دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دوازدهم، زمستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۰۱۶۹-۱۶۸۲
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

# حل معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی یک بعدی در فضای هسته بازتولید

**عباس فضلی[۱]*، شهنام جوادی[۲]**

(۱) گروه ریاضی کاربردی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۴/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۲/۱۶

**چکیده**

در این مقاله یک معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی یک بعدی را حل می‌کنیم. بدین منظور با استفاده از شکل معادله، یک عملگر خطی تعریف می‌کنیم و با استفاده از آن و عملگر الحاقی‌اش و توابع هسته باز تولید یک پایه برای فضای توابع به دست می‌آوریم. سپس جواب معادله انتگرال را بر حسب این توابع پایه‌ای به دست می‌آوریم. مثال‌های ارائه شده در این مقاله صحت و اعتبار روش را نشان می‌دهند. اما این روش برای معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیر خطی یک بعدی نتیجه‌ای به دست نمی‌دهد، در این حالت یک روش جدید برای محاسبه ضرایب فوریه بایستی ارائه شود بنابراین تمرکز بعدی ما ارائه یک روش برای محاسبه ضرایب فوریه در حالت غیر خطی است. این روش به راحتی قابل تعمیم برای معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی دو بعدی است و ما روی این موضوع در مقاله دیگر کار می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** معادله انتگرال ولترا، هسته باز تولید، ضرایب فوریه.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: Fazli1355@gmail.com

## ۱- مقدمه

همانطور که می‌دانید معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی یک بعدی در بسیاری از علوم و مهندسی دارای کاربردهای فراوانی است. در سال‌های اخیر چندین روش برای حل این معادلات داده شده است. به عنوان مثال وزواز[1] در [۱و۲] روش‌های آدومین[2] و تکرار نوسانی[3] برای حل این گونه معادلات ارائه داده است. همچنین در [۳] روش تابع هار کسری و در [۴و۵] روش موجک-گلرکین[4] ارائه شده است. در این مقاله یک روش جدید برای حل این معادله ارائه خواهیم کرد. بدین منظور معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی یک بعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt \qquad (۱)$$

که در آن $x\in[0,1]$، $u(x)$ یک تابع مجهول و $u(x), f(x)\in W_2^1[0,1]$.

فضای تابعی $W_2^1[0,1]$ یک فضای هسته باز تولید است که در بخش بعدی تعریف خواهد شد. هدف ما در این مقاله پیدا کردن تابعی مانند $u(x)$ در $W_2^1[0,1]$ است به طوری که در معادله (۱) صدق کند. بدین منظور با توجه به شکل معادله (۱) یک عملگر خطی روی $W_2^1[0,1]$ تعریف می‌کنیم. سپس با استفاده از عملگر الحاقی نظیر و توابع هسته باز تولید در $W_2^1[0,1]$ یک پایه برای آن می‌سازیم. سپس جواب معادله (۱) را بر حسب این پایه به دست می‌آوریم.

## ۲- مفاهیم اساسی

در زیر چند تعریف ارائه خواهد شد که در بخش های بعدی از آنها استفاده می کنیم:

**تعریف ۲-۱:** فضای تابعی $W_2^1[0,1]$ به صورت زیر است:

$$W_2^1[0,1]=$$
$$\{f(x)\mid \quad \text{مطلقاً پیوسته } f(x) \quad f'(x)\in L^2[0,1] \quad ,x\in[0,1]\}$$

**تعریف۲-۲:** ضرب داخلی و نرم در فضای تابعی $W_2^1[0,1]$ به صورت زیرند:

برای توابع $f(x), g(x)\in W_2^1[0,1]$، ضرب داخلی:

$$<f(x),g(x)>_{W_2^1[0,1]}=$$
$$f(0)g(0)+\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

و نرم:

$$\|f\|_{W_2^1}=\sqrt{<f(x),f(x)>_{W_2^1[0,1]}}$$

به سادگی ثابت می‌شود که $W_2^1[0,1]$ یک فضای ضرب داخلی است. در [۶] ثابت می شود که فضای تابعی $W_2^1[0,1]$ یک فضای هیلبرت و همچنین یک فضای هسته باز تولید است.

