دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره یازدهم، پاییز ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

عمل گروه‌های ایزومتری نیم ساده روی برخی خمینه‌های ریمانی با خمیدگی نامثبت

مرضیه بختیاری[۱*]، رضا میرزایی[۲]

(۱ و ۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، قزوین، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۱/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۱۵

چکیده

یک خمینه همراه با عمل هموار گروه لی G را G–خمینه می‌نامند. در این مقاله، خمینه‌ی ریمانی کامل M را همراه با عمل زیر گروه لی بسته G از ایزومتری‌ها در نظر می‌گیریم. بعد فضای مداری را نقص همگنی این عمل می‌نامند. خمینه‌هایی که عمل با نقص همگنی صفر دارند را همگن می‌نامند. قضیه‌ای در مورد خمینه‌های ریمانی با خمیدگی نامثبت بیان می‌کند که خمینه‌های همگن با خمیدگی نامثبت، با $\mathbb{R}^k \times T^m$ که $dimM = m + k$ وابرسان[۱] می‌باشند. قضایای جالبی در مورد خواص توپولوژیک G–خمینه‌های با نقص همگنی یک وجود دارد. اثبات شده است که اگر M یک G–خمینه ریمانی با نقص همگنی یک و با خمیدگی منفی و $dimM > 3$ باشد، آنگاه M با $\mathbb{R}^k \times T^m$ که $dimM = m + k$ وابرسان است یا $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$. همچنین می‌دانیم که اگر M یک G–خمینه‌ی با خمیدگی منفی و G نیم ساده باشد، آنگاه M همبند ساده است. می‌خواهیم یک تعمیم از این قضیه را برای برخی خمینه‌های ریمانی با خمیدگی نامثبت ثابت کنیم. نشان می‌دهیم که اگر M خمینه‌ی ریمانی با نقص همگنی یک باشد چنانکه به صورت $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ تجزیه و برای هر $1 \le i \le k$، M_i خمیدگی منفی داشته و $dimM_i \ge 3$ و همچنین G نیم ساده بدون فاکتور فشرده باشد، آنگاه M همبندساده است.

واژه‌های کلیدی: خمینه‌های حاصلضربی، گروه لی نیم ساده، G–خمینه، نقص همگنی.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: m.bakhtiari@edu.ikiu.ac.ir

1. diffeomorphic

۱- مقدمه

اگر گروه لی G روی خمینه‌ی M عمل کند، M را یک G-خمینه می‌گویند و بعد فضای مداری را نقص همگنی[1] این عمل می‌نامند. اگر نقص همگنی k و بعد M برابر با n باشد، بعد هر مدار اصلی[2] برابر با $n-k$ می‌باشد. مدارهایی که بعد آنها از مدار اصلی کمتر است، مدار تکین[3] نام دارند. خمینه‌های با نقص همگنی صفر را همگن می‌نامند. در [۹] اثبات شده است که خمینه‌های ریمانی همگن با خمیدگی منفی، همبندساده[4] می‌باشند. خمینه‌های ریمانی با نقص همگنی یک در [۱] و [۲] بررسی شده‌اند. خمینه‌های ریمانی با خمیدگی نامثبت در [۳]، [۲۰] و [۷]، مطالعه شده اند. F. Podesta و A. Spiro در[۱۸]، خمینه‌های ریمانی با خمیدگی منفی و نقص همگنی یک را مطالعه و به نتایج جالبی دست پیدا کرده‌اند. آنها ثابت کرده‌اند که فضای مداری خمینه‌ی M با خمیدگی منفی و نقص همگنی یک، با $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^+$ همسان[5] است و مورد دوم فقط هنگامی رخ می‌دهد که مدار تکین یک ژئودزیک و یا M همبند ساده باشد. Searl در [۱۹] یک طبقه بندی کامل از خمینه‌های با نقص همگنی یک و با ابعاد کمتر از شش، تحت این شرط که M فشرده و با خمیدگی مثبت باشد ارائه داده است.

