

## روشی عددی برای حل معادلات انتگرال دو بعدی فردهلم خطی به کمک پایه‌های چندجمله‌ای بوبکر

فرشاد مهدی‌فر<sup>۱\*</sup>، علی خانی<sup>۲</sup>

<sup>(۱)</sup> دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۵/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۰/۲۶

### چکیده

در این مقاله، روش هم‌محلی جدیدی، بر مبنای چندجمله‌ای‌های بوبکر، برای جواب‌های تقریبی رده‌ای از معادلات انتگرال دو بعدی فردهلم خطی نوع دوم معرفی کرده‌ایم. خصوصیات توابع بوبکر دوبعدی بکار گرفته شده است. ماتریس اساسی انتگرال‌گیری به وسیله‌ی نقاط هم‌محلی برای کاهش فرم جواب معادله‌ی انتگرالی به فرم جوابی از دستگاه معادلات جبری مورد استفاده قرار گرفته است. دقت جواب و تحلیل خطا به طور کاملاً دقیق و ساختاری مورد مطالعه قرار گرفته شده و تأکید شده است که روش پیشنهادی برای انواع معادلات انتگرال دو بعدی فردهلم خطی با هسته‌ی پیوسته از نوع چندجمله‌ای کاملاً دقیق و بدون خطا می‌باشد. از طرف دیگر، کمک گرفتن از نرم‌افزار ریاضی میپل باعث شده جواب ضرایب چند جمله‌ای بوبکر بسیار آسان محاسبه شود. همچنین، نتایج روش حاضر را با نتایج سایر روش‌های موجود به جهت ارائه اعتبار، دقت و کارایی تکنیک مورد بررسی و مقایسه قرار داده‌ایم.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات انتگرال دوبعدی فردهلم، ماتریس اساسی، سری چندجمله‌ای‌های بوبکر بریده شده، روش هم‌محلی.

## ۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، علاقه‌ای رو به رشد برای حل عددی معادلات انتگرالی دوبعدی (2D-IEs) به وجود آمده است، که شامل ترکیبی از توابع مجهول زیر علامت انتگرال دو بعدی و همچنین مشتقات آنها می‌باشد. مسائل مربوط به معادلات انتگرالی را می‌توان به معادلات انتگرالی فردهم و ولترا طبقه‌بندی کرد [۱]. کران بالای ناحیه انتگرالگیری در نوع ولترا، متغیر بوده در حالی که در نوع فردهم، یک عدد ثابت فرض شده است. در این مقاله، ما با معادله‌ی انتگرال دوبعدی فردهم خطی از نوع دوم برخورد می‌کنیم. اما تمام الگوریتم‌های مورد مطالعه در متن می‌تواند با معادلات انتگرال-دیفرانسیل دوبعدی فردهم خطی نوع دوم نیز سازگار باشد. معادلات انتگرال دوبعدی شاخه‌ای مهم از ریاضیات مدرن است و اغلب در بسیاری از زمینه‌های کاربردی مانند؛ مهندسی، مکانیک، فیزیک، شیمی، نجوم، زیست‌شناسی، اقتصاد و... به وجود می‌آیند [۲-۵].

معمولاً حل تحلیلی معادلات انتگرال دوبعدی مشکل و بسیار پیچیده می‌باشد. بنابراین روش‌های تقریبی و تکنیک‌های عددی برای رسیدن به یک راه حل مورد قبول نیاز می‌باشد. در سال‌های اخیر ریاضیدانان و فیزیکدانان تلاش قابل توجهی برای مطالعه راه‌حل‌های عددی معادلات انتگرالی دوبعدی از خود نشان داده‌اند. بسیاری از روش‌های قدرتمند و ساختاری ارائه شده‌اند. به عنوان مثال می‌توان به روش چیبشیف [۲]، روش ماتریس تیلور [۳]، روش تاو محاسباتی [۴]، روش توابع کلاهی اصلاح‌شده [۵]، روش گالرکین [۶]، روش‌های نیستروم [۷-۸] و روش بسط خطای مجانبی [۹] اشاره کرد. در این پژوهش، یک روش هم‌محل‌ی بریده شده برای حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی فردهم خطی (2D-LFIEs) به فرم؛

$$u(x, y) = g(x, y) + \int_a^b \int_c^d K(x, y, t, s) u(t, s) ds dt \quad (1)$$

که  $(x, y) \in D$  ارائه می‌کنیم. که در آن،  $u(x, y)$  تابع مجهول و توابع  $g(x, y)$  و  $K(x, y, t, s)$  به ترتیب روی ناحیه‌های  $D = [a, b] \times [c, d]$  و  $E = D \times D$  به طور پیوسته تعریف می‌شوند.

هدف از این مقاله یافتن جواب مسئله‌ی (۱) بر حسب روش سری چندجمله‌ای‌های بوبکر بریده شده دوبعدی (2D-TBPS) می‌باشد [۱۰-۱۳]، که برای هر  $(x, y) \in D$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \beta_{nm} \psi_m^n(x, y) \quad (2)$$

به طوری که؛  $(n, m = 0, 1, \dots)$   $\psi_m^n(x, y)$  چندجمله‌ای‌های بوبکر دوبعدی هستند که به صورت حاصلضرب جدایی‌پذیری از چندجمله‌ای‌های بوبکر تک‌بُعدی  $(B_k(x))$  [13] به فرم؛

$$\psi_m^n(x, y) = B_n(x) \cdot B_m(y) \quad (3)$$

تعریف شده و  $\beta_{nm}$  ضرایب مجهول بوبکر دوبعدی می‌باشند. که  $n$  و  $m$  درجه چندجمله‌ای و  $N$  و  $M$  اعداد صحیح مثبت هستند ( $n \leq N$  و  $m \leq M$ ).

