دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# محاسبه بردار قیمت خروجی با به کارگیری برنامه‌ریزی خطی معکوس: روشی جدید در DEA با ساختاردو مرحله‌ای

سرور صدری[۱]، محسن رستمی مال خلیفه[*۲]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران
(۲) دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، گروه ریاضی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۱/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۲۸

**چکیده**

در جهان امروز که تمام مسائل روزمره بر پایه‌ی اقتصاد قرار گرفته است. علوم علمی و نظری بدون تردید با توانایی‌ها و قابلیت‌های خود، در زمینه اقتصاد فعالیت می‌کنند. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) نیز به عنوان ابزاری ریاضی در اختیار علوم اقتصادی قرار گرفته تا بتواند با بررسی هزینه‌ها، قیمت‌ها و درآمدها به بررسی عملکرد واحدهای اقتصادی بپردازد. تحلیل پوششی داده‌ها یک تکنیک برنامه‌ریزی خطی برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) بر اساس داده‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها است. یکی از کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها، محاسبه کارایی درآمد واحدها است. روش‌های محاسبه کارایی درآمد در تحلیل پوششی داده‌ها عموماً برای بدست آوردن بیشترین درآمد حاصل از فروش خروجی‌ها ارائه شده است. این روش‌ها در ارزیابی هر سیستمی از جمله سیستم‌های تولید دو مرحله‌ای به دلیل بی‌توجهی به ساختار درونی واحدها و نادیده گرفتن محصولات میانی آنها به اندازه کافی کارآمد نیستند. لذا در این مقاله ضمن معرفی برنامه‌ریزی خطی معکوس در تحلیل پوششی داده‌ها و بکارگیری آن در محاسبه کارایی درآمد، روش جدیدی ارائه می‌گردد که با در نظر گرفتن ساختار شبکه‌ای واحدها، توانایی تعیین قیمت‌های بهینه و هزینه‌های مناسب جهت کارا شدن واحد مورد نظر را دارد. مثال‌های عددی ارائه شده برتری روش‌های پیشنهادی را نسبت به روش‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها نشان داده است.

**واژه‌های کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، برنامه‌ریزی خطی معکوس، کارایی درآمد، سیســتم‌های تولید دو مرحله‌ای.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: mohsen_rostamy@yahoo.com

## ۱ – مقدمه

مساله ارزیابی عملکرد واحدها از دیر باز مورد توجه مدیران بوده است. برخورد علمی با این مطلب از اواخر جنگ جهانی دوم شروع و گسترش چشمگیری داشته است. امروزه علاوه بر پیچیدگی مسائل، حجم بسیار اطلاعات، اثرات عوامل خارجی بر عملکرد، رقابت‌های شدید جهانی، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب و ... عواملی هستند که ایجاب می‌کنند قبل از هر گونه تصمیم‌گیری در مورد واحدها و افزایش کارایی عملکرد آنها از طریق برخورد علمی با آنان راه کارهای مناسبی اتخاذ گردد.

تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیرپارامتری برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی و خروجی‌های چندگانه از طریق بکارگیری برنامه‌ریزی خطی و ریاضی است. اولین بار فارل (۱۹۵۷) به محاسبه کارایی برای واحد تولیدی اقدام نمود. چارنز و همکاران (۱۹۷۸) ایده فارل را توسعه و الگویی ارائه دادند که تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها نام گرفت. همچنین مدل‌های متفاوتی برای داده‌های غیر دقیق ارائه شده ازجمله داده‌های بازه ای که می‌توان به حسین‌زاده لطفی و همکاران (۲۰۰۷) اشاره نمود. برزگری نژاد و همکاران (۲۰۱۴) روشی را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها براساس نقاط ایده‌آل و انتی ایده‌ال ارائه نمودند. نیک فرجام و همکاران (۲۰۱۵) از تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری زنجیره تامین استفاده کردند. بنکر و همکاران (۱۹۹۸) در مقاله تحلیل غیر پارامتری اندازه‌های دیگری از کارایی کلی را نشان دادند و مدلی را برای اندازه‌گیری کارایی سود کلی معرفی کردند. مدل‌های مطرح شده آنها برای محاسبه کارایی واحدها بسیار محدود بود. در این مدل‌ها یک جواب شدنی وجود داشت که تحت تابع هدف بهینه نبود و ضرایب تابع هدف بایستی چنان محاسبه شوند که جواب شدنی بهینه گردد. به منظور بررسی بهینگی جواب شدنی، مسائل معکوس مطرح شد. این مسائل به طور گسترده توسط محققان با داده‌های ژئوفیزیکی مطالعه و از آن در موارد مختلفی از قبیل کنترل ترافیک، طراحی هواپیما و بهداشت و درمان استفاده شده است. مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس برای اولین بار توسط ژانگ و لیو (۱۹۹۶) معرفی گردید آنها مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس را به صورت مساله خطی جدیدی فرمول‌بندی کردند و نشان دادند که چگونه می‌توان جواب مساله جدید را برای حل معکوس مساله به کار برد. همچنین آنها ضرایب هزینه مساله برنامه‌ریزی خطی را طوری تنظیم کردند که جواب شدنی بهینه گردد. ژانگ و یانگ (۱۹۹۹) تعدادی از مسائل بهینه سازی معکوس را بصورت مدل برنامه‌ریزی خطی یکسان تدوین کردند آهوجا و اورلین (۲۰۰۱) ثابت کردند هرگاه مساله بهینه سازی با تابع هزینه خطی چند جمله‌ای قابل حل باشد در این صورت مساله معکوس تحت نرم $\mathrm{L}_1$ و $\mathrm{L}_\infty$ چند جمله‌ای نیز قابل حل می‌باشند. امروزی‌نژاد و امین (۲۰۰۷) مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس را در حوزه تحلیل پوششی داده‌ها به کار بردند و روش موثر را در تحلیل پوششی داده‌ها و مدل جمعی تهیه کردند. صدری، رستمی مال‌خلیفه و شجاع (۲۰۱۷) مساله برنامه ریزی خطی معکوس را در کارایی هزینه به کار گرفتند و هزینه مناسب را جهت کارایی هزینه محاسبه کردند. همچنین صدری، رستمی مال‌خلیفه و شجاع (۲۰۱۸) کارایی هزینه را به وسیله برنامه‌ریزی خطی معکوس در حضور خروجی نامطلوب ارائه کردند. قیاسی (۲۰۱۷) مدل‌های DEA معکوس را زمانی که اطلاعات قیمت در دسترس بود، توسعه داد. تکنیک‌های پیشنهادی او روی مساله کارایی هزینه پایه‌ریزی شدند. داش (۲۰۱۸) کارایی هزینه سرویس ارائه دهندگان بیمه را در هند توسعه داد. خوشگوا و رستمی مال‌خلیفه (۲۰۱۶) مدلی را ارائه دادند که قادر به محاسبه کارایی هزینه با داده‌های صحیح است.