فرض کنید که $r_y(x)$ هسته باز تولید $W_2^1[0,1]$ باشد در این صورت به ازای هر $f(x)\in W_2^1[0,1]$ داریم

$$<f(x),r_y(x)>_{W_2^1[0,1]}=f(y)$$

با محاسبه به دست می‌آوریم که

$$r_y(x)=\begin{cases}1+x & x\le y\\ 1+y & x>y\end{cases}$$

به [۶] مراجعه نمایید.

## ۳- روش حل معادله

برای به دست آوردن جواب معادله (۱) در $W_2^1[0,1]$، ابتدا یک عملگر خطی روی $W_2^1[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $u(x)\in W_2^1[0,1]$، قرار می‌دهیم:

$$(Lu)(x)=u(x)-\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

اگر $u(x)$ جواب معادله (۱) باشد در این صورت داریم:

$$(Lu)(x)=f(x) \qquad (۲)$$

1. Wazwaz
2. Adomian
3. Variational Iteration
4. Wavelete-Galerkin

بنابراین مسئله ما تبدیل می‌شود به یافتن تابعی مانند $f(x)$ به طوری که در معادله (۲) صدق کند. فرض کنیم $L^*$ عملگر الحاقی نظیر $L$ و دنباله $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در بازه $[0,1]$ چگال باشد در این حالت قرار می‌دهیم:

$$\phi_i(x) = r_{x_i}(x)$$

و

$$\psi_i(x) = (L^*\phi_i)(x)$$

یا

$$\psi_i(x) = r_x(x_i) - \lambda\int_0^{x_i} K(x_i,t) r_x(t)dt$$

با استفاده از روند متعامد سازی گرام- اشمیت یک دنباله متعامد یکه مانند $\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ از روی دنباله $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ می‌سازیم. فرض کنید $\beta_{ik}$ ضرایب در روند گرام- اشمیت به صورت زیر باشند:

$$\overline{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik}\psi_k(x)$$

دنباله $\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ در فضای $W_2^1[0,1]$ کامل نیست، اما می‌توان آن را به یک پایه برای $W_2^1[0,1]$ توسیع داد. بدین منظور داریم،

$$span(\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}) = \{u(x) \mid u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\overline{\psi}_i(x), c_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

گیریم $S$ بستار این زیر فضا به صورت زیر باشد،

$$S = \overline{span(\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty})}$$

و $S^{\perp}$ زیر فضای مکمل متعامد $S$ در $W_2^1[0,1]$ باشد. با استفاده از روش زیر یک پایه برای $S^{\perp}$ به دست می‌آوریم، قرار می‌دهیم:

$$\overline{\phi}_j(x) = \frac{\rho_j(x)}{\|\rho_j(x)\|_{W_2^1}}$$

که در آن

$$\rho_j(x) = \phi_j(x) - \sum_{i=1}^{\infty} < \phi_j(x), \overline{\psi}_i(x) >_{W_2^1} \overline{\psi}_i(x) - \sum_{i=1}^{j-1} < \phi_i(x), \overline{\phi}_i(x) >_{W_2^1} \overline{\phi}_i(x)$$

و $j = 1,2,\ldots$ و به ازای $j=1$ ، $\sum_{i=1}^{j-1} = 0$. دنباله $\{\overline{\phi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه برای $S^{\perp}$ است. چون $\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{\overline{\phi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ به ترتیب پایه هایی برای $S$ و $S^{\perp}$ هستند و $W_2^1[0,1] = S \oplus S^{\perp}$ بنابراین،

$$B = \{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \cup \{\overline{\phi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$$

یک پایه برای $W_2^1[0,1]$ است.

