

پایداری معادلات تابعی مرتبه هفتین در فضای β - گاوسی

ناصر غفوری عدل^۱، داود ابراهیمی بقا^{۲*}، محمدصادق عسگری^۳، مهدی آذینی^۴

^(۱ و ۴) گروه ریاضی محض (آنالیز ریاضی)، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران
^(۲ و ۳) گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۴/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۲۲

چکیده

هدف این مقاله، حل معادله تابعی از مرتبه هفتم به شکل:

$$f(x+4y) - 7f(x+3y) + 21f(x+2y) - 35f(x+y) + 21f(x-y) - 7f(x-2y) + f(x-3y) = 35f(x) + 5040f(y)$$

و بررسی پایداری این نوع معادله تابعی می‌باشد. واضح است که تابع $f(x) = ax^7$ در معادله تابعی فوق صدق می‌کند و ما پایداری هایرز-اولام را برای این نوع معادله تابعی در فضاهای باناخ β -گاوسی ثابت می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات تابعی، پایداری نرم β -گاوسی، (β, p) -قضایای باناخ.

۱- مقدمه

تعریف ۱-۱: معادلات تابعی، معادله‌هایی هستند که یک تابع را به شکل ضمنی تعیین می‌کنند و در آن ضابطه‌ی تابع به صورت صریح مشخص نمی‌شود. مساله‌ی پایداری معادلات تابعی هنگامی مطرح می‌شود که معادله‌ی تابعی را با نامعادله‌هایی که به‌عنوان یک اختلال معادله عمل می‌کنند جایگزین کنیم. در واقع، مساله‌ی پایداری معادلات تابعی این طور مطرح می‌شود که چگونه جواب‌های معادله ای که اختلال آن از جواب‌های یک نامعادله داده شده ناچیز است را به دست آورد. در واقع یک معادله تابعی را پایدار می‌نامند، هرگاه برای هر تابعی که به طور تقریبی در نامعادله تابعی آن صدق کند جواب منحصر بفردی وجود داشته باشد که به آن تابع به اندازه کافی نزدیک باشد. پایداری معادلات تابعی اولین بار در سال ۱۹۴۰ توسط ریاضیدان لهستانی آمریکایی اولام روی گروه‌های متریک به صورت زیر بیان شد. [19]

قضیه ۱-۲: (پایداری اولام) فرض کنید G_1 یک گروه و G_2 یک گروه مترپذیر با متریک d باشد، هرگاه بازای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ ای به طوری که تابع $h: G_1 \rightarrow G_2$ برای هر $x, y \in G_1$ در رابطه زیر صدق کند:

$$d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$$

آنگاه همریختی $H: G_1 \rightarrow G_2$ چنان وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in G_1$ داشته باشیم

$$d(h(x), H(x)) \leq \varepsilon$$

به عبارت دیگر با چه شرایطی می‌توان یک نگاشت تقریباً همریختی را به یک نگاشت همریختی نزدیک کرد؟ همچنین یک پاسخ مثبت به سؤال اولام در فضای باناخ توسط هایرز به صورت زیر ارائه شده است. [9]

قضیه ۱-۳: (پایداری هایرز) فرض کنید E_1 و E_2 فضاهایی باناخ باشند هرگاه برای $\varepsilon > 0$ وجود داشته

باشد $\delta > 0$ به طوری که تابع $f: E_1 \rightarrow E_2$ بازای

هر x و y متعلق به E_1 در رابطه زیر صدق کند:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| < \delta$$

آن گاه برای هر $x \in E_1$ حد زیر موجود است:

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

و تابع $A: E_1 \rightarrow E_2$ منحصر بفرد است به طوری که

برای هر x متعلق به E_1 می‌توان نوشت:

$$\|f(x) - A(x)\| < \varepsilon$$

به علاوه اگر تابع $f(tx)$ در t بازای هر x متعلق به E_1 پیوسته باشد آن گاه تابع A خطی است.

در سال ۱۹۷۸، راسیاس تعمیم قضیه هایرز را با جایگزینی تابع کنترل به صورت

$$\theta(\|x^p\| + \|y^p\|)$$

برای $\theta \geq 0$ و $0 \leq p < 1$ اثبات کرد که به

پایداری اولام-هایرز-راسیاس معروف می‌باشد. [15]

قضیه ۱-۴: (پایداری راسیاس) فرض کنید E_1 و

E_2 فضاهایی باناخ باشند هرگاه برای $\theta \geq 0$ و $0 \leq p < 1$

تابع $f: E_1 \rightarrow E_2$ بازای هر x و y متعلق

به E_1 در رابطه زیر صدق کند:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|$$

$$< \theta(\|x^p\| + \|y^p\|)$$

آن گاه تابعی منحصر بفرد $A: E_1 \rightarrow E_2$ وجود دارد

به طوری که برای هر x متعلق به E_1 می‌توان نوشت:

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p$$

به علاوه اگر تابع $f(tx)$ در t بازای هر x متعلق به E_1

پیوسته باشد آن گاه تابع A خطی است.

همچنین یک تعمیم از قضیه راسیاس با جایگزین کردن

یک تابع کنترل φ توسط گاوروتا ثابت شده است.

را با علامت X^n نمایش می‌دهیم همچنین برای یک نگاشت متقارن n -جمعی

$$A: X^n \rightarrow Y$$

نگاشت

$$A^n(x) = \overbrace{A(x, x, \dots, x)}^{n\text{-times}}$$

را به عنوان قطر نگاشت A و مقدار

$$A(\overbrace{x, x, \dots, x}^{i\text{-times}}, \overbrace{y, y, \dots, y}^{j\text{-times}})$$

را با علامت $A^{i,j}(x, y)$ نمایش می‌دهیم. اکنون معادله تابعی مرتبه هفتم (۱،۱) را به صورت زیر حل می‌کنیم.