در جهان واقعی با واحدهایی روبرو می‌شویم که دارای ساختار شبکه‌ای هستند ارزیابی چنین واحدهایی با روش‌های متداول، احتمال دارد نتایج دور از واقعیت را نشان دهند. به منظور ارزیابی دقیق این واحدها، از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای استفاده می‌شود. مدل‌های شبکه‌ای اولین با توسط فار و گراسکوف (۲۰۰۰) معرفی گردید. آنها برای اولین بار اصطلاح جعبه سیاه را برای مدل‌های سنتی تحلیل

پوششی داده‌ها به کار بردند. مدل آنها توسط محققان دیگر توسعه داده شد. از اولین تحقیقات انجام شده در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای می‌توان به کار چارنز و همکاران (۱۹۸۶) اشاره کرد، هنگامی که برای استخدام سربازان در ارتش فرآیند دو مرحله‌ای را مورد استفاده قرار دادند. سکستون و لوییس (۲۰۰۳) ساختار چند مرحله‌ای را ارائه دادند. در پژوهشی دیگر لوییس و سکستون (۲۰۰۴) ساختار خاصی از شبکه‌ها، سیستم‌های تولید دو مرحله‌ای، را بررسی نمودند. کائو و هوانگ (۲۰۰۸) در ارزیابی سیستم‌های تولید دو مرحله‌ای، کارایی کلی را به صورت حاصل‌ضرب کارایی مراحل در موقعیت بازده به مقیاس ثابت تعریف کردند. چن و همکاران (۲۰۰۹) مدل مشابه مدل کائو و هوانگ (۲۰۰۸) پیشنهاد دادند با این تفاوت که تجزیه کارایی در روش آنها به صورت جمعی بود و مزیت روش آنها نسبت به روش کائو وهوانگ (۲۰۰۸) کاربرد روش در هر دو موقعیت بازده به مقیاس ثابت و متغیر بود. دسپوتیس وکوروناکوس (۲۰۱۴) روش جدیدی را برای محاسبه کارایی ساختار دو مرحله‌ای بصورت یک مدل ترکیبی ارائه نمودند، که نواقص روش‌های تجزیه ضربی و جمعی را برطرف می‌کرد.

در ادامه مقاله، در بخش دوم مفاهیم اولیه شامل مدل CCR و مدل درآمد و مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس ارائه شده است. در بخش سوم مدل درآمد با استفاده از برنامه‌ریزی خطی معکوس می‌باشد. بخش چهارم با استفاده از ساختار دو مرحله‌ای مدل درآمد با مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس ارائه شده است. در نهایت با ارائه دو مثال به نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

## ۲- پیشینه تحقیق

تعیین مقدار کارایی تاثیر بسزایی در ارزیابی عملکرد آن در مقایسه با سایر سیستم‌ها دارد. فارل (۱۹۵۷) برای نخستین بار روش نا پارامتری را مطرح کرد. او با استفاده از خروجی و ورودی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده تابع مرزی را چنان بر مجموعه‌ای از خروجی و ورودی‌ها برازش داد که حاصل این برازش یک تابع قطعه‌ای خطی بود. مقاله فارل اساس کار مقاله چارنز، کوپر و رودرز (CCR) (۱۹۷۸) شد. پس از آن بنکر، چارنز و کوپر (۱۹۸۴ ) مدل (BCC) را ارائه کردند این دو مقاله پایه بسیاری از مطالعات تحلیل کارایی شدند و این شاخه از علم تحقیق در عملیات به سرعت پیشرفت کرده تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها نامیده شد. در تحلیل پوششی داده‌ها برای تجزیه و تحلیل عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری یک اندازه به هر DMU به عنوان اندازه کارایی از برنامه‌ریزی ریاضی استفاده می‌گردد. به عبارت دیگر در DEA برای ارزیابی یک DMU، آن را با مجموعه‌ای نقاط کارا که مرز کارایی را تشکیل می‌دهند مقایسه می‌شود. بر پایه مجموعه امکان تولید می‌توان مدل‌های مختلفی را برای تعیین اندازه کارایی واحد تحت بررسی در نظر گرفت. فرم پوششی مدل CCR که توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) به صورت زیر ارائه گردید:

$$
\begin{aligned}
&\theta_o^* = \min \ \theta \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{io} \\
&i = 1, \dots, m \qquad (۱)\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} \\
&r = 1, \dots, s \\
&\lambda_j \ge 0 , j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

مدل (۱) یکی از مدل‌های پایه‌ای DEA می‌باشد که با تکنولوژی تولید بازده به مقیاس ثابت بیان شده است. مقدار بهین مدل فوق کارایی تکنیکی گفته می‌شود. زیرا با توجه به نوع تکنولوژی تولید هر نوع انبساط و انقباض شعاعی برای تمامی DMUها و هر نوع ترکیب نامنفی از آنها را فراهم می‌سازد.

مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها هیچ فرضی بر حضور قیمت ورودی‌ها و/یا خروجی‌ها ندارند. پس با وجود قیمت ورودی‌ها و یا خروجی‌ها مدل‌های اشاره شده در قسمت قبل نمی‌توانند اطلاعات دقیقی از عملکرد واحد تصمیم‌گیری در اختیار بگذارند، بنابراین لازم است از مدل‌هایی که شامل بردار قیمت‌ها هستند، استفاده شود.