**قضیه۳-۱:** اگر دنباله $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ در بازه $[0,1]$ چگال باشد آنگاه جواب معادله (۱) به صورت زیر است:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} f(s_k)\overline{\psi}_i(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \overline{\phi}_j(x) \qquad (۳)$$

که در آن $\alpha_j$ ها از دستگاه معادلات خطی زیر به دست می‌آیند،

$$f(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x_n) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (L\overline{\phi}_j)(x_n) \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (۴)$$

**اثبات:** فرض کنیم $u(x) \in W_2^1[0,1]$ جواب معادله (۱) باشد در این صورت با بسط $u(x)$ بر حسب پایه $B$ داریم،

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} < u(x), \overline{\psi}_i(x) >_{W_2^1} \overline{\psi}_i(x) + \sum_{j=1}^{\infty} < u(x), \overline{\phi}_j(x) >_{W_2^1} \overline{\phi}_j(x)$$

گیریم $\alpha_j = < u(x), \overline{\phi}_j(x) >_{W_2^1}$ بنابراین تساوی فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} < u(x), \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik}\psi_k(x) >_{W_2^1} \overline{\psi}_i(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \overline{\phi}_j(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} < u(x), \psi_k(x) >_{W_2^1} \overline{\psi}_i(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} < u(x), (L^*\phi_k)(x) >_{W_2^1} \overline{\psi}_i(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} < (Lu)(x), \phi_k(x) >_{W_2^1} \overline{\psi}_i(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} < f(x), \phi_k(x) >_{W_2^1} \overline{\psi}_i(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} f(s_k)\overline{\psi}_i(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$

چون $L$ یک عملگر خطی است از (۳) نتیجه می‌گیریم که،

$$(Lu)(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(L\overline{\phi}_j)(x)$$

اما $(Lu)(x) = f(x)$ بنابراین،

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(L\overline{\phi}_j)(x)$$

به خصوص برای $x = x_n$ داریم،

$$f(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x_n) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(L\overline{\phi}_j)(x_n)$$

که در آن $n = 1, 2, \ldots$.

اکنون جواب تقریبی معادله (۱) با برش سری (۳) به صورت زیر به دست می‌آید،

$$u_{n,m}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} f(s_k)\overline{\psi}_i(x) + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$

و $\alpha_j$ها صادق در دستگاه معادلات خطی زیر هستند،

$$f(x_l) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x_l) + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j(L\overline{\phi}_j)(x_l)$$

که در آن $l = 1, 2, \ldots$.

**قضیه۳-۲:** هرگاه $u(x)$ جواب معادله (۱) و $r_{n,m}(x)$ خطای جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ باشد که $u(x)$ و $u_{n,m}(x)$ بترتیب توسط فرمول‌های (۳) و (۴) داده شده‌اند آنگاه نتایج زیر به دست می‌آیند:

الف) جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ همگرا به جواب دقیق $u(x)$ به معنای $\|.\|_{W_2^1}$ است.

ب) خطای $r_{n,m}(x)$ یکنوا نزولی به معنای $\|.\|_{W_2^1}$ است و

$$\lim_{n,m\to\infty}\|r_{n,m}(x)\|_{W_2^1} = 0$$

**اثبات:** (الف) چون $B$ یک پایه متعامد نرمال $W_2^1[0,1]$ است از (۳) نتیجه می‌گیریم که $u_{n,m}(x)$ به $u(x)$ همگرا است.

(ب) داریم،

$$\|r_{n+1,m+1}(x)\|_{W_2^1}^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik} f(s_k))^2 + \sum_{j=m+1}^{\infty}\alpha_j^2 - [\sum_{k=1}^{i}\beta_{(n+1)k} f(s_k)]^2 - \alpha_{m+1}^2$$

$$= \|r_{n,m}(x)\|_{W_2^1}^2 - [\sum_{k=1}^{i}\beta_{(n+1)k} f(s_k)]^2 - \alpha_{m+1}^2$$

بنابراین،

$$\|r_{n+1,m+1}(x)\|_{W_2^1}^2 \le \|r_{n,m}(x)\|_{W_2^1}^2$$

و لذا

$$\left\|r_{n+1,m+1}(x)\right\|_{W_2^1} \le \left\|r_{n,m}(x)\right\|_{W_2^1}$$

پس بنا به (الف) خواهیم داشت،

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|r_{n,m}(x)\right\|_{W_2^1}=0$$

## ۴- مثال‌های عددی

در این بخش چند مثال ارائه می‌دهیم که روش فوق را روی آنها پیاده‌سازی می‌کنیم. مقادیر جواب تقریبی در نقاط $x_i$ که در آن $i=1,2,\dots,10$ را محاسبه می‌کنیم و آنها را با جواب دقیق معادله (۱) مقایسه می‌نماییم. مقادیر به دست آمده صحت روش را تایید می‌کنند.

