دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

انتهاهای بدیهی گراف کیلی گروه‌ها

هانیه میرابراهیمی*[۱]، آمنه بابایی[۲]

[۱ و ۲] گروه ریاضی محض، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۴/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۰۱

چکیده

در این مقاله ابتدا انتهای گراف‌های موضعاً متناهی را به عنوان رده هم‌ارزی مسیرهای نامتناهی در گراف معرفی می‌کنیم. سپس انتهای گروه‌های متناهی تولید شده را بازگو می‌کنیم که با استفاده از گراف کیلی تعریف می‌شود. ثابت شده است که تعداد انتهاهای گروه‌ها به گراف کیلی وابسته نیست و برابر با صفر، یک، دو و یا نامتناهی است. برای هر یک از این اعداد نتایجی در ساختار گروه‌ها به دست آمده است که شناخته‌شده‌ترین آن‌ها قضیه‌ای موسوم به قضیه استالینگز است و ساختار گروه‌هایی با بیش از یک انتها را به عنوان حاصلضرب آزاد ملقمه‌ای یا توسیع HNN ارائه می‌دهد. به طور خاص‌تر ثابت شده است که گروهی با دقیقا دو انتها یک گروه مجازی Z است. بعد از آن انتهای بدیهی گراف‌ها را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که انتهای بدیهی دقیقا وابسته به نوع خاصی از مسیر نامتناهی است. در پایان ثابت می‌کنیم وجود انتهای بدیهی برای گراف کیلی یک گروه معادل آن است که گروه آزاد باشد و این نتیجه می‌دهد که گراف کیلی یک گروه یک انتهای بدیهی دارد اگر و تنها اگر تمام انتهاهای آن بدیهی باشند.

واژه‌های کلیدی: فضای انتها، ۱-همبافت، گراف کیلی، گروه متناهی تولید شده، گروه آزاد.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: h_mirebrahimi@um.ac.ir

۱- مقدمه

انتهاهای گراف‌ها از سال‌های دور مورد مطالعه بوده است. اولین بار هالین در سال ۱۹۶۴ انتهای گراف را به عنوان رده هم ارزی مسیرهای یک‌طرفه نامتناهی تعریف کرد.

قبل از تعریف انتها مفهوم مسیر در گراف را یاداوری می‌کنیم. در این مقاله، منظور از گراف، یک گراف همبند موضعا متناهی بدون جهت و طوقه است. یک مسیر گرافی خود گرافی مانند $P=(V,E)$ به شکل $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$ و $E=\{x_0x_1,x_1x_2,\ldots,x_{k-1}x_k\}$ است که در آن x_iها دو به دو متمایز هستند [۱، ص ۶]. گراف ثابت $\Gamma=(V,E)$ را در نظر بگیرید. یک مسیر گرافی نامتناهی با شروع از رأسی مشخص را یک پرتو در Γ می‌نامند. به عنوان مثال $v_0v_1v_2\cdots$ یک پرتو است به شرطی که اولا v_iها متعلق به V و دو به دو متمایز باشند و ثانیا هر v_iv_{i+1} برای هر $i\geq 0$ یک یال در E باشد. دو پرتو را هم‌ارز می‌خوانند هرگاه هیچ مجموعه متناهی از رئوس آن دو را جدا نکند، به این معنی که مجموعه متناهی از رئوس مانند Fوجود نداشته باشد به طوری که امتداد دو پرتو در دو مولفه همبندی از $\Gamma\setminus F$ قرار گیرند. این رابطه بین پرتوها، تشکیل یک رابطه هم‌ارزی می‌دهد [۲، ص ۲۶۴۵].

تعریف ۱-۱

فرض کنید Γ یک گراف همبند موضعا متناهی باشد. رده‌های هم‌ارزی این رابطه هم‌ارزی را انتهای Γ [1] می‌نامند و مجموعه انتهاهای Γ را با $\Omega(\Gamma)$نمایش می‌دهند. گراف Γ را همراه با انتهاهای آن، با $\overline{\Gamma}$نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۲

فضای اعداد حقیقی R را به عنوان گرافی در نظر بگیرید که رئوس آن اعداد صحیح هستند و یال‌های آن بازه‌های واحد بین اعداد صحیح است. شکل (۱) این گراف را نمایش می‌دهد. یادآور می‌شویم که در این مقاله گراف‌ها بدون جهت فرض می‌شوند و پیکان‌ها برای سادگی و وضوح شکل به کار رفته‌اند.