**۲-۱- مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس:**

مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید $S$ مجموعه جواب‌های شدنی مساله (۲) باشد و نیز $x^o$ یک جواب شدنی مفروض و $c$ بردار تابع هدف مساله (۲) باشند.

$$\begin{aligned} &\min \quad cx \\ &s.t: \quad Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{۲}$$

مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس بردار تابع هدف را به $\tilde{c}$ آشفته می‌کند طوری که نقطه شدنی $x^o$ جواب بهینه مساله نسبت به بردار $\tilde{c}$ باشد و کمترین فاصله را با بردار $c$ داشته باشد. بنابراین هدف مینیمم کردن $\|\tilde{c} - c\|$ می‌باشد. مساله معکوس با استفاده از شرایط بهینگی توسط ژانگ و لیو (۱۹۹۶) بصورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} &\min \quad \|\theta\| \\ &s.t. \quad \pi P_j - \theta_j = C_j \ \ , j \in \bar{J} \\ &\qquad \pi P_j - \theta_j = C_j \ \ , j \in J \\ &\qquad \theta_j \geq 0 \ , j \in \bar{J} \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن $J$ و $\bar{J}$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\bar{J} = \{j | x_j^o > 0\}, \\ &J = \{j | x_j^o = 0\} \end{aligned} \tag{۴}$$

**۲-۲- مدل درآمد**

مدل کارایی درآمد در پی یافتن واحدی است که با مصرف ورودی‌های برابر با ورودی‌های واحد تحت ارزیابی بیشترین درآمد را از فروش خروجی‌های نا کمتر از خروجی‌های واحد تحت ارزیابی به دست آورد.

مجموعه‌ای شامل $n$ واحد تصمیم‌گیری (DMU) متجانس که هر یک $m$ ورودی را برای تولید $s$ خروجی مصرف می‌کنند، را نظر بگیرید. بردارهای $x_{ij}$ $(i = 1, \dots, m)$ و، $y_{rj}$ $(r = 1, \dots, s)$ بترتیب مولفه $i$-ام بردار ورودی و مولفه $j$-ام بردار خروجی واحد تصمیم‌گیری $j$ ام که $(j = 1, \dots, n)$ باشند. فرض کنید بردار قیمت خروجی همه واحدها $R_r$ $(r = 1, \dots, s)$ و واحد تحت بررسی $DMU_O$ , $(o \neq j)$ باشند. مدل درآمد با فرض بازده به مقیاس ثابت توسط فارل (۱۹۵۷) به صورت زیر بیان شده است.

$$\begin{aligned} &\max \ \sum_{r=1}^{s} R_{ro} y_r \\ &s.t. \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ \leq x_{io} \\ &\qquad i = 1, \dots, m \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_r \\ &\qquad r = 1, \dots, s \\ &\qquad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{۵}$$

با فرض $(y^*, \lambda^*)$ به عنوان جواب بهینه مدل (۵)، کارایی درآمد واحد تحت ارزیابی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$E_R = \frac{\sum_{r=1}^{s} R_{ro} y_{ro}}{\sum_{r=1}^{s} R_{ro} y_r^*} \tag{۶}$$

که در آن $0 < E_{Rj} \leq 1$ می‌باشد.

**تعریف۲-۱:** $DMU_O$ را کارای درآمد نامند اگر و فقط اگر $E_{Ro} = 1$ .

## ۳- مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس درآمد

در این بخش با توجه به مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس، هدف بدست آوردن نزدیکترین بردار قیمتی است که نقطه شدنی کارای درآمد گردد. برای تعین مساله ثانویه مدل (۵)، فرض کنید $(y^o, \lambda^o)$ جواب شدنی مدل (۵)، $V_i$ متغیردوال $i$ امین محدودیت اول و $U_r$ متغیر دوال $r$ امین محدودیت دوم باشند در این صورت ثانویه مدل (۵) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io} \\ &s.t: \textstyle\sum_{i=1}^{m} V_i \, x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} U_r \, y_{rj} \geq 0 \\ &j = 1, \dots, n \\ &U_r = R_r \\ &r = 1, \dots, s \\ &U_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\ &V_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{۷}$$

با استفاده از شرایط بهینگی کروش- کان- تاکر K.K.T (۱۹۵۰) شرایط زیر باید برقرار باشد:

- $(y^o,\lambda^o)$ جواب شدنی اولیه باشد.
- $(U,V)$ جواب شدنی دوگان باشد.
- شرط مکمل زائد برقرار باشد.

بردار تابع هدفR را به بردار U طوری آشفته می‌شود، که نقطه شدنی نسبت به بردار U بهینه باشد. لذا هدف مینیمم نمودن $\|R-U\|$ است که از نرم یک می‌توان برای خطی نمودن $\|R-U\|$ استفاده کرد. حال با استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی معکوس که توسط ژانگ و لیو (۱۹۹۶) ارائه شده است. مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس برای مدل درآمد به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$
\begin{aligned}
&\min\ \|R-U\| = \min \sum_{r=1}^{s} |R_r - U_r| \\
&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{io} \qquad i=1,\dots,m \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} \qquad r=1,\dots,s \\
&\quad V_i\left( x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \right) = 0 \\
&i=1,\dots,m \\
&\quad U_r\left( \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - y_{ro} \right) = 0 \\
&r=1,\dots,s \\
&\quad \lambda_j\left( \sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj} \right) = 0 \\
&j=1,\dots,n \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj} \ge 0 \\
&j=1,\dots,n \\
&\qquad \lambda_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n \\
&\qquad U_r \ge 0 \qquad r=1,\dots,s \\
&\qquad V_i \ge 0 \qquad i=1,\dots,m
\end{aligned}
\qquad (۸)
$$

مدل (۸) یک مدل غیر خطی است که دارای (۲m+r+n) محدودیت و m+r+n متغیر می‌باشد و با استفاده از رابطه (۹) به یک مدل خطی تبدیل می‌گردد:

$$
\begin{aligned}
&t_r = R_r - U_r \quad , t_r = \alpha_r - \beta_r \\
&\alpha_r, \beta_r \ge 0 \qquad r=1,\dots,s \\
&\rho_{ij} = V_i\ \lambda_j\ , \\
&i=1,\dots,m\ , \qquad j=1,\dots,n \\
&\eta_{rj} = U_r\ \lambda_j, \\
&r=1,\dots,s\ , \qquad j=1,\dots,n
\end{aligned}
\qquad (۹)
$$