برای محاسبه و تخمین یک جواب عددی به شکل رابطه (۲) از مسئله (۱)، از نقاط هم‌محل‌ی متساوی الفاصله؛

$$\begin{cases} x_i = a + \frac{b-a}{N} \cdot i, & i = 0, 1, \dots, N \\ y_j = c + \frac{d-c}{M} \cdot j, & j = 0, 1, \dots, M \end{cases} \quad (3)$$

استفاده می‌کنیم. چندجمله‌ای‌های بوبکر تک‌بُعدی استاندارد بوسیله رابطه بازگشتی [۱۴]؛

$$\begin{cases} B_0(x) = 1, \\ B_1(x) = x, \\ B_2(x) = x^2 + 2, \\ B_k(x) = x \cdot B_{k-1}(x) - B_{k-2}(x), k > 2. \end{cases} \quad (5)$$

ارائه شده‌اند. دنباله‌ای از این چندجمله‌ای‌های صحیح غیرمتعامد به توسط [۱۴] K. Boubaker & et. al ساخته شده که به فرم؛

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{\xi(n)} \left\{ \frac{(n-4k)}{(n-k)} C_{n-k}^k \right\} (-1)^k x^{n-2k} \quad (6)$$

تعریف شده است. که در آن،  $\xi(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  بوده و نماد  $[\cdot]$  و  $C_{n-k}^k$  به ترتیب نشان دهنده‌ی تابع جزء صحیح و ضریب دوجمله‌ای  $\binom{n-k}{k}$  است.

## ۲. بیان روابط اساسی

در این بخش، در ابتدا سری چندجمله‌ای‌های بوبکر بریده شده دو بُعدی (۲) را به فرم ماتریسی مناسب تبدیل می‌کنیم. یعنی؛

$$u(x, y) = \Psi(x, y) \cdot \beta \quad (۷)$$

که در آن، بردار سطری  $\Psi$  و بردار ستونی  $\beta$  از مرتبه  $(N+1)(M+1)$  به صورت زیر می‌باشند.

$$\Psi = [\psi_0^0, \dots, \psi_M^0, \dots, \psi_0^N, \dots, \psi_M^N]$$

و

$$\beta = [\beta_{00}, \dots, \beta_{0M}, \dots, \beta_{N0}, \dots, \beta_{NM}]^T$$

با استفاده از رابطه (۶) و محاسبه آن برای مقادیر مختلف

$m = 0, 1, \dots, M$  و  $n = 0, 1, \dots, N$  می‌توان به

یک رابطه ماتریسی مربوط به چندجمله‌ای‌های بوبکر دو بُعدی  $\psi_m^n(x, y)$  به شکل؛

$$\Psi(x, y) = \mathbf{X}(x, y) \cdot \mathbf{Z}^T \quad (۸)$$

رسید. به طوری که، بردار سطری  $\mathbf{X}$  (بردار پایه استاندارد چندجمله‌ای‌های دو متغیره) از مرتبه  $(N+1)$  به صورت؛

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1, y, \dots, y^M, x, xy, \dots, \\ xy^M, \dots, x^N, \dots, x^N y^M \end{bmatrix}$$

می‌باشد و با فرض این که  $N = M$  باشد، ماتریس مربعی  $\mathbf{Z}$ ، اگر  $N$  زوج، باشد به فرم؛

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \gamma_{0,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{1,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_{2,1} & 0 & \gamma_{2,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \gamma_{(N-1)^2, \frac{(N-2)^2}{4}} & 0 & \gamma_{(N-1)^2, \frac{(N-4)^2}{4}} & \dots & \gamma_{(N-1)^2, 0} & 0 \\ \gamma_{N^2, \frac{N^2}{4}} & 0 & \gamma_{N^2, \frac{(N-2)^2}{4}} & 0 & \dots & 0 & \gamma_{N^2, 0} \end{bmatrix}$$

بوده و اگر  $N$  فرد، باشد به فرم؛

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \gamma_{0,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{1,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_{2,1} & 0 & \gamma_{2,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{(N-1)^2, \frac{(N-1)^2}{4}} & 0 & \gamma_{(N-1)^2, \frac{(N-3)^2}{4}} & 0 & \dots & \gamma_{(N-1)^2, 0} & 0 \\ 0 & \gamma_{N^2, \frac{(N-1)^2}{4}} & 0 & \gamma_{N^2, \frac{(N-3)^2}{4}} & \dots & 0 & \gamma_{N^2, 0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I(x_0, y_0), \dots, I(x_0, y_M), \dots \\ I(x_N, y_0), \dots, I(x_N, y_M) \end{bmatrix}^T$$

تعریف می‌شوند.

#### ۱.۲. روابط ماتریسی قسمت انتگرالی $I(x, y)$ :

حال می‌خواهیم، ماتریس  $\mathbf{I}$  را مطابق با قسمت انتگرالی  $I(x, y)$  پیدا کنیم. برای این منظور هسته انتگرالی  $K(x, y, t, s)$  را می‌توان بر حسب سری بوبکر دو بُعدی بریده‌شده به فرم رابطه (۱۳) بسط داده و داریم:

$$K(x, y, t, s) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M h_{k,l}(x, y) \psi_l^k(t, s) \quad (13)$$

آنگاه ماتریس نمایشگر هسته‌ی  $K(x, y, t, s)$  را می‌توان از فرم ماتریسی رابطه (۱۴) بدست آورد.

$$K(x, y, t, s) = \mathbf{H}(x, y) \cdot \Psi^T(t, s) \quad (14)$$

به طوری که، بردار سطری  $\mathbf{H}(x, y)$  از مرتبه  $(N+1)(M+1)$  عبارت است از:

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{bmatrix} h_{0,0}(x, y), \dots, h_{0,M}(x, y), \dots \\ h_{N,0}(x, y), \dots, h_{N,M}(x, y) \end{bmatrix}$$

لذا، با جایگذاری فرم‌های ماتریسی (۱۴) و (۱۵) مربوط به توابع به ترتیب  $K(x, y, t, s)$  و  $u(x, y)$  بجای قسمت انتگرالی  $I(x, y)$  فرم ماتریسی جدیدی برای آن حاصل می‌شود و داریم:

$$I(x, y) = \int_a^b \int_c^d \mathbf{H}(x, y) \cdot \Psi^T(t, s) \cdot$$

$$\Psi(t, s) \cdot \beta \, ds \, dt$$

$$= \mathbf{H}(x, y) \cdot \left( \int_a^b \int_c^d \Psi^T(t, s) \cdot$$

$$\Psi(t, s) \, ds \, dt \right) \cdot \beta$$

به منظور انجام ساده‌تر محاسبات مربوط به ماتریس  $\mathbf{I}$  در معادله‌ی قبل ماتریس  $\mathbf{Q}$  را در رابطه (۱۵) تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{Q} = \int_a^b \int_c^d \Psi^T(t, s) \cdot \Psi(t, s) \, ds \, dt \quad (15)$$