پرتوهای موجود در این گراف به دو شکل $n(n+1)(n+2)\cdots$ و $n(n-1)(n-2)\cdots$ هستند که در آن $n\in\mathsf{Z}$. هر یک از این دو شکل نمایشگر یک رده از پرتوهای هم‌ارز است. بنابراین این گراف دو انتها دارد که آن دو را با نماد $+\infty$و $-\infty$ نشان می‌دهند (شکل ۱ را ببینید).

توجه ۱-۳

در حالت کلی، انتها برای هر فضای توپولوژیک دلخواه X تعریف شده است. روی فضای توپولوژیک X به انضمام انتهاهای آن، $\overline{X}$، یک توپولوژی تعریف می‌شود که فشرده است و گسترشی از توپولوژی اولیه فضای X است. این فضای فشرده، فشرده‌سازی فرویدنتهال[2] خوانده می‌شود [۲، ص ۲۶۴۵].

اگر گراف موضعا متناهی Γرا فضای توپولوژیک به عنوان ۱–همبافت در نظر بگیریم، انتهاهای آن در تعریف فضای توپولوژیک با مفهوم انتها در تعریف ۱-۱ منطبق است [۳، قضیه ۴،۱۱]. همچنین فشرده‌سازی فرویدنتهال برای گراف‌های موضعا متناهی با یک توپولوژی مطابقت دارد که در تعریف ۱-۴ معرفی می‌شود. اکنون $\overline{\Gamma}$ یک مجموعه شامل گراف Γ است. در تعریف ۱-۴ به نقل از [۲، ص ۲۶۴۵]، یک پایه توپولوژی روی $\overline{\Gamma}$معرفی می‌کنیم و بعد از این منظور از $\overline{\Gamma}$، فضای توپولوژیک مذکور است. گوییم انتهای ω در مجموعه‌ای مانند C قرار می‌گیرد هرگاه امتداد تمام پرتوهای متعلق به ω در C قرار گیرند.

$$\cdots \longrightarrow -4 \longrightarrow -3 \longrightarrow -2 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \cdots$$

شکل (۱): اعداد حقیقی به عنوان گراف.

1. End
2. Freudenthal compactification

تعریف ۴-۱

توپولوژی تولید شده توسط مجموعه‌های ذیل را روی $\overline{\Gamma}$ در نظر بگیرید:

(الف) مجموعه‌های باز Γ، به عنوان ۱-همبافت،

(ب) مجموعه‌هایی مانند $\overline{C}(F,\omega)$ که برای هر مجموعه متناهی از رئوس مانند F و هر انتهای ω از اجتماع سه دسته نقطه زیر تشکیل می‌شود: ۱) تنها مولفه همبندی C از $\Gamma \setminus F$ که ω در آن قرار می‌گیرد، ۲) تمام انتهاهایی که در C قرار می‌گیرند و ۳) تمام یال‌های باز بین F و C که تعدادشان متناهی است. منظور از یال باز، مجموعه تمام نقاط یال به جز دو رأس آغازین و پایانی یال است.

انتهاها و توپولوژی فشرده‌سازی فرویدنتهال برای گراف‌هایی که لزوما موضعا متناهی نیستند، در [۴] به نحوی متفاوت ارائه شده است که در حالت موضعا متناهی با تعریف‌های ۱-۱ و ۴-۱ مطابقت دارد. اگر Γ یک گراف دلخواه و نه لزوماً موضعا متناهی باشد، ثابت شده است که Γ در $\overline{\Gamma}$ چگال است و $\overline{\Gamma}$ فشرده است. همچنین مجموعه انتهای Γ، $\Omega(\Gamma)$ یک فضای همه‌جا ناهمبند است [۴، قضیه ۱]، به این معنا که مولفه‌های همبندی آن تک‌عنصری هستند. فضاهای گسسته مثالی از فضاهای همه‌جا ناهمبند هستند.

در لم ذیل ثابت می‌کنیم که مجموعه‌های معرفی شده در تعریف ۴-۱، پایه موضعی حول انتهاها تشکیل می‌دهد.