در [۱۵]، خواص توپولوژیک برخی از G-خمینه‌های با نقص همگنی یک و خمیدگی نامثبت مطالعه و تحت شرایط مناسب روی $\widetilde{M}$، اثبات شده است که هر مدار تکین ناویژه یک زیر خمینه‌ی تماماً ژئودزیک است و حداکثر یک مدار تکین وجود دارد و اگر مدار تکین موجود باشد، آنگاه آن مدار به ازای اعداد صحیح m,k با $\mathbb{R}^k \times T^m$ وابرسان است. در [۱۶]، یک طبقه‌بندی توپولوژیکی از برخی G-خمینه‌های ریمانی با نقص همگنی دو با خمیدگی نامثبت و مدارهای آن ها شده است. در [۱۸] ثابت شده است که اگر M یک G-خمینه با خمیدگی منفی و G زیر گروه لی نیم ساده از ایزومتری‌های M باشد که با نقص همگنی یک روی آن عمل می‌کند، آنگاه M همبند ساده است. در این مقاله ثابت می‌کنیم که اگر M خمینه‌ی ریمانی با نقص همگنی یک باشد که به صورت $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ تجزیه و برای هر k، $1 \le i \le k$، M_i خمیدگی منفی داشته و $dimM_i \geq 3$ و همچنین G نیم ساده[6] بدون فاکتور فشرده باشد، آنگاه M همبندساده است.

۲- تعاریف و مقدمات

در آنچه می‌آید، M یک خمینه‌ی ریمانی و G زیر گروه لی بسته و همبند از ایزومتری‌های M است. $\widetilde{M}$ خمینه‌ی پوششی ریمانی تمام M، همراه با نگاشت پوششی $\pi: \widetilde{M} \to M$ است. عمل G روی M موثر[7] است، بدین معنا که برای هر ایزومتری $g \in G$، $x \in M$ وجود دارد که $g(x) \neq x$. گروه انتقال‌های صلب[8] را با Δ نشان می‌دهیم.

یادآوری ۱-۲: G-مدار شامل $x \in M$ را به صورت مجموعه‌ی $G(x) = \{g(x): g \in G\}$ نشان می‌دهیم.

مجموعه $G_x = \{g \in G: g(x) = x\}$، زیر گروه پایاگر[9] $x \in M$ نام دارد. اگر G_p و G_q در G مزدوج باشند، دو مدار $G(p)$ و $G(q)$ را از یک نوع می‌نامیم. یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی مجموعه‌ی انواع مدارهای عمل G روی M به این صورت تعریف می‌کنیم که $[G(p)] \le [G(q)]$ اگر و فقط اگر G_q با یک زیر گروه از G_p در G مزدوج باشد. اگر M/G همبند باشد، آنگاه بزرگترین نوع مدار وجود دارد. هر نماینده از این بزرگترین نوع را مدار اصلی می‌نامیم. به عبارت دیگر، مدار $G(p)$ اصلی است اگر و فقط اگر برای هر $q \in M$، G_p با زیر گروهی از G_p در G مزدوج باشد. اجتماع همه‌ی مدارهای اصلی یک زیر مجموعه‌ی باز و چگال در M است. هر مدار اصلی یک مدار با بعد ماکزیمال است. مدارهایی که اصلی نیستند اما بعدی برابر

1. cohomogeneity
2. principal orbit
3. singular
4. simply connected
5. homeomorphic
6. semisimple
7. effectively
8. deck transformation
9. isotropy

با مدارهای اصلی دارند را مدار تکین ویژه[1] می‌نامند. مداری که بعد آن از بعد مدار اصلی کمتر است، مدار تکین نام دارد.

قضیه ۲-۲ ([۱۰]، [۶]): اگر M یک G-خمینه با نقص همگنی k باشد، آنگاه گروه پوششی همبند $\tilde{G}$ از G وجود دارد که $\tilde{G}$ به صورت ایزومتری روی $\tilde{M}$ عمل می‌کند و $\tilde{M}$ یک $\tilde{G}$-خمینه با نقص همگنی k است و
آ) اگر $\tilde{g} \in \tilde{G}$ و $\delta \in \Delta$، آنگاه $\tilde{g}\delta = \delta\tilde{g}$.
ب) اگر G نقطه‌ی ثابت در M داشته باشد، آنگاه $\tilde{G} = G$ و $\tilde{M}^{\tilde{G}} = M^G$.
ج) اگر G فقط یک نقطه‌ی ثابت در M داشته باشد، آنگاه $\tilde{M} = M$.
د) هر $\delta \in \Delta$، $\tilde{G}$-مدارها را به $\tilde{G}$-مدار ها می‌نگارد.
ه) اگر به ازای هر $x \in M$، $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$، آنگاه $\pi\tilde{G}(\tilde{x}) = G(x)$.