لذا، به طور خلاصه، داریم:

$$I(x, y) = \mathbf{H}(x, y) \cdot \mathbf{Q} \cdot \beta \quad (16)$$

برای محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس  $\mathbf{Q}$ ، با قراردادن رابطه (۱۵) در عبارت (۱۵) و ساده‌سازی، رابطه (۱۷) را داریم:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z} \cdot \int_a^b \int_c^d \mathbf{X}^T(t, s) \cdot \mathbf{X}(t, s) \, ds \, dt \cdot \mathbf{Z}^T \quad (17)$$

در رابطه‌ی (۱۷)، عبارت زیر علامت انتگرال دوگانه

می‌باشد. به طوری که درآیه‌های ماتریس  $\mathbf{Z}$  همان مضربی از حاصلضرب چندجمله‌ای‌های بوبکر تک‌بُعدی استاندارد [۱۳] در خودشان می‌باشند. یعنی:

$$\psi_m^n(x, y) = \sum_{p=0}^{\xi(n)} \sum_{q=0}^{\xi(m)} \gamma_{n,p}^{m,q} x^{n-2p} y^{m-2q},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0, 1, \dots, N \\ m = 0, 1, \dots, M \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ q = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \end{array} \right.$$

$$\gamma_{n,p}^{m,q} = (-1)^{p+q} \left\{ \frac{(n-4p)(m-4q)}{(n-p)(m-q)} \right\} C_{n-p}^p \cdot$$

$$C_{m-q}^q \}$$

در حالتی که  $n = m$  و  $p = q$  باشد، درآیه‌های ماتریس  $\mathbf{Z}$  را به صورت  $\gamma_{n,p}^{m,p} = \gamma_{n,p}$  در نظر گرفته‌ایم.

حال، معادله (۱) را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$u(x, y) = g(x, y) + I(x, y) \quad (8)$$

که در آن:

$$I(x, y) = \int_a^b \int_c^d K(x, y, t, s) u(t, s) \, ds \, dt \quad (9)$$

می‌باشد.

برای به دست آوردن جواب‌های مورد نظر می‌توان از روش هم‌محلی بوبکر استفاده کرد. بنابراین، نقاط هم‌محلی (۴) را در معادله (۹) جایگزین کرده و دستگاه زیر

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j) + I(x_i, y_j) \quad (10)$$

برای هر  $i = 0, 1, \dots, N$  و  $j = 0, 1, \dots, M$  حاصل می‌شود. به طوری که:

$$I(x_i, y_j) =$$

$$\int_a^b \int_c^d K(x_i, y_j, t, s) u(t, s) \, ds \, dt \quad (11)$$

معین شده است. در این صورت دستگاه (۱۰) را می‌توان به شکل ماتریسی:

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} + \mathbf{I} \quad (12)$$

نوشت. که در آن، بردارهای ستونی  $\mathbf{u}$ ،  $\mathbf{G}$  و  $\mathbf{I}$  از مرتبه  $(N+1)(M+1)$  بوده و به صورت:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x_0, y_0), \dots, u(x_0, y_M), \dots \\ u(x_N, y_0), \dots, u(x_N, y_M) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0, y_0), \dots, g(x_0, y_M), \dots \\ g(x_N, y_0), \dots, g(x_N, y_M) \end{bmatrix}^T$$

$$\left\{ \mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}^T - \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q} \right\} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{G}. \quad (24)$$

برای بررسی دقیقتر دستگاه معادلات ماتریسی اساسی (۲۴) می‌توان آن را به صورت استاندارد زیر نوشت:

$$\mathbf{W} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{G} \quad \text{یا} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (25)$$

که در آن؛

$$\mathbf{W} = [w_{pq}]$$

$$p, q = 0, 1, \dots, (n+1)(m+1)$$

به طوری که؛

$$\mathbf{W} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}^T - \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q} \quad (26)$$

در نهایت، برای یافتن جواب مسئله (۱) حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

**حالت ۱:** اگر  $\text{rank}(\mathbf{W}) = \text{rank}[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = (N+1)(M+1)$  باشد، آنگاه جواب مسئله (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}$$

و بنابراین بردار ستونی  $\boldsymbol{\beta}$  (همان ضرایب مجهول  $\beta_{00}$  و... و  $\beta_{0M}$  و ... و  $\beta_{N0}$  و... و  $\beta_{NM}$ ) بطور منحصر به فردی تعیین می‌شوند. همچنین، معادله (۱) دارای جوابی یکتا خواهد بود. این جواب به توسط سری بوبکر بریده‌شده‌ی (۲) ارائه و مشخص می‌گردد.

**حالت ۲:** زمانی که  $\det(\mathbf{W}) = 0$  و اگر  $\text{rank}(\mathbf{W}) = \text{rank}[\mathbf{W}; \mathbf{G}] < (N+1)(M+1)$  باشد، آنگاه می‌توانیم یک جواب خاص از بی‌شمار جواب برای بردار ستونی  $\boldsymbol{\beta}$  طوری پیدا کنیم که معادله (۱) دارای یک جواب تقریبی منحصر بفرد باشد. در غیر این صورت؛

**حالت ۳:** زمانی که  $\det(\mathbf{W}) = 0$  و اگر  $\text{rank}(\mathbf{W}) \neq \text{rank}[\mathbf{W}; \mathbf{G}] < (N+1)(M+1)$  باشد، آنگاه جواب برای بردار ستونی  $\boldsymbol{\beta}$  وجود نخواهد داشت و لذا معادله (۱) دارای جواب نیست.