لم ۵-۱

مجموعه‌های $\overline{C}(F,\omega)$ که در تعریف ۴-۱ معرفی شده‌اند، تشکیل یک پایه موضعی برای $\overline{\Gamma}$ حول ω می‌دهند.

اثبات. برای این که نشان دهیم مجموعه‌های تعریف ۴-۱ یک پایه موضعی برای $\overline{\Gamma}$ در نقطه ω می‌سازد، لازم است برای هر دو عنصر دلخواه از آن، مانند $\overline{C}(F_0,\omega)$ و $\overline{C}(F_1,\omega)$، عنصری معرفی کنیم که زیرمجموعه اشتراک آن دو باشد. ادعا می‌کنیم مجموعه $\overline{C}(F_0\cup F_1,\omega)$ همان مجموعه مورد نظر است.

چون F_0 و F_1 متناهی هستند، مجموعه رئوس $F_0\cup F_1$ نیز متناهی است. بنابراین کافی است ثابت کنیم $\overline{C}(F_0\cup F_1,\omega)\subseteq\overline{C}(F_0,\omega)$ و $\overline{C}(F_0\cup F_1,\omega)\subseteq\overline{C}(F_1,\omega)$.

مجموعه باز $\overline{C}(F_0\cup F_1,\omega)$ عبارت است از تنها مولفه همبندی C از $\Gamma\setminus(F_0\cup F_1)$ که ω در آن قرار می‌گیرد، همراه با تمام انتهاهایی که در C قرار می‌گیرند و تمام یال‌های باز بین $F_0\cup F_1$ و C که تعدادشان متناهی است. اکنون نشان می‌دهیم که تمام این سه بخش از $\overline{C}(F_0\cup F_1,\omega)$ در $\overline{C}(F_0,\omega)$ و به روش مشابه در $\overline{C}(F_1,\omega)$ قرار می‌گیرند.

چون $\Gamma\setminus(F_0\cup F_1)\subseteq\Gamma\setminus F_0$، مولفه‌های همبندی $\Gamma\setminus(F_0\cup F_1)$ زیرمجموعه مولفه‌های همبندی $\Gamma\setminus F_0$ هستند، پس $C\subseteq\overline{C}(F_0,\omega)$. همچنین اگر انتهایی از Γ در C قرار گیرد، در مولفه همبندی وابسته به $\overline{C}(F_0,\omega)$ نیز قرار می‌گیرد. حال یالی مانند $e=xy$ بین C و $F_0\cup F_1$ در نظر می‌گیریم. باید نشان دهیم یال باز وابسته به آن زیرمجموعه مجموعه $\overline{C}(F_0,\omega)$ است. یکی از دو رأس این یال مثلا x به C و y به $F_0\cup F_1$ تعلق دارد. اگر y در F_0 قرار داشته باشد، بنابر تعریف ۴-۱ (ب)، یال باز در $\overline{C}(F_0,\omega)$ قرار می‌گیرد. در غیر این صورت رأس y به $F_1\setminus F_0$ تعلق دارد. رأس x به C تعلق دارد و C زیرمجموعه مولفه همبندی C'، پس از حذف F_0 است که ω در آن قرار می‌گیرد. بنابراین x به C' تعلق دارد. چون y به F_0 تعلق ندارد، به $\Gamma\setminus F_0$ تعلق دارد. از سوی دیگر یال e از یک رأس C' به y متصل شده است. بنابراین تمام یال e زیرمجموعه C' است. چون $C'\subseteq\overline{C}(F_0,\omega)$ است، یال e زیرمجموعه $\overline{C}(F_0,\omega)$ است. اکنون در هر دو حالت $y\in F_0$ و $y\in F_1\setminus F_0$، یال باز e در $\overline{C}(F_0,\omega)$ قرار می‌گیرد. در نتیجه یال‌های باز تعریف ۴-۱ (ب) نیز زیرمجموعه $\overline{C}(F_0,\omega)$ هستند. بنابراین:

$$\overline{C}(F_0 \cup F_1, \omega) \subseteq \overline{C}(F_0, \omega)$$

مثالی که در ادامه می‌آید، نشان می‌دهد که توپولوژی تعریف ۴-۱ در برخی موارد بسیار ملموس است.