با در نظر گیری روابط (۹) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\min\ \sum_{r=1}^{s} (\alpha_r + \beta_r) \\
&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{io} \qquad i=1,\dots,m \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} \quad r=1,\dots,s \\
&\quad V_i x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} x_{ij} = 0 \\
&\quad i=1,\dots,m \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \eta_{rj} y_{rj} - U_r y_{ro} = 0 \\
&\quad r=1,\dots,s \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} \rho_{ij} x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \eta_{rj} y_{rj} = 0 \\
&\quad j=1,\dots,n \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj} \ge 0 \\
&\quad j=1,\dots,n \\
&\quad U_r = R_r - \alpha_r + \beta_r \\
&\quad r=1,\dots,s \\
&\quad \lambda_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n \\
&\quad U_r \ge 0 \qquad r=1,\dots,s \\
&\quad \alpha_r, \beta_r \ge 0 \qquad r=1,\dots,s \\
&\quad V_i \ge 0 \qquad i=1,\dots,m
\end{aligned}
\qquad (۱۰)
$$

**قضیه۳-۱:** اگر $DMU_O$ ناکارای تکنیکی باشد آنگاه برای هر بردار درآمدی مانند R در مدل ۵ همواره $DMU_O$ ناکارای درآمد است.

**اثبات:** برای این منظور فرض کنید (فرض خلف) که بردار $\bar{R} > 0$ وجود دارد بطوری که تحت آن $DMU_O$ کارای درآمد مدل ۵ می‌باشد. یعنی به ازای هر $\binom{X_o}{Y} \in PPS$ دلخواه داریم $\bar{R}Y \leq \bar{R}Y_o$. ولی از طرفی داریم $\binom{X_o}{\varphi^* Y_o} \in PPS$ و $\varphi^* > 1$ لذا $\bar{R}\varphi^* Y_o > \bar{R}Y_o$ تناقض با فرض هست.

**قضیه۳-۲:** اگر $DMU_O$ کارای تکنیکی باشد آنگاه بردار $R > 0$ ای هست که $DMU_O$ کارای درآمد مدل ۵ گردد.

**اثبات:** مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min\ & VX_o \\ s.t.\ & VX_j - UY_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \\ & UY_o = 1 \\ & U, V \geq 0 \end{aligned}$$

اگر $(U^*, V^*)$ جواب بهین مساله باشد داریم:

$$V^*X_o - U^*Y_o = 0:$$

از طرفی داریم $R = U^*$ و $\forall \binom{X_o}{Y} \in T$ داریم

$$V^*X_o - U^*Y \geq 0$$
$$U^*Y_o = 1 \ , V^*X_o = 1$$

پس نتیجه می‌شود.

$$U^*Y_o - U^*Y \geq 0 \quad \rightarrow \quad U^*Y_o \geq U^*Y$$

لذا داریم:

$$\forall \ \binom{X}{Y} \in T \ \rightarrow RY_o \geq RY \qquad \therefore$$

برای روشن‌تر شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

**مثال ۳-۱:** مجموعه‌ای از شش DMU را در نظر بگیرید بطوریکه هر واحد شامل دو ورودی و دو خروجی باشند جدول ۱ داده‌های متناظر با ورودی و خروجی واحدها را نشان می‌دهد. توجه کنید قیمت خروجی برای تمام واحدها یکسان است. قیمت خروجی اول ۱۷ و قیمت خروجی دوم ۲۴ است.

جدول ۲ نتایج حاصل از حل مدل‌های قبلی را برای داده‌های متناظر جدول ۱ نشان می‌دهد. ستون دوم و سوم بترتیب نتایج مدل CCR و مدل (۵) را در ارزیابی واحدها مشخص کرده است. واضح است که مدل (۵) درآمد ماکزیمم را محاسبه می‌کند و درآمد هر واحد در ستون چهارم قرار دارد. کارایی درآمد واحدها با بکارگیری رابطه۶ در ستون پنجم ارائه شده است. مقدار تابع هدف مدل معکوس (مدل (۸)) برای داده‌ها در ستون ششم جدول محاسبه شده است و در ستون هفتم و هشتم مقدار قیمت خروجی اول و دوم را به ترتیب به دست آمده است.

**جدول ۱: داده‌های ۶ واحد**

| DMU | ورودی ۱ | ورودی۲ | خروجی۱ | خروجی۲ |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱۱ | ۲۳ | ۲۰ | ۲۸ |
| ۲ | ۲۳ | ۳۱ | ۳۱ | ۲۳ |
| ۳ | ۱۴ | ۲۰ | ۱۲ | ۲۶ |
| ۴ | ۱۲ | ۳۰ | ۲۲ | ۱۹ |
| ۵ | ۳۰ | ۲۱ | ۲۶ | ۳۶ |
| ۶ | ۲۶ | ۳۳ | ۱۷ | ۲۹ |

با توجه به جدول ۲ واحدهای ۱ و ۵ کارای CCR و کارای درآمد هستند و مقدار تابع هدف با مدل معکوس برابر صفر و قیمت خروجی اول و دوم برابر با مقدار قبلی به‌دست آمده است. واحدهای ۳و۶ کارای CCR نیستند و با حل مدل معکوس مقدار تابع هدف ۴۱ و قیمت خروجی اول و دوم صفر به‌دست آمده است. ولی در واحدهای ۲ و ۴ که کارای CCR هستند و کارای درآمد نیستند مقدار تابع هدف مدل معکوس برای واحد دوم ۲۳/۲۱۸۹ و مقدار قیمت خروجی اول ۱۷ و قیمت خروجی دوم ۰/۷۸۱۱ به دست می‌آید، یعنی با تغییر قیمت خروجی دوم به این مقدار در واحد ۲ کارای درآمد حاصل می‌شود.

برای واحد ۴ نیز مقدار تابع هدف مدل معکوس ۲۳/۷۳۲۳ و مقدار قیمت خروجی اول ۱۷ و قیمت خروجی دوم ۰/۲۶۷۷ محاسبه شد. بر طبق قضیه ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که برای واحدهایی که کارای درآمد نیستند ولی کارای CCR هستند می‌توان مقدار قیمت‌را طوری به‌دست آورد که با قیمت جدید به دست‌آمده کارای درآمد گردند.