با توجه به حالت‌های گفته شده جواب تقریبی مسئله (۱) را به فرم؛

$$u_{N,M}(x, y) = \mathbf{X}(x, y) \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (27)$$

تشکیل یک ماتریس متقارن مربعی از مرتبه‌ی  $(N+1)(M+1)$  می‌دهد که با انتگرالگیری دوگانه مکرر نسبت به  $t$  و  $s$  می‌توان به یک ماتریس متقارن مربعی عددی حقیقی مقدار  $\mathbf{R}$  از مرتبه‌ی  $(N+1)(M+1)$  رسید. یعنی، برای هر  $i$  و  $j$  ( $0 \leq i \leq N$  و  $0 \leq j \leq M$ ) داریم:

$$\mathbf{R} = \int_a^b \int_c^d \mathbf{X}^T(t, s) \cdot \mathbf{X}(t, s) ds dt = [r_{ij}] \quad (18)$$

که در آن،

$$r_{ij} = \frac{(b^{i+j+1} - a^{i+j+1})(d^{i+j+1} - c^{i+j+1})}{(i+j+1)^2} \quad (19)$$

بنابراین، با جایگزینی رابطه‌ی (۱۸) در (۱۷) ماتریس متقارن  $\mathbf{Q}$ ، به فرم خلاصه‌ی؛

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Z}^T \quad (20)$$

محاسبه می‌گردد.

در نهایت، با قراردادن ماتریس  $\mathbf{Q}$  از (۲۰) در عبارت (۱۶) ماتریس اساسی برای  $I(x, y)$  به فرم زیر حاصل خواهد شد.

$$I(x, y) = \mathbf{H}(x, y) \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (21)$$

### ۳. روش یافتن جواب

اکنون، برای ساختن معادله‌ی ماتریس اساسی مسئله (۱) آماده‌ایم. با جایگذاری روابط (۷)، (۸)، (۱۷) و (۲۱) در معادله (۹) و سپس ساده کردن آن، معادله‌ی ماتریس اساسی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\left\{ \mathbf{X}(x, y) \cdot \mathbf{Z}^T - \mathbf{H}(x, y) \cdot \mathbf{Q} \right\} \cdot \boldsymbol{\beta} = g(x, y) \quad (22)$$

با الحاق نقاط هم محلی  $(x_i, y_j)$  تعریف شده در رابطه (۴) به معادله‌ی ماتریس اساسی (۲۲)، دستگاه معادلات خطی ماتریسی زیر به ازای هر  $i$  و  $j$  ( $0 \leq i \leq N$  و  $0 \leq j \leq M$ ) به دست می‌آید:

$$\left\{ \mathbf{X}(x_i, y_j) \cdot \mathbf{Z}^T - \mathbf{H}(x_i, y_j) \cdot \mathbf{Q} \right\} \cdot \boldsymbol{\beta} = g(x_i, y_j) \quad (23)$$

بطور خلاصه‌تر؛

محاسبه و تعریف می‌کنیم.

تمامی محاسبات عددی به کمک نرم افزار *Maple16* انجام شده است. تخمین خطاهای مطلق در جداول مختلف مقادیر؛

$$E_{N,M}(x, y) = |u(x, y) - u_{N,M}(x, y)| \quad (28)$$

در نقاط انتخابی می‌باشند.

همچنین، بخاطر چندجمله‌ای بودن جواب تقریبی بوبکر بریده شده برای تابع هسته انتگرالی  $K(x, y, t, s)$  یا تابع  $g(x, y)$ ، که معمولاً غیر چندجمله‌ای هستند، باید آنها را با چندجمله‌ای‌های از درجه مناسب تقریب زده شود. بنابراین، در مثال‌های زیر قسمت‌های  $K(x, y, t, s)$  و  $g(x, y)$  به وسیله چندجمله‌ای تیلور تخمین زده شده‌اند.

**مثال ۱:** در ابتدا به مطالعه‌ی جواب سری بوبکر دوبعدی بریده شده معادله‌ی انتگرالی فردهلم خطی از نوع دوم [۲]:

$$u(x, y) = g(x, y) + \int_0^1 \int_0^1 (tx + y e^s) u(t, s) ds dt$$

می‌پردازیم.

که در آن، برای هر  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ :

$$g(x, y) = x e^{-y} - \frac{1}{2} y + \frac{1}{3} \left( e^{-1} - \frac{7}{4} \right) x$$

بوده و جواب تحلیلی و دقیق آن به صورت:

$$u(x, y) = x e^{-y} + y$$

می‌باشد.

برای این مثال با فرض  $M = 6$  مسئله (۱) را حل کرده‌ایم. با استفاده از روابط (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) یک جواب تقریبی برای این مثال برای  $N = 8$  داریم:

$$\begin{aligned} u_{8,6}(x, y) = & -3.0 \times 10^{-10} + \\ & 1.000000004 x + 1.000000092 y - \\ & 6.754 \times 10^{-9} x^2 - \\ & 0.9999997816 x y - 0.29641 \times \\ & 10^{-5} y^2 + \dots + 0.3211963356 \times \\ & 10^{-2} x^8 y^5 - 0.6920402083 \times \\ & 10^{-3} x^8 y^6. \end{aligned}$$

با تخمین تابع  $e^s$  به وسیله سری تیلور حول  $s_0 = 0$ ، نتایج عددی در جدول (۱) برای خطاهای مطلق  $E(x, y)$  و تخمین‌هایشان (۲۸) در نقاط

#### ۴. دقت جواب و تحلیل خطا

به آسانی می‌توان دقت روش پیشنهادی را مورد بررسی قرار داد. از آن جایی که سری بوبکر بریده شده‌ی دو بُعدی (۲)، جوابی تقریبی برای مسئله‌ی (۱) می‌باشد. لذا، زمانی که جواب تقریبی  $u_{N,M}(x, y)$  را در معادله‌ی (۱) جایگذاری می‌کنیم. حاصل آن باید به طور تقریبی در معادله صدق کند. به عبارت دیگر، برای هر  $(x, y) = (x_k, y_l) \in [0, 1] \times [0, 1]$  و  $k, l = 0, 1, 2, \dots$  داریم:

$$\begin{aligned} E(x_k, y_l) = & |u(x, y) - \\ & \int_a^b \int_c^d K(x, y, t, s) u(t, s) ds dt - \\ & g(x, y)| \cong 0, \end{aligned}$$

و  $E(x_k, y_l) \leq 10^{-(n_k+m_l)}$  اعداد صحیح مثبت هستند. اگر بتوانیم

$$\text{Max}_{k,l} \left\{ \text{Max}_{k,l} 10^{-(n_k+m_l)} \right\} = 10^{-\varepsilon}$$

صحیح مثبت) را معین کنیم، آنگاه زمانی که  $M$  و  $N$  همزمان افزایش یابند، آن موقع که اختلاف  $E(x_k, y_l)$  در هر نقاط کوچکتر از  $10^{-\varepsilon}$  شد، حد سری بریده شده کوچک و کوچکتر می‌شود.