۲- پیشینه تحقیق

انتهاها برای گروه‌ها نیز تعریف و بررسی شده‌اند که متناظر با انتهای‌های گراف کیلی گروه‌ها است. ابتدا تعریف گراف کیلی یک گروه دلخواه را یاداوری می‌کنیم. فرض کنید G یک گروه و S یک مجموعه مولد برای G باشد. متناظر با هر مجموعه مولد S یک گراف به نام گراف کیلی برای گروه G تعریف می‌شود که با نماد $\Gamma(G,S)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱-۲

فرض کنید G یک گروه و S یک مجموعه مولد برای G باشد. در این صورت گراف کیلی گروه G وابسته به مجموعه مولد S، گراف $\Gamma(G,S)$ با مجموعه رئوس متناظر با مجموعه عناصر G است که یال‌های آن به این صورت تعریف می‌شود: برای هر دو رأس g و h، از g به h یالی وجود دارد اگر و تنها اگر $s \in S \cup S^{-1}$ وجود داشته باشد به طوری که $h = gs$ [۵، ص ۱۱].

توجه ۲-۲

چون S یک مجموعه مولد برای گروه G است، هر عنصر G توسط دنباله‌ای متناهی از عناصر S تولید می‌شود و بنابراین از هر رأس وابسته به آن عنصر در $\Gamma(G,S)$ یک مسیر متناهی به عنصر همانی وجود دارد. بنابراین $\Gamma(G,S)$ برای هر گروه دلخواه G و مجموعه مولد S همبند است.

با این تعریف، گراف کیلی هر گروه G به انتخاب مجموعه مولد S وابسته است. انتهاهای گروه نیز با توجه به گراف کیلی آن تعریف می‌شود، اما در قضیه ۳-۲ می‌بینیم که فضای انتهاهای گراف کیلی گروه‌های نامتناهی متناهی تولید شده به انتخاب مجموعه مولد وابسته نیست. برای اثبات [۵، نتیجه ۴.۵] و [۵، ص ۱۱] را ببینید.

قضیه ۳-۲

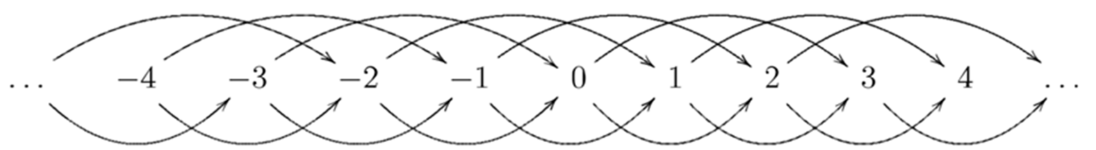
فرض کنید G یک گروه نامتناهی با مجموعه مولد متناهی S باشد و $\Gamma(G,S)$ گراف کیلی گروه G وابسته به S باشد. اگر S' مجموعه مولد متناهی دیگری برای G و $\Gamma(G,S')$ گراف کیلی گروه G وابسته به S' باشد. در این صورت $\Omega(\Gamma(G,S))$ با $\Omega(\Gamma(G,S'))$ همسانریخت است.

با توجه به قضیه ۳-۲، فضای انتهاها برای گروه‌های نامتناهی متناهی تولید شده مستقل از گراف کیلی و مجموعه مولد وابسته به آن قابل بررسی است. بنابراین انتهاهای گراف کیلی گروه‌های متناهی تولید شده را مستقل از گراف کیلی و مجموعه مولد، انتهاهای گروه مفروض می‌خوانند و تعداد آن‌ها را که ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد، با $e(G)$ نشان می‌دهند.
در مثال زیر گراف کیلی گروه دوری نامتناهی Z، را با دو مجموعه مولد متناهی بررسی می‌کنیم.

مثال ۴-۲

گروه دوری نامتناهی Z را با دو مجموعه مولد متناهی $S = \{1\}$ و $S' = \{2,3\}$ در نظر بگیرید. گراف کیلی $\Gamma(\mathsf{Z},\{1\})$ گرافی مشابه گراف معرفی شده در مثال ۱-۲ است که از دید توپولوژیکی با R همسانریخت است. دو نماد $+\infty$ و $-\infty$ برای دو انتهای این گراف به کار می‌رود. با توجه به قضیه ۳-۲ تعداد انتهاها به انتخاب مجموعه مولد وابسته نیست، بنابراین $e(\mathsf{Z}) = 2$.