قضیه ۳-۲ ([۹]): اگر M یک خمینه‌ی ریمانی همگن با خمیدگی نامثبت و تانسور ریچی منفی باشد، آنگاه M همبند ساده است (با $\mathbb{R}^n$ دیفئو مورفیک است، $dimM = n$).

قضیه ۴-۲ ([۱۸]): اگر M یک G-خمینه با خمیدگی منفی و G زیر گروه لی نیم ساده از ایزومتری‌های M باشد که با نقص همگنی یک روی آن عمل می‌کند، آنگاه M همبند ساده است.

گزاره ۵-۲ ([۶]،[۱۵]،[۱۸]): فرض کنیم خمینه‌ی ریمانی M تحت عمل زیر گروه لی همبند و بسته G از ایزومتری‌های M از نقص همگنی یک باشد، آنگاه:
آ) اگر M همبندساده و با خمیدگی نامثبت باشد، آنگاه حداکثر یک مدار تکین دارد.
ب) اگر M خمینه‌ی با خمیدگی نامثبت و B مدار تکین یکتای M باشد، آنگاه $\pi_1(M) = \pi_1(B)$.
ج) اگر M همبند ساده باشد، آنگاه هیچ مدار تکین ویژه وجود ندارد.
د) اگر M همبند ساده و بدون مدار تکین باشد، آنگاه $M/G = \mathbb{R}$.
ه) هیچ مدار تکین ویژه‌ای همبند ساده نیست.

یادآوری ۶-۲ ([۱۷]): فرض کنیم g جبر لی G باشد، تابع $B: g \times g \to \mathbb{R}$ که $B(X,Y) = trace(ad_X ad_Y)$ را فرم کیلینگ[2] می‌نامند که $ad_X: g \to g$ به صورت $ad_X(Y) = [X,Y]$ تعریف می‌شود.

تعریف ۷-۲ ([۱۷]): فضای متقارن ریمانی $M = G/H$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\hbar$ جبر لی H و m فضای عمود بر آن باشد، آنگاه $M = G/H$ را از نوع فشرده می‌نامیم هرگاه فرم کیلینگ منفی معین باشد، و $M = G/H$ از نوع نافشرده است اگر فرم کیلینگ روی $\hbar$ منفی معین و روی m مثبت معین باشد.

قضیه ۸-۲ ([۱۷]): فرض کنیم $M = G/H$ فضای متقارن ریمانی باشد، آنگاه:
آ) اگر $M = G/H$ از نوع فشرده باشد، آنگاه خمیدگی M نامنفی و تانسور ریچی مثبت است، بنابراین M فشرده و $\pi_1(M)$ متناهی است.
ب) اگر $M = G/H$ از نوع نافشرده باشد آنگاه، خمیدگی آن نامثبت و تانسور ریچی آن منفی است، بنابراین M با فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ وابرسان است.

یادآوری ۹-۲ ([۲]): اگر M یک G-خمینه‌ی همبند ساده و تمامی مدارها اصلی باشند، آنگاه هر مدار با G/K وابرسان است که K یک زیر گروه ماکزیمال و فشرده در G است.

تعریف ۱۰-۲ ([۸]): گروه لی همبند و نا آبلی G را ساده (نیم ساده) می‌نامند هرگاه زیر گروه نرمال غیر بدیهی (نرمال حل پذیر[3]) نداشته باشد.

1. exceptional singular orbit
2. Kiling form
3. solvable

یادآوری ۱۱-۲ ([۸]): اگر G گروه لی نیم ساده باشد، آنگاه $G = ANK$ که A آبلی،N پوچتوان، K فشرده و لذا $S = AN$ حل پذیر است.