**مثال ۴-۱:** معادله انتگرال ولترای خطی نوع دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x)=\sin(x)+2\int_0^x \sin(2x-2t)u(t)dt$$

جواب دقیق این معادله عبارتست از $u(x)=4x-3\sin(x)$ جدول ۱ نتایج عددی این مثال را نشان می دهد.

**مثال ۴-۲:** معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x)=x+\int_0^x \sin(x-t)u(t)dt$$

جواب دقیق این معادله $u(x)=x+\dfrac{x^3}{6}$ است. جدول ۲ نتایج عددی مربوط به این مثال را نشان می‌دهد.

**جدول ۱: خطای مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴-۱**

| $i$ | $x_i$ | جواب دقیق $u(x)$ | جواب تقریبی $u_{50,50}(x)$ | خطای مطلق |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1004997500 | 0.1007005842 | 0.0002008342 |
| 2 | 0.2 | 0.2039920076 | 0.2037188495 | 0.0002731581 |
| 3 | 0.3 | 0.3134393799 | 0.3140408253 | 0.0006014454 |
| 4 | 0.4 | 0.431744973 | 0.4335841123 | 0.0018391393 |
| 5 | 0.5 | 0.561723384 | 0.5645375201 | 0.0028141361 |
| 6 | 0.6 | 0.706072580 | 0.7099262038 | 0.0038536238 |
| 7 | 0.7 | 0.867346938 | 0.8723574500 | 0.0050105120 |
| 8 | 0.8 | 1.047931727 | 1.053988106 | 0.006056379 |
| 9 | 0.9 | 1.250019271 | 1.256086743 | 0.006067472 |
| 10 | 1 | 1.475587046 | 1.434412785 | 0.041174261 |

**جدول ۲: خطای مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴-۲**

| $i$ | $x_i$ | $u(x)$ جواب دقیق | $u_{40,40}(x)$ جواب تقریبی | خطای مطلق |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | .1001666667 | 0.09963474708 | 0.00053191962 |
| 2 | 0.2 | .2013333333 | 0.2016640777 | 0.0003307444 |
| 3 | 0.3 | .3045000000 | 0.3045884224 | 0.0000884224 |
| 4 | 0.4 | .4106666667 | 0.4116167810 | 0.0009501143 |
| 5 | 0.5 | .5208333333 | 0.5219489476 | 0.0011156143 |
| 6 | 0.6 | .6360000000 | 0.6374922784 | 0.0014922784 |
| 7 | 0.7 | .7571666667 | 0.7592649969 | 0.0020983302 |
| 8 | 0.8 | .8853333333 | 0.8880116366 | 0.0026783033 |
| 9 | 0.9 | 1.021500000 | 1.024615183 | 0.003115183 |
| 10 | 1 | 1.166666667 | 1.133984638 | 0.032682029 |

**مثال ۴-۳:** معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x)=f(x)+\int_0^x (2x^2-8)\sin(xt)u(t)dt$$

که در آن

$$f(x)=-2x+4\sin(x^2)(\sin 2x-\cos 2x)$$
$$+(\sin 2x+\cos 2x)(1+2x\cos(x^2))$$

جواب دقیق این معادله به صورت $u(x)=\sin 2x+\cos 2x$ می‌باشد. جدول ۳ نتایج عددی مربوط به این مثال را نشان می‌دهد.