حال گراف کیلی گروه Z را با مجموعه مولد $\{2,3\}$ در نظر می‌گیریم. مشابه شکل (۱) اعداد صحیح را به عنوان رئوس گراف جدید در نظر می‌گیریم. اما یال‌ها با گراف قبلی متفاوت است، زیرا مجموعه مولدها تغییر کرده است. گراف حاصل به صورت موضعی مشابه شکل (۲) است.



شکل (۲): گراف کیلی $\mathbb{Z}$ با دو مولد $\{2,3\}$.

چند نمونه از پرتوهای این گراف به صورت زیر است:
$0246\cdots,\ \ 0257\cdots,\ \ 0358\cdots,\ \ 0369\cdots,$
که همه آن‌ها به یک رده هم ارزی تعلق دارند. به عنوان مثال هیچ مجموعه متناهی از رئوس نمی‌تواند دو پرتو 0246 و 0369 را جدا کند زیرا برای هر عدد صحیح k، عدد صحیحی مانند $m > k$ وجود دارد به طوری که $m = 3p = 2q$ برای $p,q \in \mathbb{Z}$.
شکل (۲): گراف کیلی $\mathbb{Z}$ با دو مولد $\{2,3\}$. به همین ترتیب نمونه پرتوهای زیر به یک رده هم‌ارزی پرتوها تعلق دارند:
$0\text{–}2\text{–}4\text{–}6\cdots;\ 0\text{–}2\text{–}5\text{–}7\cdots;\ 0\text{–}3\text{–}5\text{–}8\cdots;\ 0\text{–}3\text{–}6\text{–}9\cdots$
همچنین این دو رده پرتوها از هم متفاوت هستند زیرا با مجموعه رئوس $\{-1,0,1\}$ قابل جدا شدن هستند. بنابراین همان طور که از قضیه ۳–۲ بر می‌آید، این گراف نیز دو انتها دارد.
مطالعات متعدد روی تعداد انتهاهای گروه‌ها و ارتباط آن با ساختار گروه‌ها انجام شده و نتایج جالب توجهی در این زمینه به دست آمده است، از جمله قضیه ۵–۲ که بیان می‌کند گروه‌ها صفر، یک، دو و یا تعداد نامتناهی انتها دارند. برای اثبات به [۵، قضیه ۵،۳] رجوع شود.

قضیه ۵–۲

فرض کنید G یک گروه متناهی تولید شده باشد. اگر G تعداد متناهی انتها داشته باشد، آن گاه حداکثر دو انتها دارد.

توجه ۶–۲

گروه‌های متناهی هیچ انتهایی ندارند زیرا رئوس پرتوها باید متمایز باشند و به این دلیل در گروه‌های متناهی هیچ پرتو و در نتیجه انتهایی وجود ندارد. همچنین اگر گروهی نامتناهی باشد، چون گراف کیلی گروه‌ها همبند هستند، می‌توان در آن یک پرتو یافت و بنابراین انتها دارند. در نتیجه برای گروه G، $e(G) = 0$ اگر و تنها اگر G متناهی باشد.
گروه‌هایی با بیش از یک انتها به انواعی از حاصلضرب توسط استالینگز طبقه‌بندی شده‌اند که در قضیه ۸–۲ بیان خواهد شد. اما مشابه این طبقه‌بندی‌ها برای گروه‌هایی با دقیقا یک انتها ارائه نشده است. به عنوان مثال گروه $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ گروهی با دقیقا یک انتها است. ثابت شده است که حاصلضرب دو گروه نامتناهی متناهی تولید شده دقیقا دارای یک انتها است [۵، لم ۵،۶]. به طور کلی‌تر، ثابت شده است اگر گروه متناهی تولید شده G دارای یک زیرگروه نرمال متناهی تولید شده نامتناهی مانند H باشد به طوری که G/H نامتناهی باشد، آن گاه G دقیقاً یک انتها دارد [۶].
قضایای متعددی در مورد رابطه بین ساختار گروه‌های متناهی تولید شده و تعداد انتهاهای آن‌ها اثبات شده است که مهم‌ترین آن‌ها قضیه‌ای موسوم به قضیه استالینگز است. پیش از بیان قضیه استالینگز لازم است دو مفهوم حاصلضرب آزاد ملقمه‌ای[1] و توسیع HNN[2] را بازگو کنیم [۵، تعریف ۸.۵].