## ۴- سیستم تولید دو مرحله‌ای

در کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها واحد های تصمیم گیرنده‌ای وجود دارند که فرآیند تولید در آنها به صورت یک فرآیند دو یا چند مرحله‌ای در نظر گرفته می‌شود.

پیشتر بیان گردید که مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها با واحدهای تصمیم‌گیری همانند "جعبه سیاه" رفتار می‌کنند. و بدون توجه به ارتباطات بخش‌های داخلی واحدها، عملکرد آنها را از روی ورودی‌های اولیه و خروجی‌های نهایی مورد ارزیابی قرار می‌دهند. به منظور فایق آمدن بر این نواقص، تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای پیشنهاد گردید که قادر هستند با در نظر گرفتن تولیدات میانی و ورودی‌های مشترک کارایی کل و ارتباط بین مراحل آن را بسنجند. در DEA این نگرش نسبت به ساختار داخلی واحدها را تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای (NDEA) می‌گویند. ارزیابی واحدها با ساختار درونی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای را اولین بار توسط فار و گراسکوف در مقاله‌ای تحت عنوان "تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای" ارائه کردند. مطالعات زیادی در زمینه تحلیل پوششی داده‌ها شبکه‌ای انجام گرفته است که منجر به معرفی مدل‌ها، برای محاسبه کارایی سیستم‌های شبکه‌ای به مدل شبکه‌ای شده است، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای شکل استانداری ندارد و بر اساس ساختار داخلی آنها به صورت سری، موازی و ترکیبی ارائه شده است. که در این مقاله حالت خاصی از سیستم‌های شبکه‌ای موسوم به سیستم‌های تولید دومرحله‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**جدول ۲: محاسبه درآمد**

| DMU | کارایی | مدل درآمد | درآمد | کارایی درآمد | معکوس | قیمت خروجی۱ | قیمت خروجی۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۱۰۱۲ | ۱۰۱۲ | ۱ | ۰ | ۱۷ | ۲۴ |
| ۲ | ۱ | ۱۵۲۰/۴۶۲ | ۱۰۷۹ | ۰/۷۰۹۷ | ۲۳/۲۱۸۹ | ۱۷ | ۰/۷۸۱۱ |
| ۳ | ۰/۹۷۵ | ۹۶۴/۸۸۸۹ | ۸۲۸ | ۰/۸۵۸۱ | ۴۱ | ۰ | ۰ |
| ۴ | ۱ | ۱۱۰۴ | ۸۳۰ | ۰/۷۵۱۸ | ۲۳/۷۳۲۳ | ۱۷ | ۰/۲۶۷۷ |
| ۵ | ۱ | ۱۳۰۶ | ۱۳۰۶ | ۱ | ۰ | ۱۷ | ۲۴ |
| ۶ | ۰/۶۳۷۱ | ۱۶۴۷/۵۷۷ | ۹۸۴ | ۰/۵۹۷۲ | ۴۱ | ۰ | ۰ |

سیستم‌های تولید دو مرحله‌ای ساده‌ترین حالت از سیستم‌های تولید با ساختار شبکه می‌باشند که مراحل آنها به صورت سری با هم در ارتباط می‌باشند. مطالعات زیادی در ارتباط با سیستم دو مرحله‌ای در تحلیل پوششی داده‌ها صورت گرفته است، که اهمیت استفاده از آن را در سنجش کارایی واحدهای تصمیم‌گیری در صنایع مختلف نشان می‌دهد که به برخی از این مطالعات در پیشینه تحقیق اشاره شد.

در سیستم‌های دو مرحله‌ای در مرحله اول ورودی‌ها برای تولید خروجی‌هایی مصرف می‌شود که محصول میانی نام دارند و به عنوان ورودی‌های مرحله دوم مورد استفاده قرار می‌گیرند تا خروجی‌های نهایی به دست آید. فرض کنید $n$ واحد تصمیم‌گیری با ساختار دو مرحله‌ای موجود باشند. مرحله اول $m$ ورودی را برا ی تولید $q$ محصول میانی مصرف می‌کنند. و مرحله دوم خروجی مرحله اول را بعنوان ورودی مرحله دوم در نظر گرفته و برای تولید $s$ خروجی نهایی مصرف می‌کنند. فرض کنید برای هر $DMU_j$، $(j = 1, \dots, n)$، بردار ورودی مرحله اول بصورت $x_{ij}$ $(i = 1, \dots, m)$، بردار مقادیر میانی بصورت $Z_{dj}$ $(d = 1, \dots, D)$، بردار خروجی مرحله دوم بصورت $y_{rj}$ $(r = 1, \dots, s)$ باشند. شکل ۱، یک سیستم تولید دو مرحله‌ای را نشان می‌دهد.

مدل CCR کارایی سیستم را بدون توجه به ساختار دومرحله‌ای می‌سنجد و ارتباط مراحل نادیده گرفته می‌شود. از مهمترین مطالعات در زمینه ارزیابی عملکرد سیستم‌های تولید دو مرحله‌ای می‌توان به مقاله کائو و هوانگ (۲۰۰۸) اشاره کرد. کائو و هوانگ (۲۰۰۸) با اضافه کردن عملیات مربوط به هر مرحله به مدل CCR کسری توانستند عملکرد سیستم‌های دو مرحله‌ای را اصلاح کنند و مدل را بصورت زیر ارائه دادند.

$$
\begin{aligned}
E_k = \max_{u,v,w} \ & \frac{u^t y_k}{v^t x_k} \\
\text{s.t} \quad & \frac{u^t y_j}{v^t x_j} \le 1 \quad j = 1, \dots, n \\
& \frac{u^t y_j}{w^t z_j} \le 1 \quad j = 1, \dots, n \\
& \frac{w^t z_j}{v^t x_j} \le 1 \quad j = 1, \dots, n \\
& u, v, w \ge 0
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

