و × نمایش دهنده پراکندگی زمانی فضایی می‌باشد. همچنین × بیانگر پراکندگی از مرتبه چهار و × بیانگر جذب دو فوتونی می‌باشد. ودر انتها تابع F جبری با مقادیر حقیقی و به منظور ایجاد شرایط مناسب برای تابع مختلط $F\left(|q|^2\right)q$ می‌باشد، تابع $F\left(|q|^2\right)q$ با k بار مشتق پذیری پیوسته در نظر گرفته می‌شود، به طوری که [۱۱]

$$[\,F\left(|q|^2\right)q \in \bigcup_{m,n=1}^{\infty} C^k\left((-n,n)\times(-m,m);R^2\right),$$

ساختار این مقاله به این‌صورت می‌باشد: در قسمت اول به مفاهیم بنیادی معادله غیر خطی لاکشمنن-پوسیزین-دانیل اشاره شده است. در قسمت دوم به بیان روش تحلیلی مبتنی بر معادله ریکاتی بحث شده است. در قسمت سوم کاربرد روش فوق برای معادله غیرخطی لاکشمنن-پوسیزین-دانیل بیان شده و آنچه در قسمت انتهایی مطرح شده، نتیجه گیری می‌باشد.

۲. ساختار روش تحلیلی جدید بر اساس معادله ریکاتی

روش فوق که می‌توان آن را روش ریکاتی نیز نامید با در نظر گرفتن معادله ریکاتی به صورت زیر آغاز می‌شود[۱۳].

$$\phi'(\xi)=\gamma(t)\phi^2(\xi)+\beta(t)\phi(\xi)+\alpha(t), \qquad (۲)$$

1. Binary simplest equation method
2. Sub equation method
3. Kudryashov mthod

معادله فوق دارای جواب‌هایی به صورت زیرمی‌باشد.

$$\psi(\xi)=\begin{cases} \dfrac{1}{\gamma(t)}\left(-\dfrac{1}{\xi}-\dfrac{\beta(t)}{2}\right), \\ \text{for} \quad \beta^2(t)=4\gamma(t)\alpha(t) \\ \dfrac{1}{\gamma(t)}\left(\dfrac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\tan\left[\dfrac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\xi\right]-\dfrac{\beta(t)}{2}\right), \\ \text{for} \quad 4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)>0 \\ \dfrac{1}{\gamma(t)}\left(-\dfrac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\cot\left[\dfrac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\xi\right]-\dfrac{\beta(t)}{2}\right), \\ \text{for} \quad 4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)>0 \\ \dfrac{1}{\gamma(t)}\left(-\dfrac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\tanh\left[\dfrac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\xi\right]-\dfrac{\beta(t)}{2}\right), \\ \text{for} \quad 4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)<0 \\ \dfrac{1}{\gamma(t)}\left(-\dfrac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\coth\left[\dfrac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\xi\right]-\dfrac{\beta(t)}{2}\right), \\ \text{for} \quad 4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)<0. \end{cases} \qquad (۳)$$

در ادامه جهت بررسی ساختار روش و نحوه استفاده از آن ابتدا معادله دیفرانسیل غیرخطی در حالت کلی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$F(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, \ldots) = 0, \qquad (۴)$$

$u = u(x, t)$ تابع هدف می‌باشد که نامشخص می‌باشد و F چند جمله‌ایی بر اساس تابع u و مشتقات آن بر حسب x, t می‌باشد. حال برای یافتن جواب‌های معادله غیر خطی (۳) از تغییر متغیر موجی زیر

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = kx + ly + vt, \qquad (۵)$$

برای تبدیل کردن معادله دیفرانسیل (۴) به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی به شکل

$$P(U, U', U'', \ldots) = 0. \qquad (۶)$$

استفاده می‌کنیم که در آن k, l, v مقادیر ثابت هستند که بعداً محاسبه خواهند. در ادامه به صورت قسمت‌های مجزا از هم نحوه رسیدن به جواب در حالت کلی مطرح خواهد شد.