تعریف ۷–۲

فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه با دو زیرگروه به ترتیب مانند H_1 و H_2 باشند و $\phi: H_1 \to H_2$ یکریختی باشد. در این صورت حاصلضرب آزاد ملقمه‌ای G_1 و G_2 نسبت به ϕ گروهی با نمایش زیر است
$$G_1 *_\phi G_2 = \langle G_1, G_2 \mid \phi(h)h^{-1}, h \in H_1 \rangle.$$

1. Amalgamated free product
2. HNN extension

نماد رایج‌تر برای این حاصلضرب $G_1 *_H G_2$ است که در آن H گروهی یکریخت با H_1 و H_2 است.
فرض کنید G یک گروه، H_1 و H_2 زیرگروه‌های G و $\phi: H_1 \rightarrow H_2$ یکریختی باشد. در این صورت توسیع HNN گروه G توسط ϕ گروهی با نمایش زیر است

$$G*_\phi = \langle G, t \mid tht^{-1}\phi(h)^{-1}, h \in H_1 \rangle.$$

نماد رایج‌تر برای توسیع HNN گروه G توسط یک یکریختی، $G*_H$ است که در آن H گروهی یکریخت با H_1 و H_2 است.
قضیه زیر موسوم به قضیه استالینگز یک رده‌بندی کلی برای گروه‌های متناهی تولید شده با بیش از یک انتها ارائه کرده است [۵، قضیه ۵،۹].

قضیه ۸-۲

گروه متناهی تولید شده G دارای بیش از یک انتها است اگر و تنها اگر یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:
۱- $G \cong A*_C B$ که در آن C یک گروه متناهی نابرابر با A و B است، یا
۲- $G \cong A*_C$ که در آن C یک زیرگروه متناهی از A است.
چنین طبقه‌بندی برای گروه‌هایی با دقیقا یک انتها وجود ندارد.
ساختار گروه‌های متناهی تولید شده با دقیقا دو انتها، تقریبا شناخته شده هستند. چنین گروه‌هایی را مجازی[1] Z می‌خوانند. به این معنا که زیرگروهی یکریخت با Z از اندیس متناهی دارند [۵، قضیه ۶،۶ و تبصره ۵،۴].

قضیه ۹-۲

گروه متناهی تولید شده G دقیقا دو انتها دارد اگر و تنها اگر G تقریبا Z باشد.
شرط کافی قضیه ۹-۲ به این صورت تعمیم یافته است: اگر H یک زیرگروه از اندیس متناهی در گروه متناهی تولید شده G باشد، آن‌گاه $e(G) = e(H)$ [۶، گزاره ۱،۲]. قضیه ۱۰-۲ شکل دیگری از قضیه ۹-۲ است که با جزییات بیشتری به ساختار گروه‌هایی با دقیقا دو انتها می‌پردازد که در [۵، لم ۶،۱۰] اثبات شده است.

قضیه ۱۰-۲

گروه متناهی تولید شده G دقیقا دو انتها دارد اگر و تنها اگر G برابر با حاصلضرب نیم‌مستقیم $H \times K$ باشد که در آن H یک زیرگروه متناهی و K زیرگروهی یکریخت با Z یا $\mathsf{Z}_2 * \mathsf{Z}_2$ باشد.
در قضایایی که در رابطه با انتهاهای گروه‌ها وجود دارد، تاکنون فقط به تعداد انتهاها توجه شده است. این در حالی است که بنا به قضیه ۳-۲، فضای انتهاهای گروه‌های متناهی تولید شده وابسته به مجموعه مولدهای متناهی متفاوت تا حد همسانریختی یکتا است.
در این جا قصد داریم توجه را به رفتار توپولوژیکی موضعی فضای $\overline{\Gamma}$ حول انتهاها جلب کنیم و تاثیر آن را در ساختار گروه‌های نامتناهی متناهی تولید شده، بررسی کنیم. یکی از رفتارهای موضعی خاص حول انتهاهای بدیهی اتفاق می‌افتد.