قضیه ۲-۲: فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند، تابع $f: X \rightarrow Y$ یک جواب معادله تابعی (۱،۱) است اگر و فقط اگر f به ازای هر $x \in X$ به فرم $f(x) = A^7(x)$ باشد.

اثبات: فرض کنید f در معادله تابعی (۱،۱) صدق کند با قرار دادن $x = y = 0$ در (۱،۱)، نتیجه می‌شود $f(0) = 0$ و با جایگزینی (x, y) با $(0, x)$ و $(x, -x)$ به ترتیب در (۱،۱) و جمع دو رابطه بدست آمده نتیجه می‌گیریم:

$$f(-x) = -f(x)$$

باتعویض (x, y) با $(4x, x)$ در (۱،۱) به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$\begin{aligned} f(8x) - 7f(7x) + 21f(6x) \\ - 35f(5x) + 35f(4x) \\ - 21f(3x) + 7f(2x) \\ = 5041f(x) \end{aligned}$$

و همچنین تعویض (x, y) با $(0, 2x)$ در (۱،۱) به

تعریف ۱-۳: (معادلات تابعی مرتبه دوم) فرض کنید X یک فضای برداری باشد. در این صورت معادله تابعی به صورت:

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) \\ = 2f(x) + 2f(y) \end{aligned}$$

به ازای هر $x, y \in X$ را یک معادله تابعی مرتبه دوم می‌گویند.

هایرز پایداری معادلات تابعی مرتبه دوم را در مقالات [5, 7, 17] برای نگاشت‌های جمعی تقریبی $f: X \rightarrow Y$ روی فضای نرم‌دار حقیقی X و فضای باناخ حقیقی Y مورد بررسی قرار داد. همچنین معادلات تابعی مرتبه‌های سوم در [4, 11, 13] و معادلات تابعی مرتبه چهارم در [3, 14] و معادلات تابعی مرتبه پنجم در [12, 21] و مرتبه ششم در [21] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و پایداری آنها نیز بررسی شده است. در این مقاله ما معادلات تابعی مرتبه هفتم به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f(x+4y) - 7f(x+3y) \\ + 21f(x+2y) \\ - 35f(x+y) \\ + 21f(x-y) \\ - 7f(x-2y) \\ + f(x-3y) \\ = 35f(x) + 5040f(y) \end{aligned} \tag{۱،۱}$$

به آسانی قابل تحقیق است که تابع $f(x) = \alpha x^7$ در معادله تابعی (۱،۱) صدق می‌کند. هدف ما بدست آوردن جواب عمومی معادله و اثبات مسئله پایداری اولام-هایرز در فضاهای باناخ β -گاوسی برای این نوع معادله تابعی می‌باشد.

۲- معادلات تابعی مرتبه هفتم

تعریف ۲-۱: فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد در این صورت مجموعه

$$\overbrace{X \times X \times \dots \times X}^{n\text{-times}}$$

ازای هر $x \in X$ نتیجه می‌دهد: (۲.۲)
 قرار دادن (x, y) با (x, x) در (۱.۱) نتیجه می‌دهد: (۸.۲)

$$\begin{aligned} f(5x) - 7f(4x) + 21f(3x) \\ - 34f(2x) \\ = 5012f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(8x) - 6f(6x) + 14f(4x) \\ - 5054f(2x) = 0 \end{aligned}$$

با تفاضل دو رابطه (۱.۲) و (۲.۲) خواهیم داشت: (۳.۲)

با استفاده از روابط (۷.۲) و (۸.۲) نتیجه می‌شود: (۹.۲)

$$\begin{aligned} -28f(4x) + 168f(3x) \\ + 2128f(2x) \\ = 181048f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7f(7x) - 27f(6x) - 35f(5x) \\ + 21f(4x) - 21f(3x) \\ + 5061f(2x) \\ = 5041f(x) \end{aligned}$$

و تعویض (x, y) با $(-x, x)$ در (۱.۱) ما را به رابطه زیر راهنمایی می‌کند: (۱۰.۲)

$$\begin{aligned} f(4x) - 6f(3x) + 14f(2x) \\ = 5054f(x) \end{aligned}$$

با جایگذاری (x, y) با $(3x, x)$ در (۱.۱) نتیجه می‌شود: (۴.۲)

$$\begin{aligned} f(7x) - 7f(6x) + 21f(5x) \\ - 35f(4x) - 35f(3x) \\ - 21f(2x) \\ = 5033f(x) \end{aligned}$$

و سرانجام با ادغام روابط (۹.۲) و (۱۰.۲) به ازای هر $x \in X$ خواهیم داشت: (۱۱.۲)

$$f(2x) = 2^7 f(x)$$

با ضرب عدد ۷ در طرفین این معادله و جمع آن با (۳.۲) نتیجه می‌دهد: (۵.۲)

$$\begin{aligned} -22f(6x) + 112f(5x) - 224f(4x) \\ + 224f(3x) \\ + 4914f(2x) \\ = 40272f(x) \end{aligned}$$

بالعکس می‌توانیم نشان دهیم که معادله تابعی (۱.۱) به ازای هر $x, y \in X$ به شکل: (۱۲.۲)

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{1}{35}f(x+4y) - \frac{1}{5}f(x+3y) \\ + \frac{3}{5}f(x+2y) \\ - f(x+y) \\ - \frac{3}{5}f(x-y) \\ + \frac{1}{5}f(x-2y) \\ - \frac{1}{35}f(x-3y) \\ - 144f(y) = 0 \end{aligned}$$

با قرار دادن $(2x, x)$ بجای (x, y) در (۱.۱) داریم: (۶.۲)

$$\begin{aligned} f(6x) - 7f(5x) + 21f(4x) \\ - 35f(3x) + 35f(2x) \\ = 5060f(x) \end{aligned}$$