به عبارت دیگر، زمانی که  $M$  و  $N$  به قدر کافی بزرگ باشند، خطا را می‌توان به وسیله تابع زیر تخمین زد:

$$\begin{aligned} E_{N,M}(x, y) = & u(x, y) - \\ & \int_a^b \int_c^d K(x, y, t, s) u(t, s) ds dt - g(x, y) \end{aligned}$$

در این حالت اگر  $E_{N,M}(x, y) \rightarrow 0$  آنگاه خطا کاهش خواهد یافت [۱].

#### ۵. مثال‌های عددی و نتایج محاسباتی

در این بخش، چندین مثال عددی برای توضیح و تفسیر خصوصیات روش ارائه شده و همچنین، نشان داده شده که خطای مطلق روش سازگار می‌باشد و یک مقایسه از روش (2D-TBPS) در این پژوهش با دیگر روش‌ها از این نوع از قبیل: روش چیشف [۲]، روش توابع کلاهی اصلاح شده دو بُعدی [۴] و روش ماتریس تیلور [۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

خطای کمتری (در حدود یک سوم) نسبت به روش چیشف دارد.  
 همچنین، نتایج تخمین تابع خطای مطلق  $E_{N,M}(x,y)$  برای  $N = 3, 5, 8$  و  $M = 6$  در شکل (۱) به صورت نمودار سه-بعدی رسم شده است.

گره  $(x,y) = (0/2 i, 0/2 i)$  که  $i = 0, \dots, 5$  با فرض  $N = 8$  گزارش داده شده است.  
 ماکزیمم خطاهای مطلق روش حاضر (2D-TBPS) را با روش چیشف (CM) مقایسه و در جدول (۲)، برای  $N = 3, 5, 8$  نشان داده شده است. از جدول (۲) بدیهی است که روش پیشنهادی در مقاله کارایی بیشتر و

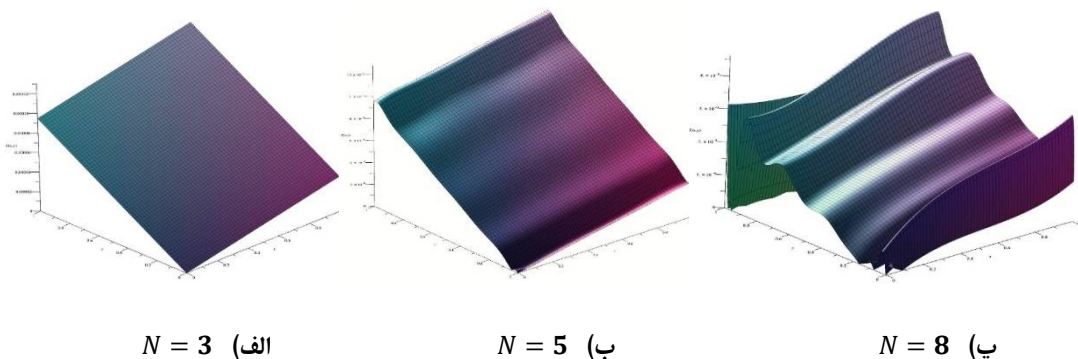
جدول ۱: مقادیر خطای جواب (2D-TBPS) برای مثال (۱) در  $N = 8$  و  $M = 6$

$(x, y)$	خطای مطلق	تخمین خطای مطلق
	$E(x,y)$	$E_{8,6}(x,y)$
(0, 0)	$9/0 \times 10^{-10}$	$3/0 \times 10^{-10}$
(0/2, 0/2)	$6/0 \times 10^{-10}$	$8/0 \times 10^{-10}$
(0/4, 0/4)	$3/0 \times 10^{-10}$	$1/6 \times 10^{-9}$
(0/6, 0/6)	$1/1 \times 10^{-9}$	$2/4 \times 10^{-9}$
(0/8, 0/8)	$1/0 \times 10^{-9}$	$3/0 \times 10^{-9}$
(1, 1)	$2/0 \times 10^{-9}$	$1/0 \times 10^{-9}$

جدول ۲: ماکسیمم خطای مطلق جواب برای مثال (۱) در  $M = 6$

تعداد نقاط گره	روش چیشف [2] (CM)	روش پیشنهادی (2D-TBPS)
	$\max_{(x,y)} E_{N,6}(x,y)$	$\max_{(x,y)} E_{N,6}(x,y)$
$N = 3$	$4/2 \times 10^{-4}$	$1/3 \times 10^{-4}$
$N = 5$	$8/8 \times 10^{-7}$	$1/25 \times 10^{-7}$
$N = 8$	$9 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-9}$

شکل ۱: نمودارهای قدر مطلق خطای  $u_{N,M}(x,y)$  برای مثال (۱) با  $M=6$



در جداول (۳) و (۴)، خطاهای مطلق  $E_{N,M}(x, y)$  روش سری بوبکر بریده شده دوبعدی (2D-TBPS) برای  $N = M$  را با روش عددی توابع کلاهی اصلاح شده دوبعدی (2D-MHFs) [۴] مقایسه شده است. و نتایج عددی روش پیشنهادی بررسی خطاهای مطلق در نقاط گره  $(x, y) = (0/1 i, 0/1 i)$  و  $i = 0, 1, \dots, 10$  نشان داده شده است.