**مثال ۴-۴:** معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی ریر را در نظر بگیرید:

$$u(x)=\frac{1}{\cos(x^2)}-xe^x\tan(x^2)+$$
$$\int_0^x \frac{(1+x^2)\cos(xt)}{\cos(x^2)}u(t)dt$$

جواب دقیق این معادله عبارتست از $u(x)=e^x$. جدول ۴ نتایج عددی مربوط به این مثال را نشان می‌دهد.

**جدول ۳: خطای مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴-۳**

| $i$ | $x_i$ | جواب دقیق $u(x)$ | جواب تقریبی $u_{30,30}(x)$ | خطای مطلق |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 1.178735909 | 1.178512166 | 0.0002 |
| 2 | 0.2 | 1.310479336 | 1.309749905 | 0.0008 |
| 3 | 0.3 | 1.389978088 | 1.388496239 | 0.0015 |
| 4 | 0.4 | 1.414062800 | 1.415276569 | 0.0012 |
| 5 | 0.5 | 1.381773291 | 1.381451467 | 0.0003 |
| 6 | 0.6 | 1.294396840 | 1.294206443 | 0.0002 |
| 7 | 0.7 | 1.155416873 | 1.153560835 | 0.0018 |
| 8 | 0.8 | 0.9703740807 | 0.9621475627 | 0.00822 |
| 9 | 0.9 | 0.7466455362 | 0.7288779277 | 0.01777 |
| 10 | 1 | 0.4931505903 | 0.5466505827 | 0.05350 |

**جدول ۴: خطای مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴-۴**

| $i$ | $x_i$ | جواب دقیق $u(x)$ | جواب تقریبی $u_{50,50}(x)$ | خطای مطلق |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 1.105170918 | 1.105312301 | 0.000141383 |
| 2 | 0.2 | 1.221402758 | 1.221702606 | 0.000299848 |
| 3 | 0.3 | 1.349858808 | 1.350573580 | 0.000714772 |
| 4 | 0.4 | 1.491824698 | 1.493597858 | 0.001773160 |
| 5 | 0.5 | 1.648721271 | 1.648998216 | 0.000276945 |
| 6 | 0.6 | 1.822118800 | 1.822704111 | 0.000585311 |
| 7 | 0.7 | 2.013752707 | 2.014300034 | 0.000547327 |
| 8 | 0.8 | 2.225540928 | 2.227017513 | 0.001476585 |
| 9 | 0.9 | 2.459603111 | 2.457640764 | 0.001962347 |
| 10 | 1 | 2.718281828 | 2.657601055 | 0.060680773 |

## نتیجه گیری

در این مقاله ما روی معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی یک بعدی کار کردیم. روش به کاربرده شده در این مقاله به راحتی قابل تعمیم به حالت دو بعدی است. اما این روش را نمی‌توان برای معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیر خطی استفاده کرد، در این حالت برای محاسبه $\alpha_j$ها بایستی از روش جدید استفاده نمود. بنابراین تمرکز بعدی ما محاسبه $\alpha_j$ها در حالت غیرخطی است. در این مقاله محاسبات با نرم افزار $Maple$ انجام شده است. ما معتقدیم که روش حاضر در این مقاله با تغییر عملگر $L$ مجدداً قابل پیاده سازی است.

## فهرست منابع

[1] A. M. Wazwaz. A first course in integral equations. World Scientific. singapour(1997)

[2] A. M. Wazwaz. Linear and nonlinear integral equation: methods and applications. Higher Education Press and Springer Verlage (2011)

[3] M. H. Reihani, Z. Abadi. Rationalized Harr functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations. Journal of Computational and Applied Mathematics 12-20 (2007)

[4] J. Saberi-Nadjafi, M. Mehrabinezhad, T. Diogo. The Coiflet-Galerkin method for linear Volterra integral equations. Applied Mathematics and Computation 221:469-483(2013)

[5] J. Saberi-Nadjafi, M. Mehrabinezhad, H. Akbari. Solving Volterra integral equations of the second kind by Wavelet-Galerkin scheme. Computer and Mathematics with Applications 63:1536-1547(2012)

[6] Miggen Cui, Yingzhen Lin.Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space.Nova Science Publishers, Inc (2008)