یادآوری۱۲-۲([۸]): فرض کنیم G یک گروه لی همبند و نیم ساده بدون فاکتور فشرده و با مرکز متناهی و K زیر گروه ماکزیمال و فشرده از G باشد. آنگاه G/K با یک متر G-ناوردای ریمانی، فضای متقارن ریمانی از نوع نافشرده بوده و خمیدگی نامثبت دارد.

گزاره ۱۳-۲ ([۴]،[۸]): فرض کنیم $M = G/K$ یک خمینه‌ی ریمانی همگن با خمیدگی نامثبت از گروه نیم ساده G باشد که به صورت موثر روی M عمل می‌کند. آنگاه M یک فضای متقارن از نوع نا فشرده بوده و K یک زیر گروه ماکزیمال و فشرده از گروه G است و G مرکز متناهی دارد.

تعریف ۱۴-۲: تابع دیفرانسیل پذیر حقیقی F روی خمینه‌ی ریمانی کامل M را محدب (اکیداً محدب) می‌نامند هرگاه برای هر ژئودزیک $\gamma: \mathbb{R} \to M$، تابع $Fo\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ محدب (اکیداً محدب) باشد، یعنی رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$(Fo\gamma)'' \geq 0$ ($(Fo\gamma)'' > 0$)

تعریف ۱۵-۲: فرض کنیم δ یک ایزومتری روی خمینه‌ی ریمانی همبند ساده M است. تابع مجذور فاصله برای ایزومتری δ به صورت $d_\delta^2(x) = d^2(\delta(x), x)$ تعریف می‌شود.

گزاره ۱۶-۲ ([۵]): اگر M خمینه‌ی ریمانی کامل، همبند ساده و با خمیدگی نامثبت باشد، آنگاه

آ) اگر مجموعه نقاط مینیم تابع حقیقی و محدب F که روی M تعریف شده است را با علامت C نشان دهیم و C یک زیر خمینه از M باشد، آنگاه C در M تماماً ژئودزیک بوده و هر نقطه‌ی بحرانی F متعلق به C است.

ب) $d_\delta^2(x)$ برای هر ایزومتری δ روی M، محدب است. اگر خمیدگی M منفی باشد، d_δ^2 به جز در نقاط مینیمم اکیداً محدب و مجموعه نقاط مینیمم حداکثر تصویر یک ژئودزیک است.

یادآوری ۱۷-۲ ([۱۷]): اگر δ ایزومتری روی خمینه‌ی همبند ساده با خمیدگی نامثبت M باشد و d_δ^2 مینیمم داشته باشد، آنگاه

۱- مجموعه‌ی مینیمم تابع d_δ^2 برابر با نقاط ثابت δ است.

۲- مجموعه‌ی نقاط مینیمم d_δ^2 تصویر ژئودزیک‌های انتقال داده شده توسط δ می‌باشد. اگر خمیدگی M منفی باشد، δ یک ژئودزیک یکتا را منتقل می‌کند و مجموعه نقاط مینیمم d_δ^2 تصویر یک ژئودزیک یکتاست است.

تعریف ۱۸-۲ ([۲]): اگر M یک G-خمینه‌ی ریمانی با نقص همگنی یک باشد، برای هر $x \in M$، ژئودزیکی موجود است که از x عبور می‌کند و بر همه‌ی مدارها عمود است. این ژئودزیک را ژئودزیک نرمال می‌نامند.

قضیه ۱۹-۲ ([۲۰]): فرض کنیم M خمینه‌ی ریمانی کامل، همبند و همبندساده و با خمیدگی نامثبت و بدون فاکتور اقلیدسی باشد. آنگاه اگر δ یک ایزومتری از M باشد، شرایط زیرمعادلند:

ا) d_δ^2 ثابت است.

ب) d_δ^2 کران‌دار است

ج) δ بدیهی است.

لم ۲۰-۲ ([۱۵]): اگر فضای پوششی خمینه M، تجزیه‌ای به صورت $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \ldots \times \widetilde{M}_k$ داشته باشد که برای هر $i = 1, \ldots, k$، $\widetilde{M}_i$ خمیدگی منفی داشته باشد و $\delta \in \Delta$ غیر بدیهی و بصورت $\delta = \delta_1 \times \ldots \times \delta_k$ تجزیه شود که برای هر $1 \leq i \leq k$، δ_i یک ایزومتری روی M_i است، آنگاه ژئودزیک نرمال γ روی $\widetilde{M}$ وجود دارد چنانکه تابع $d_\delta^2 o\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اکیدا محدب است.