حال ضرب معادله (۶.۲) در (۲.۲) و ترکیب آن با نتیجه بدست آمده از رابطه (۱.۱) بدست می‌آید: (۷.۲)

$$\begin{aligned} -21f(5x) + 119f(4x) - 273f(3x) \\ + 2842f(2x) \\ = 75796f(x) \end{aligned}$$

می‌باشد و این نشان می‌دهد f یک تابع چند جمله‌ای

$$\begin{aligned} A^7(x+y) &= A^7(x) + A^7(y) \\ &+ 7A^{6,1}(x,y) \\ &+ 21A^{5,2}(x,y) \\ &+ 35A^{4,3}(x,y) \\ &+ 35A^{3,4}(x,y) \\ &+ 21A^{2,5}(x,y) \\ &+ 7A^{1,6}(x,y) \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} A^7(rx) &= r^7 A^7(x), \\ A^{6,1}(x, ry) &= r^{6,1} A^{5,2}(x, ry), \\ A^{5,2}(x, ry) &= r^2 A^{5,2}(x, ry), \\ A^{4,3}(x, ry) &= r^3 A^{4,3}(x, ry), \\ A^{3,4}(rx) &= r^4 A^{3,4}(x, ry), \\ A^{2,5}(x, ry) &= r^5 A^{2,5}(x, ry), \\ A^{1,6}(x, ry) &= r^6 A^{1,6}(x, ry). \end{aligned}$$

معادلات فوق نشان می‌دهد که f در (۱،۱) صدق می‌کند و این اثبات را تکمیل می‌کند.

۳- پایداری معادلات تابعی مرتبه هفتم در فضاهای نرم‌مدار β -گوسی

در این بخش ما ابتدا برخی مفاهیم اصلی در فضاهای نرم‌مدار β -گوسی را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۳-۱: فرض کنید β یک عدد حقیقی با شرط $0 < \beta < 1$ و \mathbb{K} میدان اعداد حقیقی یا مختلط \mathbb{R} یا \mathbb{C} باشد و X یک فضای خطی روی \mathbb{K} باشد، در این صورت تابع $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ را یک نرم β -گوسی روی X می‌نامند هرگاه شرایط زیر برای آن برقرار باشند به ازای هر $x \in X$ و $t \in \mathbb{K}$ و $K \geq 0$

$$(1) \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(2) \|tx\| = |t|^\beta \|x\|$$

$$(3) \|x+y\| \leq K (\|x\| + \|y\|)$$

توجه داشته باشید که شرط (۳) ایجاب می‌کند که به ازای

تعمیم یافته از درجه حداکثر ۷ است اکنون با استفاده از قضایای ۳.۵ و ۳.۶ از مرجع [20] نتیجه می‌شود که f به شکل زیر است:

(۱۳،۲)

$$f(x) = \sum_{i=0}^7 A^i(x)$$

است که $A^0(x) = A^0 = 0$ یک عضو اختیاری از Y است. از این که به ازای هر

$$x \in X, f(0) = 0 \text{ و}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

نتیجه می‌شود $A^0(x) = A^0 = 0$ و تابع f فرد است. بنابراین

$$A^2(x) = A^4(x) = A^6(x) = 0$$

و این ایجاب می‌کند که:

$$f(x) = A^7(x) + A^5(x) + A^3(x) + A^1(x) \quad \forall x \in X$$

از (۱۱،۲) و این که

$$A^n(rx) = r^n A^n(x)$$

به ازای $x \in X$ و $r \in \mathbb{Q}$ و جایگذاری $2x$ بجای x در معادله اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2^7 A^7(x) + 2^5 A^5(x) + 2^3 A^3(x) \\ + 2A^1(x) \\ = 2^7 A^7(x) + 2^7 A^5(x) \\ + 2^7 A^3(x) + 2^7 A^1(x) \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد:

$$A^1(x) = A^3(x) = A^5(x) = 0$$

بنابراین $f(x) = A^7(x)$.

بالعکس فرض کنید به ازای هر $x \in X$ ، $f(x) = A^7(x)$ در این صورت به ازای هر $x, y \in X, r \in \mathbb{Q}$:

برای اثبات قضیه پایداری که نتیجه اصلی این بخش است به لم زیر از [21] نیاز خواهیم داشت:

لم ۳-۴: فرض کنید $j \in \{-1, 1\}$ یک مقدار ثابت بوده و $a, s \in \mathbb{N}$ با $a \geq 2$ و $\psi : X \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع باشد بقسمی که یک $L < 1$ با $\psi(a^j x) < La^{js\beta} \psi(x)$ وجود داشته باشد. اگر $f : X \rightarrow Y$ بازای هر $x \in X$ یک نگاشت صدق کننده در

$$\|f(ax) - a^s f(x)\| \leq \psi(x)$$

باشد آنگاه یک نگاشت یکتای معین $F : X \rightarrow Y$ وجود خواهد داشت که بازای هر $x \in X$:

$$F(ax) = a^s F(x),$$

$$\|f(x) - F(x)\| \leq \frac{1}{a^{s\beta} |1 - L^j|} \psi(x).$$

در نتیجه بعدی، ما پایداری معادله تابعی (۱.۱) را در فضاهای نرم‌دار β -گوسی اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳-۵: فرض کنید $j \in \{-1, 1\}$ یک عدد ثابت و $\varphi : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ را تابعی در نظر بگیرید بقسمی که یک $L < 1$ با شرط

$$\varphi(2^j x, 2^j y) \leq 2^{7j\beta} L \varphi(x, y)$$

وجود داشته باشد. فرض کنید $f : X \rightarrow Y$ یک نگاشت باشد که بازای هر $x, y \in X$ در شرط زیر صدق کند:

$$(1.3)$$

$$\|D_h f(x, y)\| \leq \varphi(x, y)$$

در این صورت یک نگاشت هفتین یکتای مانند $H : X \rightarrow Y$

وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$

$$(2.3)$$

$$\|f(x) - H(x)\| \leq \frac{1}{2^{7\beta} |1 - L^j|} \varphi(x)$$

هر $n \geq 1$ و $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1} \in X$:

$$\left\| \sum_{j=1}^{2n} x_j \right\| \leq K^n \sum_{j=1}^{2n} \|x_j\|$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{2n+1} x_j \right\| \leq K^{n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \|x_j\|$$

تعریف ۳-۲: یک نرم β -گوسی $\|\cdot\|$ ، را یک (β, p) -نرم ($0 < p \leq 1$) روی X نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x, y \in X$

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

در این حالت یک فضای باناخ β -گوسی، را یک (β, p) -فضای باناخ نامیده می‌شود.