مرحله اول: فرض می‌کنیم معادله (۶) دارای جوابی به صورت زیر باشد که ایده اصلی این روش می‌باشد

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i \left(m+\varphi(\xi)\right)^i + \sum_{i=N+1}^{2N} a_i \left(m+\varphi(\xi)\right)^{N-i} \qquad (۸)$$

که در آن a_i مقادیر ثابت هستند که محاسبه خواهند شد و $\varphi(\xi)$ در معادله ریکاتی زیر صدق می‌کند

$$\phi'(\xi)=\gamma(t)\phi^2(\xi)+\beta(t)\phi(\xi)+\alpha(t), \qquad (۹)$$

جهت تسهیل در به‌دست آوردن مشتقات معادله (۷) فرض می‌کنیم:

$$\psi(\xi) = m + \varphi(\xi) \qquad (۱۰)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i \left(\psi(\xi)\right)^i + \sum_{i=N+1}^{2N} a_i \left(\psi(\xi)\right)^{N-i} \qquad (۱۱)$$

در ضمن از رابطه (۹) داریم:

$$\begin{aligned} &\phi'(\xi)=\gamma(t)\phi^2(\xi)+ \\ &\beta(t)\phi(\xi)+\alpha(t)\Rightarrow \\ &\psi'(\xi)=\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)^2+ \\ &\beta(t)\left(\psi(\xi)-h\right)+\alpha(t) \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

مرحله دوم: با در نظر گرفتن بالانس همگن [۱۴] مابین جمله غیرخطی و بالاترین مرتبه مشتق در معادله (۱۱) پس از جاگذاری معادلات (۱۰-۱۲) مقدرا عدد صحیح N در معادله (۷) محاسبه می‌شود.

مرحله سوم: با جاگذاری توان‌ها و مشتقات لازم تابع U در معادله (۴) و مرتب سازی بر اساس توان‌های

مختلف $\psi(\xi)$ و همچنین مساوی صفر قرار دادن ضرایب $\psi(\xi)$ به مجموعه‌ایی از عبارات‌های جبری می‌رسیم که با حل این عبارات با استفاده از میپل ضرایب لازم a_i,ω و m را به‌دست می‌آوریم.

۳. نتایج روش تحلیلی ریکاتی برای معادله غیر خطی لاکشمین-پوسیزین-دانیل:

در ادامه برای تبدیل معادله غیرخطی لاکشمین-پوسیزین-دانیل تحت شرایط روش فوق، تغییر متغیر موجی زیر، که منشا امواج سالیتونی است را در نظر می‌گیریم

$$q(x,t)=U(x,t)e^{i(\phi)},\quad \phi(x,t)=-kx+\omega t+\theta \tag{۱۳}$$

که در آن تابع $U(x,t)$ شکل مشخصات موج، و $\phi(x,t)$ از اجزائ فاز که k بیانگر فرکانس سالیتون‌ها و w تعداد موج و θ ثابت فاز هستند که تمامی اجزا محاسبه خواهند شد. با جاگذاری معادله (۱۳) در معادله (۱) و جداسازی به دو قسمت حقیقی و موهومی نتایج را به صورت قسمت حقیقی

$$\begin{aligned}&\sigma U_{xxxx}-\left(a+6\sigma k^2\right)U_{xx}-bU_{xt}-\\&\left(bkw-w-ak^2-\sigma k^4\right)U-\\&\left(\alpha+\gamma+\lambda-\beta\right)k^2U^3+\delta U^5-\\&cF\left(U^2\right)U+\left(\alpha+\beta\right)UU_x^2+\\&\left(\lambda+\gamma\right)U^2U_{xx}=0,\end{aligned} \tag{۱۴}$$