قضیه ۲۱-۲ ([۱۵]): اگر M یک G-خمینه‌ی ریمانی ناهمبند ساده با نقص همگنی یک بوده و فضای پوششی

آن تجزیه‌ای به صورت $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \ldots \times \widetilde{M}_k$ داشته باشد، بطوریکه برای هر $1 \leq i \leq k$، $\widetilde{M}_i$ خمیدگی منفی داشته و $dim\widetilde{M}_i \geq 3$ و هر $\delta \in \Delta$ بصورت $\delta = \delta_1 \times \ldots \times \delta_k$ تجزیه شود که برای هر $1 \leq i \leq k$، δ_i یک ایزومتری روی M_i است، آنگاه

آ) M حداکثر یک مدار تکین دارد.

ب) اگر مدار تکین B موجود باشد، ناویژه است و به ازای اعداد صحیح m, k با $\mathbb{R}^k \times T^m$ وابرسان است.

۳- نتایج

گزاره ۱-۳: فرض کنید $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ یک G-خمینه‌ی ریمانی با نقص همگنی یک باشد چنانکه M_iها خمیدگی منفی داشته و $\delta = \delta_1 \times \ldots \times \delta_k$ بطوریکه δ_i یک ایزومتری روی M_i باشد. آنگاه d_δ^2 به جز در نقاط مینیمم اکیداً محدب است و مجموعه نقاط مینیمم آن حداکثر تصویر یک ژئودزیک است.

اثبات آن با استفاده از ۲۰-۲ و ۱۷-۲ آسان است.

لم ۲-۳: فرض کنیم $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ یک G-خمینه‌ی ریمانی با نقص همگنی یک باشد چنانکه برای هر $1 \leq i \leq k$، M_i خمیدگی منفی داشته و $dimM_i \geq 3$ و $\widetilde{M}/\widetilde{G} = \mathbb{R}$؛ آنگاه به ازای هر G-مدار D از M، $\pi^{-1}(D)$ فقط یک مولفه دارد.

اثبات: طبق فرض خلف، گیریم که $\pi^{-1}(D)$ حداقل دو مولفه داشته باشد. بنابراین $\delta \in \Delta$ وجود دارد که یک مدار را به روی خودش نمی‌نگارد. ایزومتری δ^* القا شده توسط δ روی $\widetilde{M}/\widetilde{G} = \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. δ^* نیز بدیهی نیست و به ازای یک $c \in \mathbb{R}$ و هر $t \in \mathbb{R}$ داریم $\delta^* = \pm t + c$. حال برای هر $t \in \mathbb{R}$، ایزومتری $g_t \in \widetilde{G}$ را طوری در نظر می‌گیریم که

$$\delta(\gamma(t)) = g_t(\gamma(\delta^*(t)) = g_t(\gamma(\pm t + c)) .$$

با استفاده از لم ۲۰-۲، ژئودزیک نرمال γ وجود دارد که تابع $f(t) = d^2(\delta(\gamma(t)), \gamma(t))$ درهمه‌ی نقاط به جز در نقاط مینیمم اکیداً محدب است. داریم:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= d^2\left(\delta(\gamma(t)), \gamma(t)\right) \\
&= d^2\left(g_t(\gamma(\delta^*(t)), \gamma(t)\right) \\
&= d^2\left((\gamma(\delta^*(t)), {g_t}^{-1}\gamma(t)\right) \\
&= d^2\left(\delta(\gamma(\delta^*(t)), \delta {g_t}^{-1}\gamma(t)\right) \\
&= d^2\left(\delta(\gamma(\delta^*(t)), {g_t}^{-1}\delta(\gamma(t))\right) \\
&= d^2\left(\delta(\gamma(\delta^*(t)), {g_t}^{-1}g_t(\gamma(\delta^*(t))\right) \\
&= d^2\left(\delta(\gamma(\delta^*(t)), (\gamma(\delta^*(t))\right) \\
&= f(\pm t + c)
\end{aligned}
$$