چون هر p -نرم روی فضای خطی X یک متریک پایای تحت انتقال روی X را به ما می‌دهد و چون هر نرم β -گوسی با یک p -نرم معادل است [2, 16].

بنابراین از این ببعد در این مقاله ما روی p -نرم‌ها تمرکز می‌کنیم و X را یک فضای خطی با نرم $\|\cdot\|_p$ و Y را یک (β, p) -فضای باناخ با (β, p) -نرم $\|\cdot\|_p$ و K را مدول تقسیم $\|\cdot\|_p$ در نظر می‌گیریم. (مگر این که صراحتاً اعلام شود). در ادامه این بخش پایداری معادله (۱.۱) را با بکار بردن ایده گاورتا [6] اثبات می‌کنیم.

تعریف ۳-۳: فرض کنید $f : X \rightarrow Y$ یک تابع باشد در این صورت انحراف تابع f به ازای هر $x, y \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} D_h f(x, y) &= f(x + 4y) \\ &\quad - 7f(x + 3y) \\ &\quad + 21f(x + 2y) \\ &\quad - 35f(x + y) \\ &\quad + 21f(x - y) \\ &\quad - 7f(x - 2y) \\ &\quad + f(x - 3y) \\ &\quad - 35f(x) - 5040f(y) \end{aligned}$$

که در آن

(۵.۳)

$$\begin{aligned} & \|f(-3x) - 7f(-2x) + 21f(-x) \\ & - 35f(0) + 35f(x) - 21f(2x) \\ & + 7f(3x) - f(4x) \\ & - 5040f(-x)\| \leq \varphi(x, -x) \end{aligned}$$

با استفاده از روابط (۴.۳) و (۵.۳) بدست می آوریم:

(۶.۳)

$$\begin{aligned} & \|f(x) + f(-x)\| \leq \\ & \frac{K}{5040^\beta} (\varphi(0, x) + \varphi(x, -x)) \end{aligned}$$

جایگزینی (x, y) با $(4x, x)$ در (۱.۳) خواهد داد:

(۷.۳)

$$\begin{aligned} & \|f(8x) - 7f(7x) + 21f(6x) - 35f(5x) \\ & + 35f(4x) - 21f(3x) + 7f(2x) \\ & - 5041f(x)\| \leq \varphi(4x, x) \end{aligned}$$

دوباره با جایگزینی (x, y) با $(0, 2x)$ در (۱.۳)

داریم:

(۸.۳)

$$\begin{aligned} & \|f(8x) - 7f(6x) + 21f(4x) \\ & - 5075f(2x) + 35f(0) \\ & - 21f(-2x) + 7f(-4x) \\ & - f(-6x)\| \leq \varphi(0, 2x) \end{aligned}$$

تفاضل روابط (۷.۳) و (۸.۳) و بکار بردن رابطه (۶.۳)

نتیجه می شود:

(۹.۳)

$$\begin{aligned} & \|-7f(7x) + 27f(6x) - 35f(5x) \\ & + 21f(4x) - 21f(3x) + 5061f(2x) \\ & - 5041f(x) - 35f(0)\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) := & \frac{1}{2520^\beta} [28^\beta K^2 \varphi(-x, x) \\ & + 21^\beta K^4 \varphi(x, x) + 22^\beta K^5 \varphi(2x, x) \\ & + 7^\beta K^5 \varphi(3x, x) \\ & + K^7 (\varphi(4x, x) + \varphi(0, 2x)) \\ & + \frac{K^8}{5040^\beta} (\varphi(0, 6x) + \varphi(6x, -6x)) \\ & + (\frac{28^\beta K^4}{5040^\beta} + \frac{K^9}{720^\beta}) \\ & \times (\varphi(0, 4x) + \varphi(4x, -4x)) \\ & + \frac{28^\beta K^6 + K^6 + K^9}{240^\beta} \\ & \times (\varphi(0, 2x) + \varphi(2x, -2x)) \\ & + (\frac{28^\beta K^6}{5040^\beta} + \frac{21^\beta}{720^\beta} 720^\beta K^5 + \frac{22^\beta}{5040^\beta} K^8) \\ & \times (\varphi(0, x) + \varphi(x, -x)) \\ & + \frac{28^\beta K^5}{720^\beta} (\varphi(0, 3x) + \varphi(3x, -3x)) \\ & + \frac{1309^\beta K}{5040^\beta} (\varphi(0, 0))]. \end{aligned}$$

اثبات: با قرار دادن $x = y = 0$ در (۱.۱) بدست

می آوریم که برای هر $x \in X$:

(۳.۳)

$$\|f(0)\| \leq \frac{1}{5040^\beta} \varphi(0, 0)$$

با تعویض (x, y) با $(0, x)$ در (۱.۳) خواهیم داشت:

(۴.۳)

$$\begin{aligned} & \|f(4x) - 7f(3x) + 21f(2x) \\ & - 35f(x)\| \leq \varphi(0, x) \end{aligned}$$