و قسمت موهومی به شکل زیر داریم:

$$\begin{aligned}&\left(1-bk\right)U_t-\left(2ak+4\sigma k^3-bw\right)U_x+\\&2\left(\alpha+\gamma-\lambda\right)kU^2U_x+4\sigma kU_{xxx}=0,\end{aligned} \tag{۱۵}$$

فرض می‌کنیم ضرایب توابع خطی در معادله (۱۵) برابر صفر باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\sigma=0,\qquad \alpha+\gamma=\lambda, \tag{۱۶-۱}$$

بنابراین خواهیم داشت:

و سرعت سالیتون‌ها برابر است با

$$\upsilon=\frac{bw-2ak}{1-bk},\qquad bk\neq 1. \tag{۱۶-۲}$$

با جاگذاری معادله (۱-۱۶) در معادله (۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&aU_{xx}+bU_{xt}+\left(bkw-w-ak^2\right)U+\\&\left(2\lambda-\beta\right)k^2U^3-\\&\delta U^5+cF\left(U^2\right)P-\\&\left(\alpha+\beta\right)UU_x^2-\left(\lambda+\gamma\right)U^2U_{xx}=0,\end{aligned} \tag{۱۷}$$

با استفاده از تبدیل $U(x,t)=U(\xi)$ و $\xi=x-ct$ معادله (۱۷) تبدیل به معادله زیر می‌شود

$$\begin{aligned}&\left(a-bc\right)U''-\left(\alpha+\beta\right)UU'^2-\\&\left(\lambda+\gamma\right)U^2U''+\\&\left(2\lambda-\beta\right)k^2U^3-\delta U^5+\\&cF\left(U^2\right)U+\\&\left(bkw-w-ak^2\right)=0\end{aligned} \tag{۱۸}$$

پس از بررسی بالانس همگن [۱۵] در معادله (۱۸) میزان $N=1$ حاصل می‌شود، بنابراین جواب معادله (۱۸) به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}U(\xi)&=a_0+a_1\left(m+\phi(\xi)\right)+\\&a_2\left(m+\phi(\xi)\right)^{-1}\end{aligned} \tag{۱۹}$$

حال طبق رابطه $\psi(\xi)=m+\phi(\xi)$ داریم

$$U(\xi)=a_0+a_1\psi+a_2\psi^{-1}, \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned}\psi'(\xi)&=\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)^2+\\&\beta(t)\left(\psi(\xi)-h\right)+\alpha(t)\end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$U''=a_1\left(2\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)\left(\begin{array}{l}\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)^2\\+\beta(t)\left(\psi(\xi)-h\right)+\alpha(t)\end{array}\right)\right)+a_1\left(\beta(t)\left(\begin{array}{l}\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)^2\\+\beta(t)\left(\psi(\xi)-h\right)+\alpha(t)\end{array}\right)\right)-\frac{a_2}{\left(\psi(\xi)\right)^2}\left(2\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)\left(\begin{array}{l}\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)^2+\\\beta(t)\left(\psi(\xi)-h\right)+\alpha(t)\end{array}\right)\right)-\frac{a_2}{\left(\psi(\xi)\right)^2}\left(+\beta(t)\left(\begin{array}{l}\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)^2\\+\beta(t)\left(\psi(\xi)-h\right)+\alpha(t)\end{array}\right)\right)+\frac{2a_2\left(\begin{array}{l}\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)^2+\\\beta(t)\left(\psi(\xi)-h\right)+\alpha(t)\end{array}\right)^2}{\left(\psi(\xi)\right)^3}$$
(۲۲)

$$U'=a_1\left(\begin{array}{l}\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)^2+\\\beta(t)\left(\psi(\xi)-h\right)+\alpha(t)\end{array}\right)-\frac{a_2\left(\begin{array}{l}\gamma(t)\left(\psi(\xi)-h\right)^2+\\\beta(t)\left(\psi(\xi)-h\right)+\alpha(t)\end{array}\right)}{\left(\psi(\xi)\right)^2}$$
(۲۳)