تعریف ۱۱-۲

گراف موضعا متناهی Γ را در نظر بگیرید. انتهای ω از Γ را انتهای بدیهی می‌نامند اگر ω در $\overline{\Gamma}$ دارای یک همسایگی انقباض‌پذیر باشد.

۳- نتایج

در ذیل ثابت می‌کنیم که انتهاهای بدیهی در بیان گراف‌ها بسیار ملموس هستند.

لم ۱-۳

فرض کنید Γ یک گراف موضعاً متناهی و ω یک انتهای Γ باشد. اگر ω یک انتهای بدیهی باشد، آن گاه هر دو پرتو در رده وابسته به ω به جز تعداد متناهی یال بر هم منطبق هستند.

اثبات. فرض کنید Γ یک گراف دلخواه و ω یک انتهای بدیهی آن باشد. در این صورت ω یک همسایگی انقباض‌پذیر مانند U در $\overline{\Gamma}$ دارد. بنا به

1. Virtually Z

لم ۵–۱، یک عنصر از پایه موضعی مانند $\overline{C}=\overline{C}(F,\omega)$ وجود دارد که زیرمجموعه U است.

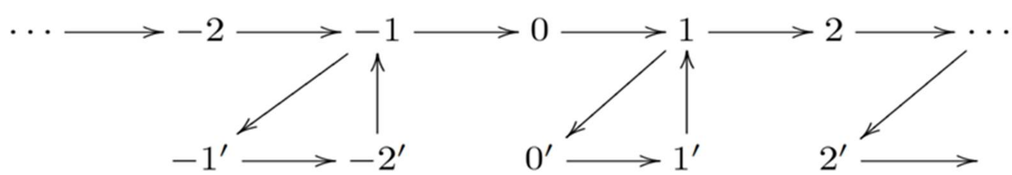
دو پرتو r_1 و r_2 را در رده هم‌ارزی وابسته به ω در نظر بگیرید. چون این دو پرتو هم‌ارز هستند، مجموعه F وابسته به $\overline{C}$ آن دو را جدا نمی‌کند. در نتیجه امتدادهای r_1 و r_2 که به ترتیب با r_1' و r_2' نمایش می‌دهیم، در $\overline{C}$ قرار دارند. فرض کنید حکم در مورد پرتوهای r_1 و r_2 برقرار نباشد، یعنی تعداد نامتناهی یال متمایز در r_1 و r_2 موجود باشد. چون تعداد این یال‌های متمایز نامتناهی است، برای هر همسایگی از انتهای ω از جمله U دو یال متمایز بین امتداد دو پرتو در U وجود دارد، پس دو یال متمایز مانند e_1 در r_1' و e_2 در r_2' وجود دارد. چون $\overline{C}$ مولفه مسیری است، در نتیجه همبند مسیری است و از هر رأس r_1' به هر رأس r_2' یک مسیر در $\overline{C}$ وجود دارد. مسیری مانند p_1 از رأس ابتدای e_1 به رأس ابتدای e_2 وجود دارد. همچنین مسیری مانند p_2 از رأس انتهای e_1 به رأس انتهای e_2 وجود دارد که متمایز از p_1 است. در غیر این صورت، رئوس مسیر p_1 می‌تواند r_1' و r_2' را جدا کند که با هم‌ارز بودن آن‌ها تناقض دارد. اکنون $e_1p_2e_2^{-1}p_1^{-1}$ تشکیل یک طوقه غیربدیهی در U می‌دهد. چون U انقباض‌پذیر است، چنین طوقه‌ای نمی‌تواند در آن موجود باشد. در نتیجه F همان مجموعه متناهی است که باعث تمایز r_1 و r_2 شده است و امتداد این دو پرتو خارج از رئوس F بر هم منطبق هستند.

توجه کنید که برعکس حکم لم ۱–۳ برقرار نیست. مثال زیر شاهد این مدعا است.

مثال ۲–۳

گرافی نامتناهی با شکل موضعی در شکل ۳ را در نظر بگیرید.