بنابراین $f(t) = f(\pm t + c)$. اگر $c \neq 0$ آنگاه f یک تابع حقیقی محدب و متناوب و در نتیجه ثابت است. بنابراین $d_\delta^2(\gamma(t))$ نیز ثابت خواهد بود. از طرفی d_δ^2 روی مدارها ثابت است و γ همه‌ی مدارها را قطع می‌کند *بنابراین* d_δ^2 روی تمام $\widetilde{M}$ ثابت می‌باشد. لذا با استفاده از قضیه‌ی ۱۹-۲، δ بدیهی است که تناقض می‌باشد.

بنابراین $c = 0$ و $f(t) = f(-t)$. لذا f در نقطه‌ی $t = 0$ مینیمم دارد. در نتیجه d_δ^2 در نقطه‌ی $\gamma(0)$ مینیممی به صورت $\widetilde{G}(\gamma(0))$ دارد. می‌دانیم هر $\delta \in \Delta$ بصورت $\delta = \delta_1 \times \ldots \times \delta_k$ تجزیه می‌شود که برای هر $1 \leq i \leq k$، δ_i یک ایزومتری روی M_i است. بنابراین طبق ۱-۳ حداکثر تصویر یک ژئودزیک است و این تناقض است. زیرا همه‌ی مدارها اصلی هستند و با توجه به فرض، بعد مدارها از یک بیشتر است. بنابراین $\pi^{-1}(D)$ دقیقاً دارای یک مولفه است.

قضیه ۳-۳: اگر M خمینه‌ی ریمانی با نقص همگنی یک باشد که به صورت $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ تجزیه و برای هر $1 \leq i \leq k$، M_i خمیدگی منفی داشته و $dimM_i \geq 3$ و همچنین G نیم ساده بدون فاکتور فشرده باشد، آنگاه M همبندساده است.

اثبات: طبق ۲۱-۲ و ۵-۲ قسمت آ، دوحالت زیر برقرار است:

۱- $M/G = \mathbb{R}$ یا $M/G = S^1$.

۲- $M/G = [0,1)$

حالت اول: در این حالت، همه‌ی G-مدارها اصلی هستند. بنابراین با استفاده از گزاره‌ی ۵-۲، $\widetilde{M}$ نیز مدار تکین ندارد و $\widetilde{M}/\widetilde{G} = \mathbb{R}$. بنابراین تمام $\widetilde{G}$-مدارها اصلی و طبق یادآوری ۹-۲، با $\widetilde{G}/\widetilde{K}$ وابرسان هستند که $\widetilde{K}$ زیر

گروه ماکزیمال و فشرده‌ی $\tilde{G}$ است. اگر مرکز $\tilde{G}$ متناهی باشد، طبق قضایای۱۲-۲ و ۱۳-۲، $\tilde{G}/\tilde{K}$ یک فضای متقارن ریمانی از نوع نافشرده می‌باشد و با استفاده از قضیه ۸-۲، خمیدگی نامثبت و تانسور ریچی منفی دارد و طبق ۳- ۲، همبند ساده است. اگر D یک مدار درM باشد، طبق لم ۲-۳، $\tilde{D}=\pi^{-1}(D)$ فقط یک مولفه همبندی دارد و$\pi: \tilde{D} \to D$ یک پوشش ریمانی برای D است. با استفاده از متر القایی، G-مدار D دارای خمیدگی نامثبت و تانسور ریچی منفی است و از آنجایی که همگن است طبق قضیه‌ی ۳-۲، همبند ساده است. بنابراین طبق ۵-۲ خمینه‌ی M همبند ساده می‌شود. اگر مرکز $\tilde{G}$ نامتناهی باشد، آنگاه طبق نتیجه‌ی ۴-۲ از[۴]، $\tilde{M}$ و در نتیجه M دارای متر ناوردا با خمیدگی منفی است. بنابراین با استفاده از ۴-۲ M همبند ساده است.