$$U^3=a_0^3+3a_0^2a_1\psi(\xi)+3\frac{a_0^2a_2}{\psi(\xi)}+3a_0a_1^2\left(\psi(\xi)\right)^2+6a_2a_0a_1+3\frac{a_0a_2^2}{\left(\psi(\xi)\right)^2}+a_1^3\left(\psi(\xi)\right)^3+3a_1^2\psi(\xi)a_2+3\frac{a_1a_2^2}{\psi(\xi)}+\frac{a_2^3}{\left(\psi(\xi)\right)^3}$$
(۲۴)

و

$$U^5=5\frac{a_0a_2^4}{\left(\psi(\xi)\right)^4}+20a_2a_0^3a_1+10\frac{a_1^2a_2^3}{\psi(\xi)}+10a_0^2a_1^3\left(\psi(\xi)\right)^3+10a_1^3\psi(\xi)a_2^2+10\frac{a_0^2a_2^3}{\left(\psi(\xi)\right)^3}+5a_0^4a_1\psi(\xi)+5a_0a_1^4\left(\psi(\xi)\right)^4+5a_1^4\left(\psi(\xi)\right)^3a_2+a_0^5+20\frac{a_0a_1a_2^3}{\left(\psi(\xi)\right)^2}+30\frac{a_0^2a_1a_2^2}{\psi(\xi)}+30a_0a_2^2a_1^2+10a_0^3a_1^2\left(\psi(\xi)\right)^2+5\frac{a_0^4a_2}{\psi(\xi)}+20a_0a_1^3\left(\psi(\xi)\right)^2a_2+a_1^5\left(\psi(\xi)\right)^5+\frac{a_2^5}{\left(\psi(\xi)\right)^5}+5\frac{a_1a_2^4}{\left(\psi(\xi)\right)^3}+10\frac{a_0^3a_2^2}{\left(\psi(\xi)\right)^2}+30a_0^2a_1^2\psi(\xi)a_2$$
(۲۵)

حال با جاگذاری روابط (۲۵)- (۲۰) در معادله (۱۸) و با صفر مساوی قراردادن توان‌های مختلف $\psi(\xi)$ در معادله فوق مقادیر ضرایب مدنظر در رابطه (۱۹) به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_1=\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\gamma(t)}{\delta}$$
(۲۶-۱)

$$a_0=-1/2$$

$$\frac{\left(\beta(t)-2\gamma(t)h\right)\left(-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\right)^{3/2}}{(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\delta^2}$$
(۲۶-۲)

(۲۶-۳)
$$a_2=\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\left(\gamma(t)h^2+\alpha(t)-\beta(t)h\right)}{\delta}$$

در قسمت بالا متغیرهای لازم جهت به‌دست آوردن جواب‌های معادله (۱) محاسبه شده است. بنابراین جواب‌های معادله (۱) را بصورت زیر داریم.
با جاگذاری روابط (۱-۲۶) تا (۳-۲۶) در رابطه (۱۹) با استفاده از (۱۳) و جواب‌های معادله ریکاتی (۲) جواب‌ها را به صورت زیر داریم:

حالت اول: جواب‌ها به‌صورت توابع گویا

برای حالتی که $\beta^2(t)=4\gamma(t)\alpha(t)$ جواب‌های معادله (۱) عبارتند از:

$$q_1(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{\left(\beta(t)-2\gamma(t)h\right)\left(-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\right)^{3/2}}{(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\delta^2}e^{i(-kx+\omega t+\theta)}+\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\gamma(t)}{\delta}\left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(-\frac{1}{x-ct}-\frac{\beta(t)}{2}\right)\right)e^{i(-kx+\omega t+\theta)}+\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\left(\gamma(t)h^2+\alpha(t)-\beta(t)h\right)}{\delta}\times\left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(-\frac{1}{x-ct}-\frac{\beta(t)}{2}\right)\right)^{-1}e^{i(-kx+\omega t+\theta)},$$