جایجائی (x, y) با $(x, -x)$ در (۱.۳) نتیجه می دهد:

$$+7f(0) \parallel_y \leq K \varphi(2x, x)$$

$$+\frac{K^2}{5040^\beta} [\varphi(0, x) + \varphi(x, -x)]$$

ضرب طرفین معادله (۱۲،۳) در 22^β و سپس استفاده از آن در (۱۱،۳) نتیجه می‌دهد:
(۱۳،۳)

$$\parallel -21f(5x) + 119f(4x) - 273f(3x) + 2842f(2x) - 75796f(x) + 112f(0) \parallel_y$$

$$\leq 22^\beta K^2 \varphi(2x, x) + 7^\beta K^2 \varphi(3x, x)$$

$$+ K^4 (\varphi(4x, x) + \varphi(0, 2x))$$

$$+\frac{K^5}{5040^\beta} (\varphi(0, 6x) + \varphi(6x, -6x))$$

$$+\frac{K^6}{720^\beta} (\varphi(0, 4x) + \varphi(4x, -4x))$$

$$+\frac{K^6}{240^\beta} (\varphi(0, 2x) + \varphi(2x, -2x))$$

$$+\frac{22^\beta K^3}{5040^\beta} (\varphi(0, x) + \varphi(x, -x))$$

مجدداً با تعویض (x, y) با (x, x) در (۱۳،۳) و بکار بردن نامساوی (۶،۳) بدست می‌آوریم:
(۱۴،۳)

$$\parallel f(5x) - 7f(4x) + 21f(3x)$$

$$- 34f(2x) - 5012f(x) - 21f(0) \parallel_y$$

$$\leq K \varphi(x, x)$$

$$+\frac{K^3}{720^\beta} (\varphi(0, x) + \varphi(x, -x))$$

$$+\frac{K^3}{5040^\beta} (\varphi(0, 2x) + \varphi(2x, -2x))$$

از ضرب هر دو طرف (۱۴،۳) در 21^β و ترکیب نتیجه آن با رابطه (۱۳،۳) داریم:
(۱۵،۳)

$$\parallel -28f(4x) + 168f(3x) + 2128f(2x)$$

$$K^2 [\varphi(4x, x) + \varphi(0, 2x)]$$

$$+\frac{K^3}{27^\beta} (\varphi(0, 6x) + \varphi(6x, -6x))$$

$$+\frac{K^4}{720^\beta} (\varphi(0, 4x) + \varphi(4x, -4x))$$

$$+\frac{K^4}{240^\beta} (\varphi(0, 2x) + \varphi(2x, -2x))$$

حال با جایگذاری $(3x, x)$ بجای (x, y) در (۱۳،۳) خواهیم داشت:
(۱۰،۳)

$$\parallel f(7x) - 7f(6x) + 21f(5x) - 35f(4x)$$

$$+ 35f(3x) - 21f(2x) - 5033f(x)$$

$$- f(0) \parallel_y \leq \varphi(3x, x)$$

با ضرب طرفین معادله (۱۰،۳) در 7^β و سپس اضافه کردن نتیجه آن به (۹،۳) حاصل خواهد شد:
(۱۱،۳)

$$\parallel -22f(6x) + 112f(5x) - 224f(4x)$$

$$+ 224f(3x) + 4914f(2x)$$

$$- 40272f(x) - 42f(0) \parallel_y$$

$$\leq 7^\beta K \varphi(3x, x)$$

$$+ K^3 [\varphi(4x, x) + \varphi(0, 2x)]$$

$$+\frac{K^4}{5040^\beta} (\varphi(0, 6x) + \varphi(6x, -6x))$$

$$+\frac{K^5}{720^\beta} (\varphi(0, 4x) + \varphi(4x, -4x))$$

$$+\frac{K^5}{240^\beta} (\varphi(0, 2x) + \varphi(2x, -2x))$$

با جایگزین کردن (x, y) با $(2x, x)$ در (۱۳،۳) و بکار بردن (۶،۳) حاصل می‌گردد:
(۱۲،۳)

$$\parallel f(6x) - 72f(5x) + 21f(4x)$$

$$- 35f(3x) + 35f(2x) - 5060f(x)$$

وجود دارد به قسمی که

$$H(2x) = 2^7 H(x)$$

و به ازای هر $x \in X$ نتیجه می‌شود:

$$(۱۷،۳)$$

$$\|f(x) - H(x)\| \leq \frac{1}{2^{7\beta} |1 - L^j|} \tilde{\varphi}(x)$$

حال کافی است نشان دهیم H یک نگاشت هفتین است. برای این منظور از (۱۷،۳) بازای هر $x, y \in X$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{D_n f(2^{jn}x, 2^{jn}y)}{2^{7jn}} \right\|_Y \\ & \leq 2^{-7jn\beta} \varphi(2^{jn}x, 2^{jn}y) \\ & \leq 2^{-7jn\beta} (2^{-7jn\beta} L)^n \varphi(x, y) \\ & = L^n \varphi(x, y) \end{aligned}$$

باقرار دادن $n \rightarrow \infty$ در نامساوی فوق، مشاهده می‌شود که به ازای هر $x, y \in X$ داریم $D_n H(x, y) = 0$. بنابراین نگاشت H ضرورتاً هفتین است. گزاره‌های زیر، نتیجه مستقیم قضیه ۳-۵ می‌باشند.