با توجه به مدل (۱۱) می‌توان از محدویت‌های دوم و سوم، محدودیت اول را بدست آورد لذا محدودیت اول را می‌توان از مدل حذف کرد. توجه داشته باشیم در مدل (۱۱) فرض اساسی بر این است که وزن اختصاص داده شده به محصولات میانی در هر دو مرحله یکسان هست اگرچه در مرحله اول به عنوان خروجی و در مرحله دوم به عنوان ورودی عمل می‌کنند. ماهیت دوگانه محصولات میانی باعث می‌گردد که کارایی کل سیستم برابر با حاصلضرب کارایی‌های مراحل است $(E_k = E_k^1 \times E_k^2)$. در حقیقت مدل معرفی شده کائو و هوانگ (۲۰۰۸) رابطه فیزیکی بین فرایند کل و زیر فرایندهای جزء را توصیف می‌کند. با استفاده از تبدیلات چارنز و کوپر (۱۹۶۲) فرم خطی مدل (۱۱) به صورت مدل (۱۲) بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
E_K = \max & \sum_{r=1}^{s} u_r Y_{rk} \\
\text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
& \sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \\
& j = 1, \dots, n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj} \le 0 \\
& j = 1, \dots, n, \\
& u_r, v_i, w_d \ge 0 \quad , r = 1, \dots, s; \\
& i = 1, \dots, m; \ \ d = 1, \dots, D.
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

مدل ارائه شده کائو و هوانگ (۲۰۰۸) از جمله مدل‌های شعاعی است بدین معنی که تغییر در ورودی‌ها یا خروجی‌ها به یک نسبت صورت می‌پذیرد و می‌توان از آن در ارزیابی سیستم‌های تولید دومرحله‌ای استفاده کرد. توجه داشته باشیم که این مدل فقط در بازده به مقیاس ثابت قابل استفاده است. فرم پوششی مدل (۱۲) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
\min \ & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta\, x_{io} \\
& i = 1, \dots, m
\end{aligned}
$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-\mu_j)z_{pj}\geq 0$$
$$p=1,\dots,q$$
$$\sum_{j=1}^{n}\mu_j y_{rj}\geq y_{ro}$$
$$r=1,\dots,s$$
$$\mu_j,\lambda_j\geq 0 \qquad j=1,\dots,n \qquad (۱۳)$$

### ۴-۱- مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس مدل درآمد با ساختار دو مرحله‌ای

در این بخش کارایی درآمد را برای ساختار دو مرحله‌ای بیان می‌شود و سپس مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس مدل درآمد را برای ساختار دو مرحله‌ای معرفی می‌شود. با استفاده از کارایی سیستم دو مرحله‌ای (۱۳) مدل درآمد را برای سیستم دو مرحله‌ای به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$\max\sum_{r=1}^{s}R_{ro}y_r$$
$$\text{s.t.}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\leq x_{io}\ ,i=1,\dots,m \qquad (a)$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-\mu_j)z_{pj}\geq 0\ ,p=1,\dots,q \quad (b)$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\geq y_r\ ,r=1,\dots,s \qquad (c)$$
$$\mu_j,\lambda_j\geq 0 \qquad j=1,\dots,n \qquad (۱۴)$$

**تعریف ۴-۱:** فرض کنید $(y^*,\lambda^*,\mu^*)$ جواب بهینه مدل (۱۴) باشد.کارایی درآمد واحد تحت ارزیابی بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_R=\frac{\sum_{r=1}^{s}R_{ro}y_{ro}}{\sum_{r=1}^{s}R_{ro}y_r^*} \qquad (۱۵)$$
$$E_{Rj}\leq 1$$

واحد تحت ارزیابی را کارای درآمد نامند اگر و فقط اگر $E_R=1$.

در این بخش با توجه به مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس، هدف بدست آوردن نزدیکترین بردار قیمتی است که نقطه شدنی کارای درآمد گردد. برای تعین مساله ثانویه مدل (۱۴)، فرض کنید $(y^o,\lambda^o,\mu^o)$ جواب شدنی مدل (۱۴)، $U_r$ متغیر دوال $r$ امین محدودیت (c) و $V_i$ متغیردوال $i$ امین محدودیت (a) و $W_p$ متغیردوال $p$ امین محدودیت (b) باشند. در این صورت ثانویه مدل (۱۴) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\min\sum_{i=1}^{m}V_i\,x_{io}$$
$$\text{s.t:}\quad\sum_{p=1}^{q}W_p\,z_{pj}-\sum_{i=1}^{m}V_i\,x_{ij}\leq 0$$
$$j=1,\dots,n$$
$$\sum_{r=1}^{s}U_r\,y_{rj}-\sum_{p=1}^{q}W_p\,z_{pj}\leq 0$$
$$j=1,\dots,n$$
$$U=R \qquad (۱۶)$$
$$U_r\geq 0 \qquad r=1,\dots,s$$
$$V_i\geq 0 \qquad i=1,\dots,m$$

مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس درآمد با ساختار دو مرحله‌ای با استفاده از شرایط بهینگی کروش –کان- تاکر به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\min\ \|R-U\|=\min\sum_{r=1}^{s}|R_r-U_r|$$
$$\text{s.t.}\quad\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\ \leq x_{io} \qquad i=1,\dots,m$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-\mu_j)z_{pj}\geq 0 \quad p=1,\dots,q$$
$$\sum_{j=1}^{n}\mu_j y_{rj}\geq y_{ro} \qquad r=1,\dots,s$$
$$\sum_{p=1}^{q}W_p\,z_{pj}-\sum_{i=1}^{m}V_i\,x_{ij}\leq 0$$
$$j=1,\dots,n$$
$$\sum_{r=1}^{s}U_r\,y_{rj}-\sum_{p=1}^{q}W_p\,z_{pj}\leq 0$$

$$j = 1, \dots, n$$
$$V_i\left(x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}\right) = 0$$
$$i = 1, \dots, m$$
$$W_p\left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) z_{pj}\right) = 0$$
$$p = 1, \dots, q$$
$$U_r\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_{rj} - y_{ro}\right) = 0$$
$$r = 1, \dots, s$$
$$\lambda_j\left(\sum_{p=1}^{q} W_p\, z_{pj} - \sum_{i=1}^{m} V_i\, x_{ij}\right) = 0$$
$$j = 1, \dots, n$$
$$\mu_j\left(\sum_{r=1}^{s} U_r\, y_{rj} - \sum_{p=1}^{q} W_p\, z_{pj}\right) = 0$$
$$j = 1, \dots, n$$
$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n\ ,$$
$$W_p \geq 0 \quad p = 1, \dots, q\ ,$$
$$U_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s\ , \qquad (۱۷)$$
$$V_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