حالت دوم: جواب‌ها به‌صورت توابع مثلثاتی

برای حالتی که $4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)>0$ جواب معادله (۱) را به صورت زیر داریم

$$q_1(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{\left(\beta(t)-2\gamma(t)h\right)\left(-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\right)^{3/2}}{(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\delta^2}e^{i(-kx+\omega t+\theta)}+\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\gamma(t)}{\delta}\times\left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\tan\left[\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}(x-ct)\right]-\frac{\beta(t)}{2}\right)\right)e^{i(-kx+\omega t+\theta)}+\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\left(\gamma(t)h^2+\alpha(t)-\beta(t)h\right)}{\delta}\times\left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\tan\left[\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}(x-ct)\right]-\frac{\beta(t)}{2}\right)\right)^{-1}e^{i(-kx+\omega t+\theta)},$$

برای این حالت جواب بعدی را به صورت زیر داریم:

$$q_1(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{\left(\beta(t)-2\gamma(t)h\right)\left(-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\right)^{3/2}}{(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\delta^2}e^{i(-kx+\omega t+\theta)}+\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\gamma(t)}{\delta}\times\left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(-\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\cot\left[\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}(x-ct)\right]-\frac{\beta(t)}{2}\right)\right)e^{i(-kx+\omega t+\theta)}+\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\left(\gamma(t)h^2+\alpha(t)-\beta(t)h\right)}{\delta}\times\left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(-\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\cot\left[\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}(x-ct)\right]-\frac{\beta(t)}{2}\right)\right)^{-1}e^{i(-kx+\omega t+\theta)},$$

حالت سوم: جواب‌ها به‌صورت توابع هایپربولیک

برای حالتی که $4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)<0$ جواب‌های معادله (۱) عبارتند از:

$$q_1(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{\left(\beta(t)-2\gamma(t)h\right)\left(-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\right)^{3/2}}{(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\delta^2}e^{i(-kx+\omega t+\theta)}+\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\gamma(t)}{\delta}\times\left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(-\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}\tanh\left[\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}(x-ct)\right]-\frac{\beta(t)}{2}\right)\right)e^{i(-kx+\omega t+\theta)}+\frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\left(\gamma(t)h^2+\alpha(t)-\beta(t)h\right)}{\delta}\times$$

$$\left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(-\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2} \tanh\left[\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}(x-ct)\right] -\frac{\beta(t)}{2} \right)\right)^{-1} e^{i(-kx+\omega t+\theta)},$$

در ضمن برای این حالت جواب بعدی را به‌صورت زیر داریم:

$$q_1(x,t)= -\frac{1}{2}\frac{\left(\beta(t)-2\gamma(t)h\right)\left(-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\right)^{3/2}}{(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)\delta^2} e^{i(-kx+\omega t+\theta)} + \frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\gamma(t)}{\delta}\times \left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(-\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2} \coth\left[\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}(x-ct)\right] -\frac{\beta(t)}{2} \right)\right) e^{i(-kx+\omega t+\theta)} + \frac{\sqrt{-\delta(2\lambda+2\gamma+\alpha+\beta)}\left(\gamma(t)h^2+\alpha(t)-\beta(t)h\right)}{\delta}\times \left(m+\frac{1}{\gamma(t)}\left(-\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2} \coth\left[\frac{\sqrt{4\gamma(t)\alpha(t)-\beta^2(t)}}{2}(x-ct)\right] -\frac{\beta(t)}{2} \right)\right)^{-1} e^{i(-kx+\omega t+\theta)},$$