گزاره ۳-۶: فرض کنید X یک فضای نرم α -گاوسی با $\alpha - \text{نرم } \|\cdot\|_X$ و Y یک (β, p) -فضای باناخ با (β, p) -نرم $\|\cdot\|_Y$ باشند و فرض کنید r و s اعدادی مثبت با شرط $\frac{\beta}{\alpha} := r + s \neq 7$ باشند. اگر $f: X \rightarrow Y$ به ازای هر $x, y \in X$ یک نگاشت صادق در شرط:

$$\|D_n f(x, y)\|_Y \leq \theta \|x\|_X \|y\|_X$$

باشد در این صورت یک نگاشت یکتای هفتین $H: X \rightarrow Y$ وجود دارد به قسمی که بازای هر $x \in X$

$$\|f(x) - H(x)\|$$

$$\begin{aligned} & -181048f(x) - 329f(0) \|\cdot\| \\ & \leq 21^\beta K^2 \varphi(x, x) + 22^\beta K^3 \varphi(2x, x) \\ & + \frac{K^6}{5040^\beta} (\varphi(0, 6x) + \varphi(6x, -6x)) \\ & + 7^\beta K^3 \varphi(3x, x) \\ & + K^5 (\varphi(4x, x) + \varphi(0, 2x)) \\ & + \frac{K^7}{720^\beta} (\varphi(0, 4x) + \varphi(4x, -4x)) \\ & + \frac{K^4 + K^7}{240^\beta} (\varphi(0, 2x) + \varphi(2x, -2x)) \\ & + \frac{21^\beta}{720^\beta} 720^\beta K^3 \\ & + \frac{22^\beta}{5040^\beta} K^6 (\varphi(0, x) + \varphi(x, -x)) \end{aligned}$$

جابجائی (x, y) با $(-x, x)$ در (۱۷،۳) و بکارگیری (۶،۳) نتیجه می‌دهد:

$$(۱۶،۳)$$

$$\begin{aligned} & \|f(4x) - 6f(3x) + 14f(2x) \\ & - 5040f(x) - 35f(0)\|_Y \\ & \leq K \varphi(-x, x) \\ & + \frac{K^2}{5040^\beta} (\varphi(0, 4x) + \varphi(4x, -4x)) \\ & + \frac{K^3}{720^\beta} (\varphi(0, 3x) + \varphi(3x, -3x)) \\ & + \frac{K^4}{240^\beta} (\varphi(0, 2x) + \varphi(2x, -2x)) \\ & + \frac{K^4}{5040^\beta} (\varphi(0, x) + \varphi(x, -x)) \end{aligned}$$

با استفاده از روابط (۱۵،۳) و (۱۶،۳) که در ۲۸ ضرب شده و سپس اعمال (۶،۳) در آن خواهیم داشت:

$$\|f(2x) - 2^7 f(x)\|_Y \leq \tilde{\varphi}(x) \quad (x \in X)$$

حال با توجه به لم ۳-۴ یک نگاشت یکتای

$$H: X \rightarrow Y$$

$$\Gamma_\lambda = \frac{1}{2520^\beta} [2 \cdot 28^\beta K^2 + (2 \cdot 21^\beta + 3 \frac{4^{\alpha\lambda}}{180^\beta}) K^4 + ((2^{\alpha\lambda} + 1) 22^\beta + (3^{\alpha\lambda} + 1) 7^\beta + 3 \frac{7^\beta}{240^\beta} + 3 \frac{7^\beta}{180^\beta} 3^{\alpha\lambda}) K^5 + (3 \frac{1+28^\beta}{240^\beta} 2^{\alpha\lambda} + \frac{3}{180^\beta}) K^6 + (1 + 2^{\alpha\lambda} + 4^{\alpha\lambda}) K^7 + (3 \frac{6^{\alpha\lambda}}{5040^\beta} + 3 \frac{11^\beta}{2520^\beta}) K^8 + (3 \frac{4^{\alpha\lambda}}{720^\beta} + 3 \frac{2^{\alpha\lambda}}{240^\beta}) K^9]$$

گزاره ۳-۸: فرض کنید X یک فضای نرم‌دار α -گاوسی با $\|\cdot\|_X$ نرم α -گاوسی با (β, p) فضای باناخ با (β, p) -نرم $\|\cdot\|_Y$ باشند و فرض کنید r, θ و s اعدادی مثبت با شرط $\lambda := r + s \neq 7 \frac{\beta}{\alpha}$ باشند اگر $f: X \rightarrow Y$ به ازای هر $x, y \in X$ یک نگاشت صادق در شرط:

$$\|D_h f(x, y)\|_Y \leq \theta (\|x\|_X^\lambda + \|y\|_X^\lambda + \|x\|_X^\lambda \|y\|_X^\lambda)$$

باشد آنگاه یک نگاشت یکتای هفتین $H: X \rightarrow Y$ وجود دارد به قسمی که بازای هر $x \in X$:

$$\|f(x) - H(x)\|_Y \leq \begin{cases} \frac{\theta(\Lambda_{r,s} + \Gamma_\lambda)}{2^{7\beta} - 2^{\alpha\lambda}} \|x\|_X^\lambda & \lambda \in (0, 7 \frac{\beta}{\alpha}) \\ \frac{2^{\alpha\lambda} \theta(\Lambda_{r,s} + \Gamma_\lambda)}{2^{\alpha\lambda} - 2^{7\beta}} \|x\|_X^\lambda & \lambda \in (7 \frac{\beta}{\alpha}, \infty) \end{cases}$$

که در آن $\Lambda_{r,s}$ و Γ_λ به ترتیب در روابط (۱۸،۳) و (۱۹،۳) تعریف شده‌اند.