مدل (۱۷) غیر خطی است که با تغییر متغیر بصورت زیر به یک مساله خطی تبدیل می‌شود.

$$t_r = R_r - U_r\ , \quad t_r = \alpha_r - \beta_r$$
$$\alpha_r, \beta_r \geq 0 \qquad r = 1, \dots, s$$
$$\rho_{ij} = V_i\ \lambda_j \quad , \quad \eta_{rj} = U_r\, \boldsymbol{\mu}_j \quad ,$$
$$\Upsilon_{pj} = W_p\ \lambda_j \qquad (۱۸)$$
$$K_{pj} = W_p\, \boldsymbol{\mu}_j \quad i = 1, \dots, m\ ,$$
$$j = 1, \dots, n, \qquad p = 1, \dots, q$$

با تغییر متغیر (۱۸) مساله برنامه‌ریزی خطی بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\min \ \sum_{r=1}^{s} (\alpha_r + \beta_r)$$
$$\text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} x_{ij} \leq V_i x_{io}$$
$$i = 1, \dots, m$$
$$\sum_{j=1}^{n} (\Upsilon_{pj} - K_{pj}) z_{pj} \geq 0$$
$$p = 1, \dots, q$$
$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{rj} y_{rj} \geq U_r y_{ro} \qquad r = 1, \dots, s$$
$$\sum_{p=1}^{q} \Upsilon_{pj}\, z_{pj} - \sum_{i=1}^{m} \rho_{ij}\, x_{ij} \leq 0$$
$$j = 1, \dots, n \qquad (۱۹)$$
$$\sum_{r=1}^{s} \eta_{rj}\, y_{rj} - \sum_{p=1}^{q} K_{pj}\, z_{pj} \leq 0$$
$$j = 1, \dots, n$$
$$V_i x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} x_{ij} = 0$$
$$i = 1, \dots, m$$
$$\sum_{j=1}^{n} (\Upsilon_{pj} - K_{pj}) z_{pj} = 0$$
$$p = 1, \dots, q$$
$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{rj} y_{rj} - U_r y_{ro} = 0$$
$$r = 1, \dots, s$$
$$\sum_{p=1}^{q} \Upsilon_{pj}\, z_{pj} - \sum_{i=1}^{m} \rho_{ij}\, x_{ij} = 0$$
$$j = 1, \dots, n$$
$$\sum_{r=1}^{s} \eta_{rj}\, y_{rj} - \sum_{p=1}^{q} K_{pj}\, z_{pj} = 0$$
$$j = 1, \dots, n$$
$$R_r = U_r - \alpha_r + \beta_r \qquad r = 1, \dots, s$$
$$\rho_{ij} \geq 0\ , \qquad j = 1, \dots, n$$
$$i = 1, \dots, m \quad ,$$
$$V_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m$$
$$U_r \geq 0 \quad , \quad \eta_{rj} \geq 0 \quad ,$$
$$r = 1, \dots, s \quad , j = 1, \dots, n$$
$$\alpha_r\, , \beta_r \geq 0 \quad , r = 1, \dots, s$$
$$K_{pj}\, , \Upsilon_{pj} \geq 0 \qquad p = 1, \dots, q \quad ,$$
$$j = 1, \dots, n$$

**مثال ۴-۱:** فرض کنید ۶ واحد فرضی وجود دارند که شامل دو ورودی اولیه و دو ورودی میانی و دو خروجی

نهایی می‌باشند. قیمت خروجی اول ۱۵ وقیمت خروجی دوم ۲۰ می‌باشد. جدول ۳ داده‌ها را نمایش می‌دهد. با استفاده از داده‌های جدول ۳ به بررسی کارایی و کارایی درآمد و مدل معکوس ارائه شده در حالتی که سیستم دو مرحله‌ای داریم پرداختیم، و نتایج حاصل را در جدول ۴ ارائه نمودیم. همانطور که مشاهده می‌شود در ۶ واحد بررسی شده سه واحد کارای CCR هستند و دو واحد کارایی درآمد دارند. واحد ۲ که کارای درآمد است در مدل معکوس (۱۷) همان قیمت‌های قبل را برای خروجی به دست آورد، در حالیکه در واحد ۱ قیمت جدیدی به دست آمد که با بررسی این قیمت‌های جدید با مدل کارایی درآمد دوباره واحد ۱ کارایی درآمد را دارد. همینطور برای واحد ۵ که کارای درآمد نبود توانستیم قیمت‌های جدیدی بیابیم که با این قیمت‌های جدید کارایی درآمد را داریم. و واحدهای ۳و ۴و ۶ که کارای CCR نیستند مقدار قیمت صفر به دست آمد.

## نتیجه‌گیری

با توجه به مطالب بیان شده با استفاده از برنامه‌ریزی خطی معکوس مدل جدیدی ارائه شد که بوسیله آن توانستیم برای واحدهایی که کارای CCR بودند ولی کارای درآمد نبودند بردارقیمت جدید را طوری بیابیم که کارای درآمد گردند. این روش را برای سیستم دو مرحله‌ای نیز به کار گرفتیم که نتایج مشابه را داشت و به وضوح دیده شد که محصولات میانی بر کارایی درآمد تاثیر دارند. مهم‌ترین ویژگی روش پیشنهادی، تعیین قیمت‌های جدید در جهت دستیابی به سطح بهینه در تعیین استراتژی واحدها است چرا که کارایی درآمد تشکیل دهنده منبع مهم‌تری از اطلاعات برای مدیریت است و برنامه‌ریزی بر اساس آن معتبرتر است.