۴. نتیجه‌گیری

در این پژوهش معادله غیرخطی لاکشمین–پوسیزین–دانیل جهت یافت جواب‌های سالیتونی از نوع توابع نمایی و هایپربولیک مورد مطالعه قرار گرفت. با مقایسه جواب‌های به‌دست آمده توسط این روش با سایر روش‌ها همچون روش تانژانت هایپربولیک، روش سینوس کسینوس، روش تابع نمایی و روش جیپریم جی که تاکنون این معادله را مورد بحث قرار داده‌اند به این نتیجه می‌رسیم که تنوع جواب‌ها در این روش به مراتب بالاتر از سایر روش‌هایی است که در این زمینه بکار گرفته می‌شوند. با توجه به سهولت در یافتن جواب‌ها می‌توان این روش را برای انواع معادلات دیگر نیز به‌کار برد.

فهرست منابع

[1]. J. Manafian, M. Lakestani, Optical solitons with Biswas-Milovic equation for Kerr law nonlinearity, Eur. Phys. J. Plus 130, 61 (2015).

[2]. J. Manafian, On the complex structures of the Biswas-Milovic equation for power, parabolic and dual parabolic law nonlinearities, Eur. Phys. J. Plus 130, 255 (2015).

[3]. W.X. Ma, J.-H. Lee, Chaos, A transformed rational function method and exact solutions to the 3+1 dimensional Jimbo–Miwa equation, Solitons Fractals 42, 1356 (2009).

[4]. Ekici, M., Zhou, Q., Sonmezoglu, A., Manafian, J., & Mirzazadeh, M. (2017). The analytical study of solitons to the nonlinear Schrödinger equation with resonant nonlinearity. OptikInternational Journal for Light and Electron Optics, 130, 378–382.

[5]. J. Manafian, M. Lakestani, Dispersive dark optical soliton with Tzitzéica type nonlinear evolution equations arising in nonlinear optics, Opt. Quantum Electron. 48, 116 (2016).

[6]. J. Manafian, M. Lakestani, Solitary wave and periodic wave solutions for Burgers, Fisher, Huxley and combined forms of these equations by the (G′/G)-expansion method, Pramana J. Phys. 130, 31 (2015).

[7]. J. Manafian, M Lakestani, A Bekir, Comparison between the generalized tanh–coth and the (G′/G)-expansion methods for solving NPDEs and NODEs, Pramana J. Phys. 87 (6), 95 (2016).

[8] A. Neirameh, Binary simplest equation method to the generalized Sinh–Gordon equation Optik - International Journal for Light and Electron Optics, Volume 126, Issue 23, December 2015, 4763-4770.

[9] A.Neirameh, M. Mehdipoor, New soliton solutions to the (3+1)-dimensional Jimbo–Miwa equation"Optik - International Journal for Light and Electron Optics, Volume 127, Issue 4, February 2016, 4718-4722.

[10] M. Eslami, A. Neirameh, New solitary and double periodic wave solutions for a generalized sinh-Gordon equation, The European Physical Journal Plus, April 2014, 129:54.

[11]. J Manafian, M. Foroutan, and A. Guzali, Applications of the ETEM for obtaining optical soliton solutions for the Lakshmanan-Porsezian-Daniel model, Eur. Phys. J. Plus 132: 494(2017).

[12]. A. J. M. Jawad, M Abu-AlShaeer1, A. Biswas, Q. Zhou, S. Moshokoa4 & M. Belic, Optical solitons to Lakshmanan-Porsezian-Daniel model for three nonlinear forms, https://doi.org/ 10.1016/ j.ijleo.2018.01.121.

[13] E M E Zayed and Abdul-Ghani Al-Nowehy, The Riccati equation method combined with the generalized extended (G′/G)-expansion method for solving the nonlinear KPP equation, journal of mathematical research with application, 37(5), 577-590, (2017)

[14] Elsayed M.E. Zayed, Khaled A.E. Alurr, THE HOMOGENEOUS BALANCE METHOD AND ITS APPLICATIONS FOR FINDING THE EXACT SOLUTIONS FOR NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS, italian journal of pure and applied mathematics, n. 33, 307-318(2014)