ایده مثال زیر از [8] گرفته شده است. اثبات‌ها مشابه است ولی ما آن را تکمیل کرده‌ایم. در حقیقت نشان

$$\leq \begin{cases} \frac{\theta \Lambda_{r,s}}{2^{7\beta} - 2^{\alpha\lambda}} \|x\|_X^\lambda, & \lambda \in (0, 7 \frac{\beta}{\alpha}) \\ \frac{2^{\alpha\lambda} \theta \Lambda_{r,s}}{2^{\alpha\lambda} - 2^{7\beta}} \|x\|_X^\lambda, & \lambda \in (7 \frac{\beta}{\alpha}, \infty) \end{cases}$$

که در آن (۱۸،۳)

$$\Lambda_{r,s} = \frac{1}{2520^\beta} [28^\beta K^2 + (21^\beta + \frac{4^{\alpha\lambda}}{180^\beta}) K^4 + (2^{ar} \cdot 22^\beta + 3^{ar} \cdot 7^\beta + \frac{7^\beta}{240^\beta} + \frac{7^\beta}{180^\beta} 3^{ar}) K^5 + (\frac{7^\beta}{60^\beta} 2^{ar} + \frac{2^{\alpha\lambda}}{240^\beta} + \frac{1}{180^\beta}) K^6 + 4^{\alpha\lambda} K^7 + (\frac{6^{\alpha\lambda}}{5040^\beta} + \frac{11^\beta}{2520^\beta}) K^8 + (\frac{4^{\alpha\lambda}}{720^\beta} + \frac{2^{\alpha\lambda}}{240^\beta}) K^9]$$

گزاره ۳-۷: فرض کنید X یک فضای نرم‌دار α -گاوسی با $\|\cdot\|_X$ نرم α -گاوسی با (β, p) فضای باناخ با (β, p) -نرم $\|\cdot\|_Y$ باشند و فرض کنید r و s اعدادی مثبت با شرط $\lambda \neq 7 \frac{\beta}{\alpha}$ باشد. اگر $f: X \rightarrow Y$ به ازای هر $x, y \in X$ یک نگاشت صادق در شرط:

$$\|D_h f(x, y)\|_Y \leq \theta (\|x\|_X^\lambda + \|y\|_X^\lambda)$$

باشد آنگاه یک نگاشت یکتای هفتین $H: X \rightarrow Y$ وجود دارد به قسمی که بازای هر $x \in X$:

$$\|f(x) - H(x)\|_Y \leq \begin{cases} \frac{\theta \Gamma_\lambda}{2^{7\beta} - 2^{\alpha\lambda}} \|x\|_X^\lambda, & \lambda \in (0, 7 \frac{\beta}{\alpha}) \\ \frac{2^{\alpha\lambda} \theta \Gamma_\lambda}{2^{\alpha\lambda} - 2^{7\beta}} \|x\|_X^\lambda, & \lambda \in (7 \frac{\beta}{\alpha}, \infty) \end{cases}$$

که در آن:

به ازای هر $n = 0, 1, \dots, k-1$ به $(-1, 1)$ تعلق داشته باشند. بنابراین به ازای هر $n = 0, 1, \dots, k-1$:

$$\begin{aligned} & \psi(4^n(x+4y)) - 7\psi(4^n(x+3y)) \\ & + 21\psi(4^n(x+2y)) \\ & - 35\psi(4^n(x+y)) + 21\psi(4^n(x-y)) \\ & - 7\psi(4^n(x-2y)) \\ & + \psi(4^n(x-3y)) - 35\psi(4^n x) \\ & - 5040\psi(4^n y) = 0 \end{aligned}$$

با استفاده از تعریف f خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |D_h f(x, y)| &= \left| \sum_{n=k}^{\infty} \{2^{-14} \psi(4^n(x+4y)) \right. \\ & - 7 \cdot 2^{-14} \psi(4^n(x+3y)) \\ & + 21 \cdot 2^{-14} \psi(4^n(x+2y)) \\ & - 35 \cdot 2^{-14} \psi(4^n(x+y)) \\ & + 21 \cdot 2^{-14} \psi(4^n(x-y)) \\ & - 7 \cdot 2^{-14} \psi(4^n(x-2y)) \\ & + 2^{-14} \psi(4^n(x-3y)) \\ & - 35 \cdot 2^{-14} \psi(4^n x) \\ & \left. - 5040 \cdot 2^{-14} \psi(4^n y)\} \right| \\ & \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-14} |\psi(4^n(x+4y)) \\ & - 7\psi(4^n(x+3y)) \\ & + 21\psi(4^n(x+2y)) \\ & - 35\psi(4^n(x+y)) \\ & + 21\psi(4^n(x-y)) \\ & - 7\psi(4^n(x-2y)) \\ & + \psi(4^n(x-3y)) \\ & - 35\psi(4^n x) - 5040\psi(4^n y)| \\ & \leq 5168 \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-14n} = 5168 \frac{2^{14(1-k)}}{2^{14}-1} \end{aligned}$$

با استفاده از روابط فوق و نامساوی (۲۱،۳) نتیجه

می‌دهیم که فرض $\lambda \neq 7 \frac{\beta}{\alpha}$ در حالت $\alpha = \beta = p = 1$ کار نمی‌کند.

مثال ۳-۹: فرض کنید $f: R \rightarrow R$ تعریف شده

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(4^n x)}{2^{14n}}$$

برای هر $x \in R$ به صورت $\psi: R \rightarrow R$ باشد که تابع ψ به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^7 & |x| < 1 \\ 1 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

بدیهی است که f به $\frac{2^{14}}{2^{14}-1}$ کراندار است. اگر $|x|^7 + |y|^7 = 0$ یا $|x|^7 + |y|^7 \geq 2^{-14}$ این صورت: (۲۰،۳)

$$\begin{aligned} |D_h f(x, y)| &\leq 5168 \frac{2^{14}}{2^{14}-1} \\ &\leq 5168 \frac{2^{28}}{2^{14}-1} (|x|^7 + |y|^7) \end{aligned}$$

و اگر $|x|^7 + |y|^7 < 2^{-14}$ در این صورت یک عدد صحیح نامنفی k وجود دارد به قسمی که: (۲۱،۳)

$$2^{-14(k+2)} < |x|^7 + |y|^7 < 2^{-14(k+1)}$$

رابطه (۲۱،۳) ایجاب می‌کند:

$$2^{14} |x|^7 < 2^{-14}, 2^{14} |y|^7 < 2^{-14}$$

و تمام اعداد

$$\begin{aligned} & 4^n(x+4y), 4^n(x+3y), \\ & 4^n(x+2y), 4^n(x+y), \\ & 4^n(x-y), 4^n(x-2y), \\ & 4^n(x-3y), 4^n x, 4^n y \end{aligned}$$

می‌گیریم که بازای هر $x, y \in R$:
 (۲۲،۳)
 هایرز-اولام را برای این نوع معادله تابعی در فضاهای
 باناخ β -گاوسی ثابت کرده‌ایم.