چون رئوس هر پرتو متمایز هستند، دورهای مکرر در گراف بالا پرتوی جدید نمی‌سازد. مثلاً $010'1'12\cdots$ به دلیل تکرار رأس 1 نمی‌تواند یک پرتو باشد. در نتیجه این گراف دو پرتوی مشخص $0123\cdots$ و $0-1-2-3\cdots$ به سمت دو انتها دارد. همچنین دورهای مکرر باعث می‌شود که دو انتها همسایگی انقباض‌پذیر نداشته باشند. در نتیجه این گراف انتهای بدیهی ندارد اما رده هر انتها فارغ از رأس آغازین پرتو، شامل تنها یک پرتو است. بنابراین شرط لم ۱–۳ برقرار است که هر دو پرتو به جز تعداد متناهی رأس بر هم منطبق باشند، اما انتهای بدیهی وجود ندارد. گراف‌های کیلی در مقایسه با سایر گراف‌ها خیلی خاص‌تر هستند. به عنوان مثال درجه همه رئوس گراف کیلی گروه‌ها ثابت و برابر با دو برابر عدد اصلی مجموعه مولد وابسته به است. بنابراین گراف کیلی گروه‌ها شکلی منظم، متقارن و تکرارشونده دارند و در حالت گروه‌های نامتناهی شکل فرکتالی دارند.



شکل(۳): گراف بدون انتهای بدیهی

قضیه ۳-۳

گراف کیلی گروه متناهی تولید شده G وابسته به مجموعه مولد متناهی S ، $\Gamma(G,S)$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\Gamma=\Gamma(G,S)$ انتهای بدیهی دارد اگر و تنها اگر G روی S آزاد باشد.

اثبات. فرض کنید Γ انتهایی بدیهی مانند ω داشته باشد. اگر G روی S آزاد نباشد، نمایش متناظر آن دارای یک رابطه غیر بدیهی است. این رابطه یک دور حول هر راس گراف Γ تعریف می‌کند. این دورها که در هر راس گراف هستند، باعث می‌شوند که عناصر پایه موضعی در هر انتهای گراف Γ دارای طوقه غیر بدیهی باشند. در نتیجه مجموعه‌های باز حول هر انتها دارای طوقه غیربدیهی هستند و انقباض‌پذیر نیستند و انتهاها نمی‌توانند انتهای بدیهی باشند

حال فرض کنید گروه G روی مجموعه مولد S آزاد باشد. گروه‌های آزاد نامتناهی هستند، بنابراین دارای حداقل یک انتها هستند. ثابت می‌کنیم همه انتهاهای Γ بدیهی است. فرض کنید ω یک انتهای Γ باشد. اگر رده وابسته به ω شامل تنها یک پرتو با شروع از رأس همانی باشد، بنا بر لم ۱-۳، انتهای بدیهی است. در غیر این صورت دو پرتو متمایز با شروع از رأس همانی در رده وابسته به ω وجود دارد. مشابه اثبات لم ۱-۳، نشان داده می‌شود که وجود دو پرتو هم‌ارز متمایز در رده ω باعث ایجاد دور غیر بدیهی می‌شود که در گراف Γ قرار می‌گیرد. اما چون G روی S آزاد است، پس Γ یک درخت است و دوری در آن وجود ندارد. این یک تناقض است و در نتیجه ω یک انتهای بدیهی است.

در اثبات شرط کفایت قضیه ۳-۳ ثابت شد که اگر G روی S آزاد باشد، آن گاه همه انتهاهای Γ بدیهی است. این به نتیجه زیر منجر می‌شود.

نتیجه ۴-۳

فرض کنید $\Gamma=\Gamma(G,S)$ گراف کیلی گروه G نسبت به مجموعه مولد S باشد. در این صورت Γ انتهای بدیهی دارد اگر و تنها اگر همه انتهاهای آن بدیهی باشد.

فهرست منابع

[1] R. Diestel, Graph Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2017.

[2] R. Diestel, P. Sprüssel, The fundamental group of a locally finite graph with ends, Advances in Mathematics, Volume 226, Issue 3, 2011, 2643–2675.

[3] R. Diestel, Ends and tangles, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Volume 87 (2017), 223–244.

[4] R. Diestel and D. Kühn, Graph-theoretical versus topological ends of graphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 87 (2003), 197–206.

[5] I. Goldbring, Ends of groups: a nonstandard perspective, Journal of Logic and Analysis, Volume 3:7 (2011), 1–28.

[6] D.E. Cohen, Ends and free products of groups, Mathematische Zeitschrift, Volume 114 (1970), 9–18.