از طرفی دیگر، با توجه به جداول (۳) و (۴)، واضح است که روش پیشنهادی زمانی که به ابتدای بازه بسیار نزدیک باشیم کارایی بیشتر و خطای کمتری نسبت به روش توابع کلاهی اصلاح شده دوبعدی (2D-MHFs) داشته بطوریکه در جدول (۵) در بحث ماکسیمم خطای مطلق جواب روش (2D-TBPS) نتایج بسیار فوق العاده‌ای ارائه داده و از پایداری عددی بیشتری برخوردار است.

همچنین، نتایج تخمین تابع خطای مطلق  $E_{N,M}(x, y)$  برای  $N = M = 8, 16$  در شکل (۲) به صورت نمودار سه-بعدی رسم شده‌اند.

**مثال ۲:** با استفاده از جواب سری بوبکر دوبعدی بریده شده در رابطه (۲) معادله‌ی انتگرالی دو بُعدی فردهمم خطی از نوع دوم زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم [۴].

$$u(x, y) = \frac{1}{1+x+y} - \frac{x}{1+y} + \int_0^1 \int_0^1 \frac{x(1+t+s)}{1+y} u(t, s) ds dt$$

که در آن، برای هر  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  جواب تحلیلی و دقیق آن به صورت  $u(x, y) = \frac{1}{1+x+y}$  می‌باشد. برای این مثال با فرض  $N = M = 8, 16$  مسئله (۱) را حل کرده‌ایم. به مانند مثال قبل یک جواب تقریبی (2D-TBPS) به شکل:

$$u_{16,16}(x, y) = 1.000000 - 0.9999998 x - 0.99999 y + 0.99999 x^2 + 1.999981 x y + 0.999996 y^2 + \dots + 3915.537651 x^8 y^8 + \dots + 2.380930 x^{16} y^{16}.$$

محاسبه شده است.

جدول ۳: مقایسه خطای مطلق نتایج عددی مثال (۲)

گره‌های (x, y)	روش حاضر (2D-TBPS)		روش توابع کلاهی اصلاح شده [۴] (2D-MHFs)	
	$E_{8,8}$	$E_{16,16}$	$E_{8,8}$	$E_{16,16}$
$(2^{-1}, 2^{-1})$				
l = 1	$7/1 \times 10^{-10}$	$3/4 \times 10^{-9}$	$5/6 \times 10^{-17}$	$3/3 \times 10^{-16}$
l = 2	$1/2 \times 10^{-7}$	$4/1 \times 10^{-10}$	$0/0 \times 10^{00}$	$4/4 \times 10^{-16}$
l = 3	$1/3 \times 10^{-7}$	$2/5 \times 10^{-10}$	$2/2 \times 10^{-16}$	$8/9 \times 10^{-16}$
l = 4	$2/4 \times 10^{-7}$	$1/4 \times 10^{-9}$	$7/9 \times 10^{-4}$	$1/1 \times 10^{-16}$
l = 5	$8/4 \times 10^{-8}$	$4/1 \times 10^{-10}$	$7/9 \times 10^{-4}$	$1/3 \times 10^{-4}$
l = 6	$2/1 \times 10^{-7}$	$5/9 \times 10^{-10}$	$5/3 \times 10^{-4}$	$1/2 \times 10^{-4}$



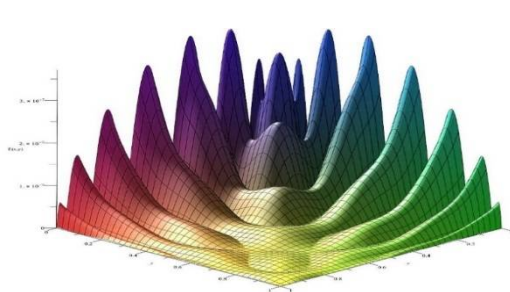
جدول ۴: خطای مطلق نتایج عددی مثال (۲) با روش پیشنهادی (2D-TBPS) و مقایسه آن با روش (2D-MHFs)

گره‌های (x, y)	روش سری بوبکر بریده شده (2D-TBPS)		روش توابع گلاهی اصلاح شده [۴] (2D-MHFs)	
	$E_{8,8}$	$E_{16,16}$	$E_{8,8}$	$E_{16,16}$
(0, 0)	$6/82 \times 10^{-13}$	$2/18 \times 10^{-10}$	$0/00 \times 10^{00}$	$0/00 \times 10^{00}$
(0/1, 0/1)	$2/59 \times 10^{-7}$	$5/62 \times 10^{-10}$	$3/44 \times 10^{-4}$	$9/98 \times 10^{-5}$
(0/2, 0/2)	$1/67 \times 10^{-7}$	$2/81 \times 10^{-9}$	$4/63 \times 10^{-4}$	$2/52 \times 10^{-5}$
(0/3, 0/3)	$1/64 \times 10^{-8}$	$1/75 \times 10^{-9}$	$2/01 \times 10^{-4}$	$1/40 \times 10^{-5}$
(0/4, 0/4)	$6/12 \times 10^{-8}$	$2/43 \times 10^{-9}$	$7/48 \times 10^{-5}$	$1/68 \times 10^{-5}$
(0/5, 0/5)	$7/13 \times 10^{-10}$	$3/40 \times 10^{-9}$	$5/6 \times 10^{-17}$	$3/33 \times 10^{-16}$
(0/6, 0/6)	$1/91 \times 10^{-8}$	$2/07 \times 10^{-9}$	$3/11 \times 10^{-5}$	$8/43 \times 10^{-6}$
(0/7, 0/7)	$8/19 \times 10^{-10}$	$1/19 \times 10^{-8}$	$4/98 \times 10^{-5}$	$2/87 \times 10^{-6}$
(0/8, 0/8)	$1/09 \times 10^{-8}$	$6/78 \times 10^{-8}$	$3/02 \times 10^{-5}$	$2/02 \times 10^{-6}$
(0/9, 0/9)	$5/27 \times 10^{-9}$	$2/82 \times 10^{-9}$	$1/26 \times 10^{-5}$	$2/93 \times 10^{-6}$
(1, 1)	$1/07 \times 10^{-9}$	$2/30 \times 10^{-8}$	$1/6 \times 10^{-16}$	$0/00 \times 10^{00}$