**جدول ۳: داده‌های ۶ واحد**

| DMU | ورودی۱ | ورودی۲ | میانی۱ | میانی۲ | خروجی۱ | خروجی۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱۱ | ۱۳ | ۲۱ | ۱۵ | ۳۰ | ۲۸ |
| ۲ | ۲۳ | ۱۱ | ۱۹ | ۱۴ | ۳۱ | ۲۳ |
| ۳ | ۱۴ | ۲۰ | ۲۲ | ۳۳ | ۱۲ | ۲۶ |
| ۴ | ۱۲ | ۳۰ | ۲۵ | ۳۴ | ۲۲ | ۱۹ |
| ۵ | ۱۰ | ۲۱ | ۲۷ | ۱۶ | ۲۶ | ۳۶ |
| ۶ | ۲۶ | ۳۳ | ۱۱ | ۲۹ | ۱۷ | ۲۹ |

**جدول ۴: نتایج به دست آمده از مدل‌های کارایی درآمد**

| DMU | کارایی (۱۳) | مدل درآمد (۱۴) | کارایی درآمد (۱۵) | مدل معکوس (۱۷) | $U_1$ | $U_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۱۰۱۰ | ۱ | ۱۰/۵۴ | ۴/۵۹ | ۱۹/۸۶ |
| ۲ | ۱ | ۹۲۵ | ۱ | ۰ | ۱۵ | ۲۰ |
| ۳ | ۰/۶۱۸۲ | ۱۴۰۷/۸۳۰ | ۰/۴۹۷۲ | ۳۵ | ۰ | ۰ |
| ۴ | ۰/۴۷۶۴ | ۱۴۹۴/۲۳ | ۰/۴۷۵۲ | ۳۵ | ۰ | ۰ |
| ۵ | ۱ | ۱۲۲۱/۶۸۹ | ۰/۹۰۸۶ | ۱۰/۷۷ | ۴/۲۳ | ۲۰ |
| ۶ | ۰/۳۹۷۹ | ۲۴۷۲/۱۵۸ | ۰/۳۳۷۸ | ۳۵ | ۰ | ۰ |

## فهرست منابع


[1] Farrell, M.T. (1957), "The Measurement of Productive Efficiency," Journal of the Royal Statistical Society Series A, 120, III pp.253-281.

[2] A.Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes "Measuring the efficiency of decision making units". European Journal of Operational Research .2, 429 - 444. (1978).

[3] F. Hosseinzadeh Lotfi, M. Navabakhs, A. Tehranian, M., Rostamy-Malkhalifeh, R. Shahverdi, "Ranking Bank Branches with Interval Data The Application of DEA". International Mathematical Forum, 2, no . 9, 429-440. (2007).

[4] A. Barzegarinegad, G. Jahanshahloo, M. Rostamy-Malkhalifeh, "A Full Ranking for Decision Making Units Using Ideal and Anti – Ideal Points in DEA".The Scientific World Journal, volum 2014, Article ID 282939, 8 Pages .(2014).

[5] H. Nikfarjam, M. Rostamy-Malkhalifeh, S. Mamizadeh -Chatghayeh, "Measuring supply chain efficiency based on hybrid approach". Transportation Research Part D: Transport and Environment, 39, 141-150. (2015).

[6] R. Banker and A. Maindiratta, "Nonparametric analysis of technical and allocative efficiencies in production". Econometrical, 56(6), 1315-1332.( 1998).

[7] J.Zhang, Z. Liu, "Calculating some inverse linear programming problems". Journal of Computational and Applied Mathematics. 72. 261-273. (1996).

[8] C.Yang, J. Zhang, "Two General Methods for Inverse Optimization Problems". Applied Mathematics Letters. 12. 69-72. (1999).

[9] R.K. Ahuja and J.B. Orlin, "Inverse Optimization". Operations Research, 49, 771-783. (2001).

[10] G.R. Amin and A. Emrouznejad, "Inverse Linear Programming in DEA" International Journal of Operations Research Vol. 4, No. 2 105-109. (2007).

[11] S. Sadri, M. Rostamy- Malkhalifeh, N. Shoja, "Inverse Linear Programming In Cost Efficiency And Network". Advances And Applications In Statistics.51 .131-149. (2017).

[12] S. Sadri, M. Rostamy- Malkhalifeh, N. Shoja, " A New Method for Optimization of Inefficient Cost units in the Presence of Undesirable Outputs".International Journal Industrial Mathematics. 10. 331-338. (2018).

[13] M. Ghiyasi, Inverse DEA models based on cost and revenue efficiency. Computers & Industrial Engineering.114 .258-263. (2017).

[14] M. Dash, "Cost efficiency of Indian life insurance service providers using data envelopment analysis". Asian Journal of Finance & Accounting.10. 59-80. (2018).

[15] A. Khoshgova, M. Rostamy-Malkhalifeh, "Calculating Cost Efficiency with Integer Data in the Absence of Convexity". International Journal of Data Envelopment Analysis. 4.951-956. (2016).

[16] R. Fare, S. Grosskopf., ‘’Network DEA’’. Socio- Economic Planning Sciences, 34, 35-49. (2000).

[17] A.Charnes, W. W. Cooper, B. Golany, R.Halek, G. Klopp, E. Schmitz, and, D. Thomas, " Two-phase data envelopment analysis approaches to

policy evaluation and management of army recruiting activities: Tradeoffs between joint services and army advertising". Research Report CCS#532. Center for Cybernetic Studies, University of Texas-Austin, TX (1986).

[18] T.R. Sexton and H.F. Lewis "Two stage DEA: An application to Major League Baseball". Journal of Productivity Analysis, 19, 227-249. (2003).

[19] H.F. Lewis, T.R. Sexton, "Data Envelopment Analysis with Reverse Inputs and Outputs". Journal of Productivity Analysis, 21(2):113-132. (2004).

[20] C. Kao, S-N. Hwang, Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. European Journal of Operational Research, 185:418-429. (2008).

[21] Y. Chen, WD. Cook, N.Li, J. Zhu, Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. European Journal of Operational Research, 196: 1170-1176plex internal structures. Computers and Operations Research 31 (9), 1365–1410. (2009).

[22] D K. Despotis, G. Koronakos, D. Sotiros. Composition versus decomposition in two-stage network DEA: a reverse approach. Journal of productivity Analysis, 45(1): 71-87. (2014).

[23] R. D. Banker, A. Charnes, W.W. Cooper, "Some Models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis", Management Science 30, 1078-1092 . (1984).

[24] H. Kuhn, A. Tucker, "Non-Linear Programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probality", University of California Press, Berkeley, California. (1950).

[25] A, Charnes, W.W. Cooper, Programming with linear fractional functional. Naval Research Logistics Quarterly, 9, 181-185. (1962).

[26] W.W.Cooper, L.M. Seiford, K. Tone, Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, Refrences and DEA Solver Software. Springer-Verlag New York, Inc. (2006).