سپاسگزاری

نویسندگان مایل هستند که از زحمات داوران و ناظران
 ناشناس در خصوص مطالعه دقیق مقاله و ارائه نظرات
 مفیدشان که به بهبود مقاله کمک کرده قدرانی و تشکر
 کنند. کار پژوهشی نویسندگان توسط دانشگاه آزاد
 اسلامی واحد علوم و تحقیقات پشتیبانی می‌شود.

$$D_{ii}f(x, y) \leq 5168 \frac{2^{42}}{2^{14} - 1} (|x|^7 + |y|^7)$$

حال در گزاره ۳-۶ اگر $\alpha = \beta = p = 1$ آنگاه نشان
 می‌دهیم معادله تابعی (۱،۱) به ازای $\lambda = 7$ پایدار
 نیست؟ بر خلاف این ادعا فرض کنید یک عدد
 $b \in [0, \infty)$ و یک تابع هفتین $H: R \rightarrow R$ وجود
 داشته باشند به طوری که به ازای هر $x \in R$

$$|f(x) - H(x)| < b |x|^7$$

در نتیجه بنا به [10] یک عدد $a \in R$ وجود دارد که
 به ازای هر $r \in Q$ ، $H(r) = ar^7$. بنابراین به ازای
 هر $r \in Q$ خواهیم داشت:

(۲۳،۳)

$$|f(r)| \leq (|a| + b) |r|^7$$

فرض کنید $m \in N$ طوری باشد که:

$$m + 1 > |a| + b$$

اگر r_0 یک عدد گویای در بازه $(0, 4^{-m})$ باشد در این
 صورت به ازای هر $n = 0, 1, \dots, m$ داریم
 $4^n r_0 \in (0, 1)$ در نتیجه برای چنین r_0 ای نتیجه می
 شود:

$$\begin{aligned} f(r_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(4^n r_0)}{2^{14n}} \geq \sum_{n=0}^m \frac{(4^n r_0)^7}{2^{14n}} \\ &= (m + 1)r_0^7 > (|a| + b)r_0^7 \end{aligned}$$

که با (۲۳،۳) تناقض دارد بنابراین فرض خلف باطل و در
 نتیجه حکم برقرار است.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله ما جواب‌های کلی معادله تابعی از مرتبه
 هفتین را بدست آورده‌ایم و سپس پایداری این نوع معادله
 تابعی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. همچنین ما پایداری

فهرست منابع

- [10] K. W. Jun, H. M. Kim, The generalized Hyers-Ulam-Rassias stability of a cubic functional equation, *J. Math. Anal. Appl.* 274 (2):867-878 (2002).
- [11] C. Park, J. Cui, M. Eshaghi Gordji, Orthogonality and quintic functional equations. *Acta Math. Sinica English Series.* 29: 1381-1390 (2013).
- [12] J. M. Rassias, Solution of the Ulam stability problem for cubic mapping, *Glasnik Matematički Ser III.* 36 (56): 63-72 (2001).
- [13] J. M. Rassias, Solution of the Ulam stability problem for quartic mapping, *Glasnik Matematički Ser III.* 34 (2): 243-252 (1999).
- [14] Th. M. Rassias, On the stability of the linear mapping in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 72 (2): 297-300 (1978).
- [15] S. Rolewicz, *Metric linear spaces* Second Edition. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, (1984).
- [16] F. Skof, Propriet locali e approssimazione di operatori, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 53: 113-129 (1983).
- [17] J. Tabor, Stability of the Cauchy functional equation in quasi-Banach spaces. *Ann. Polon. Math.* 83: 243-255 (2004).
- [18] S. M. Ulam, *Problems in Modern Mathematics*, Chapter VI, Science Ed., Wiley, New York, (1940).
- [19] T. Z. Xu, M. Rassias, W. X. Xu, A generalized mixed quadratic-quartic
- [1] T. Aoki, On the stability of the linear transformation in Banach spaces, *J. Math. Soc. Japan.* 2: 64-66 (1950).
- [2] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*, Vol. 1, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 48. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2000.
- [3] A. Bodaghi, Stability of a quartic functional equation, *The Scientific World Journal.* Vol. 2014, 9 pages, Article ID 752146.
- [4] A. Bodaghi, S. M. Moosavi, H. Rahimi, The generalized cubic functional equation and the stability of cubic Jordan *-derivations, *Ann. Univ. Ferrara*, 59: 235-250 (2013).
- [5] S. Czerwik, On the stability of the quadratic mapping in normed spaces, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* 62: 59-64 (1992).
- [6] M. Eshaghi Gordji, A. Bodaghi, On the Hyers-Ulam-Rassias stability problem for quadratic functional equations *East. J. Approx.* 16:123-130 (2010).
- [7] Z. Gajda, On stability of additive mappings, *Int. J. Math. Math. Sci.* 14 (3): 431-434 (1991).
- [8] D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 27: 222-224 (1941).
- [9] K. W. Jun, H. M. Kim, On the stability of Euler-Lagrange type cubic mappings in quasi-Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 332 (2): 1335-1350 (2007).

functional equation, *Bulletin Malay. Math. Sci. Soc.* 35 (3): 633-649 (2012).

[20] T. Z. Xu, J. M. Rassias, M. J. Rassias, W. X. Xu, A fixed point approach to the stability of quintic and sextic functional equations in quasi- β -normed spaces. *J. Inequal. Appl.* Article ID 423231: 23 pages (2010).