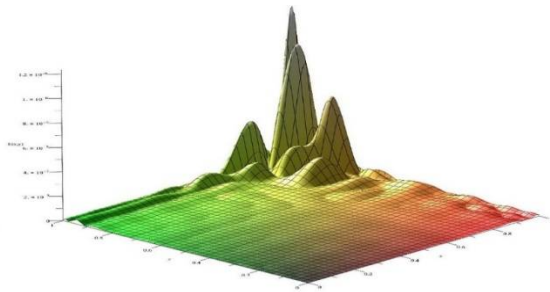
جدول ۵: مقایسه ماکسیمم خطای مطلق جواب برای مثال (۲)

تعداد نقاط گره	روش سری بوبکر بریده شده (2D-TBPS)	روش توابع گلاهی اصلاح شده [۴] (2D-MHFs)
	$\max_{(x,y)} E_{8,8}(x, y)$	$\max_{(x,y)} E_{16,16}(x, y)$
$N = M = 8$	$2/6 \times 10^{-7}$	$4/6 \times 10^{-4}$
$N = M = 16$	$6/8 \times 10^{-8}$	$9/9 \times 10^{-5}$

شکل ۲: نمودارهای قدر مطلق خطای  $u_{N,M}(x, y)$  برای مثال (۲)



الف)  $N = M = 8$



ب)  $N = M = 16$

که در آن، برای هر  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ :

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3} + y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{131}{180}$$

بوده و جواب تحلیلی و دقیق آن به صورت:

$$u(x, y) = x^2 + y^2$$

می‌باشد.

مثال ۳: به عنوان آخرین مثال، به مطالعه‌ی جواب سری

بوبکر دوبعدی بریده شده برای 2D-LFIES [۳]:

$$u(x, y) = g(x, y) + \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y + s^2 + t) u(t, s) ds dt$$

می‌پردازیم.

مولفه‌های تابع برداری  $\mathbf{H}(x, y)$  را بیابیم. براین اساس با برابر قرار دادن مضارب توان‌های یکسان از مولفه‌های تابع برداری  $\mathbf{X}(x, y)$  از دو طرف رابطه‌ی (۲۹) به یک دستگاه ۹ معادله‌ی ۹ مجهولی بر حسب مولفه‌های مجهول تابع برداری  $\mathbf{H}(x, y)$  می‌رسیم. که با حل آن دستگاه داریم:

$$\begin{cases} h_{0,0}(x, y) = x^2 + y - 2 \\ h_{1,0}(x, y) = 1 \\ h_{0,2}(x, y) = 1 \end{cases}$$

که سایر مولفه‌های آن صفر به دست آمده است. عبارت دیگر:

$$\mathbf{H}(x, y) = [ (x^2 + y - 2) \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]$$

و لذا بعد از محاسبه‌ی  $\mathbf{R}$  از رابطه (۱۹) و جایگذاری در رابطه‌ی (۲۰) ماتریس  $\mathbf{Q}$  به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} & \frac{7}{6} & \frac{49}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{5}{8} & \frac{7}{6} & \frac{7}{9} & \frac{35}{12} \\ \frac{7}{3} & \frac{5}{4} & \frac{83}{15} & \frac{7}{6} & \frac{5}{8} & \frac{83}{30} & \frac{49}{9} & \frac{35}{12} & \frac{581}{45} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{7}{9} & \frac{5}{4} & \frac{5}{8} & \frac{35}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{5}{8} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{5}{12} & \frac{5}{8} & \frac{5}{12} & \frac{25}{16} \\ \frac{7}{6} & \frac{5}{8} & \frac{83}{30} & \frac{7}{9} & \frac{5}{12} & \frac{83}{45} & \frac{35}{12} & \frac{25}{16} & \frac{83}{12} \\ \frac{7}{3} & \frac{7}{6} & \frac{49}{9} & \frac{5}{4} & \frac{5}{8} & \frac{35}{12} & \frac{83}{12} & \frac{83}{30} & \frac{581}{45} \\ \frac{7}{6} & \frac{7}{9} & \frac{35}{12} & \frac{5}{8} & \frac{5}{12} & \frac{25}{16} & \frac{83}{30} & \frac{83}{45} & \frac{83}{12} \\ \frac{49}{9} & \frac{35}{12} & \frac{581}{45} & \frac{35}{12} & \frac{25}{16} & \frac{83}{12} & \frac{581}{45} & \frac{83}{12} & \frac{6889}{225} \end{bmatrix}$$

از روش هم‌محلی بوبکر استفاده کرده، نقاط هم‌محلی  $\{(x_i, y_j) \mid i, j = 0, 1, 2, \quad x_0 = y_0 = 0, \quad x_1 = y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = y_2 = 1\}$  را در معادله (۹) جایگزین کرده و دستگاه عددی (۱۰) را بدست می‌آوریم. شکل ماتریسی دستگاه حاصله در رابطه (۱۱) داده شده که بعد از محاسبه داریم:

برای حل این مثال،  $\mathbf{N} = \mathbf{M} = \mathbf{2}$  را فرض می‌کنیم. برای این منظور تابع جواب واقعی  $u(x, y)$  را می‌توان به وسیله‌ی تابع  $u_{2,2}(x, y)$  بنابر روابط (۲)، (۷) و (۸) در فرم زیر تقریب زد.

$$u(x, y) \approx u_{2,2}(x, y) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \beta_{nm} \psi_m^n(x, y) = \mathbf{X}(x, y) \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Psi}(x, y) \cdot \boldsymbol{\beta}$$

که در آن:

$$\mathbf{X}(x, y) = [ 1 \ y \ y^2 \ x \ xy \ xy^2 \ x^2 \ x^2y \ x^2y^2 ]$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_{0,0}, \beta_{0,1}, \beta_{0,2}, \beta_{1,0}, \beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \beta_{2,0}, \beta_{2,1}, \beta_{2,2}]^T$$

$$\mathbf{Z}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هدف اصلی حل مسئله یافتن بردار ستونی مجهول  $\boldsymbol{\beta}$  است که مطابق با ساختار ایده اصلی توضیح داده شده در بخش‌های دوم و سوم این مقاله از ابتدا باید هسته قسمت انتگرالی