حالت دوم: مدار تکین M را B می‌نامیم. اگر M همبند ساده نباشد B نیز همبند ساده نیست، در این صورت اگر B ناویژه باشد، آنگاه $\tilde{B}=\pi^{-1}(B)$ تنها مدار تکین در $\tilde{M}$ است و لذا $\pi: \tilde{B} \to B$ یک پوشش ریمانی برای B و $\tilde{B}$ وابرسان با $\tilde{G}/\tilde{K}$ می‌باشد که $\tilde{K}$ زیر گروه ماکزیمال و فشرده‌ی $\tilde{G}$ است. طبق قضیه ۵-۳ در [۱۵]، B و لذا $\tilde{B}$ انحنای نامثبت دارند. بنابراین طبق ۱۳-۲، $\tilde{B}$ فضای متقارن ریمانی از نوع نافشرده است و با استفاده از قضیه ۸-۲، خمیدگی نامثبت و تانسور ریچی منفی دارد. بنابراین B دارای خمیدگی نامثبت و تانسور ریچی منفی است و طبق قضیه‌ی۳-۲، همبند ساده است که تناقض خواهد بود. بنابراین M همبند ساده است. اگر B ویژه باشد آنگاه، طبق قضیه‌ی ۵-۲ قسمت آ، ج، د، $\tilde{M}/\tilde{G}=\mathbb{R}$. مانند اثبات مرحله‌ی اول، M همبند ساده می‌شود.

فهرست منابع

[1] A.V. Alekseevsky and D.V. Alekseevsky, G-manifolds with one dimentional orbit space, Adv. Sov. Math., 8 (1992) 1-31.

[2] A.V Alekseevsky and D.V Alekseevsky, Riemannian G-manifolds with one dimentional orbit space, Ann. Glob. Anal. and Geom., 11(1993) 197-211.

[3] D.V Alekseevsky, Homogeneous Riemannian manifolds of negative curvature, Math., Sb. 96(nl)(1975) 93-117.

[4] H. Abedi and D.V. Alekseevsky and S.M.B. Kashani, Cohomogeneity one Riemannian manifolds of nonpositive curvature, Differential Geometry and its Application, 25 (2007) 561-581.

[5] R. Bishop and B. O'Neill, Manifolds of negative curvature, Trans. Am. Math. Soc., 115 (1969) 1-49.

[6] G. E. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups. Acad. Press. New York and London (1972).

[7] E. Heintze, On homogeneous Riemannian manifolds of negative curvature, Math. Ann, 211 (1974) 1-49.

[8] S. Helgason, Diffrential Geometry Lie Group and Symmetric Spaces. Acad. press. New York (1978).

[9] S. Kobayashi, Homogeneous Riemannian manifolds of negative curvature, Tohoku Math. J., 14 (1962) 413-415.

[10] P. W. Michor, Isometric actions of Lie groups and invariants, Lecture course at the university of Vienna, 1996-97.

[11] R. Mirzaie, On topology of some Riemannian manifolds of negative curvature with a compact Lie group of isometries, Hokkaido Math. J., 44 (2015) 81-89.

[12] R. Mirzaie, On negatively curved G-manifolds of low cohomogeneity, Hokkaido Math. J., 38 (2009) 797-803.

[13] R. Mirzaie, Actions without nontrivial singular orbits on Riemannian manifolds of negative curvature, Acta Math. Hungar., 147(1) (2015) 172-178.

[14] R. Mirzaie, On Riemannian manifolds of constant negative curvature, J. Korean Math. Soc., 48 (2011) 21-23.

[15] R. Mirzaie and S.M.B. Kashani, On topological properties of some cohomogeneity one manifolds of nonpositive curvature, Bull. Korean Math. Soc., 37 (2000) 578-599.

[16] R. Mirzaie and H. Soroush, Topology of orbits and orbit space of some product G-manifolds, Manuscripta Math., 149 (2016) 297-302.

[17] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity, Acad. Press. New York, Berekley (1983).

[18] F. Podesta and A. Spiro, Some topological properties of cohomogeneity one manifolds with negative curvature, Ann. Global Anal. Geom., 14 (1996) 69-79.

[19] C. Searle, Cohomogeneity and Positive Curvature in Low Dimensions, M. Z., 214 (1993) 491-498.

[20] J. Wolf, Homogenity and bounded isometries in manifold of negative curvature. III. J. Math., 8 (1964) 14-18.