$K(x, y, t, s) = (x^2 + y + s^2 + t)$  به شکل تقریبی از سری بوبکر بریده شده از رابطه‌ی (۱۶) استخراج گردد. برای این منظور، اولاً لازم است که ماتریس  $\mathbf{Q}$  را از روی ماتریس  $\mathbf{R}$  به صورت زیر به دست آوریم. با کمک روابط (۱۸) و (۱۹) ماتریس متقارن  $\mathbf{R}$  ساخته می‌شود و سپس با استفاده از معادله ماتریسی (۲۰) ماتریس مربعی متقارن  $\mathbf{Q}$  از مرتبه ۹  $(\mathbf{2} + \mathbf{1}) \times (\mathbf{2} + \mathbf{1})$  حاصل خواهد شد. ثانیاً، از طرفی دیگر بنابر معادلات ماتریسی (۱۳) و (۱۴) باید تابع برداری دو متغیره‌ی

$$\mathbf{H}(x, y) = [h_{0,0}(x, y), h_{0,1}(x, y), \dots, h_{2,2}(x, y)]$$

را از طریق متحد قرار دادن دو طرف تساوی  $K(x, y, t, s) = \mathbf{H}(x, y) \cdot \mathbf{X}(t, s) \cdot \mathbf{Z}^T$  (۲۹)

$$\beta = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

از طرفی می‌دانیم برای یافتن جواب تقریبی  $u_{2,2}(x, y)$  به تابع بردار سطری  $\Psi(x, y)$  نیاز داریم که با توجه به نتایج بدست آمده برای  $\mathbf{X}$  و  $\mathbf{Z}^T$  با استفاده از معادله‌ی (۸) داریم؛

$$\Psi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 + 2 \\ x \\ xy \\ xy^2 + 2x \\ x^2 + 2 \\ x^2y + 2y \\ x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 \end{bmatrix}^T$$

حال ما می‌توانیم جواب تقریبی  $u_{2,2}(x, y)$  را بدست آوریم:

$$u_{2,2}(x, y) = \Psi(x, y) \cdot \beta = x^2 + y^2$$

که ملاحظه می‌کنیم که همان جواب دقیق مسئله است.

### ۶. نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات

در سالهای اخیر، مطالعات در مورد معادلات انتگرال دو بُعدی در زمینه‌های ریاضیات و فیزیک بطور معناداری افزایش یافته است.

در این پژوهش، روش‌های هم‌محلی بوبکر برای حل عددی معادلات انتگرال دو بعدی فردهلم خطی نوع دوم استفاده شده است. ملاحظه می‌شود که روش زمانی که توابع معلوم در معادله را به سری بوبکر بریده شده (2D-TBPS) بسط داد، دارای بهترین مزیت است. یکی دیگر از مزیت‌های قابل توجه روش این است که جواب ضرایب چند جمله‌ای بوبکر با استفاده از برنامه‌های کامپیوتری بسیار آسان محاسبه می‌شود. مثال‌های تصویری برای نشان دادن اعتبار و کاربرد تکنیک شامل شده و بر روی کامپیوتر با استفاده از یک برنامه نوشته شده در *Maple16* انجام می‌شود.

برای به دست آوردن جواب بهترین تقریب معادله، جملات بیشتری از بسط توابع بوبکر باید بکاربرده شود، یعنی، کران بریده شده  $N$  باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود. علاوه بر این، یک ویژگی جالب از این

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -0.7277777778 \\ -0.8111111111 \\ -0.3944444444 \\ -0.6444444444 \\ -0.7277777778 \\ -0.3111111111 \\ -0.3944444444 \\ -0.4777777778 \\ -0.0611111111 \end{bmatrix}$$

و  $\mathbf{H} = \{\mathbf{H}(x_i, y_j) \mid i, j = 0, 1, 2\}$ ، یعنی؛

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{4} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و  $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(x_i, y_j) \mid i, j = 0, 1, 2\}$ ، یعنی؛

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا، با جایگزینی تمامی ماتریس‌ها و بردارهای محاسبه شده در ساختار معادله‌ی ماتریسی اساسی به دستگاه

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}^T - \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q} \cdot \beta = \mathbf{G}$$

جبری خطی می‌رسیم.

این دستگاه که ماتریس ضرایب آن رتبه کامل بوده، لذا دارای یک جواب یکتا برای  $\beta$  است و داریم؛

روش یافتن راه‌حل‌های تحلیلی است اگر معادله یک توابع چندجمله‌ای است آنگاه دارای یک راه‌حل دقیق خواهد بود. که این مسئله در آخرین مثال با نتایج رضایت بخش برای نشان دادن کاربرد این روش استفاده شده است. تقریبات ساخته شده در روش (2D-TBPS) بسیار جذاب بوده و منجر به توافق خوبی بین مقادیر تقریبی و مقادیر دقیق در مثال‌های عددی می‌شود.

در نتیجه، روش ذکر شده تایید می‌شود. درستی راه‌حل‌های به دست آمده را با قرار دادن آنها به معادله اصلی با کمک *Maple* می‌توان مورد امتحان قرار داده تا اطمینان بیشتری از نتایج حاصل شود.

ما پیش بینی می‌کنیم که روش هم‌محلی بوبکر (2D-TBPS) روش امیدوار کننده برای تحقیق دقیق راه‌حل‌های تحلیلی برای معادلات انتگرال دوبعدی فردهلم خطی خواهد بود.

موضوعاتی که برای تحقیقات بعدی می‌توان بر شمرد، از آن جمله به بکاربردن روش حاضر برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی با ضرایب ثابت و متغیر و نیز این روش برای دستگاه معادلات انتگرال دو بعدی فردهلم خطی نوع دوم نیز قابل اجرا خواهد بود، اما برخی از تغییرات و اصلاحات مورد نیاز است.

- [8] Lin, Q., Sloan, I. H. and Xie R., Extrapolation of the iteration collocation method for integral equations of the second kind, *SIAM J. Numer. Anal.*, **27** (1990) 1535-1541.
- [9] McLean, W., Asymptotic error expansions for numerical solutions of integral equations, *IMA J. Numer. Anal.*, **9**(1989) 373-384.
- [10] Karem Ben Mahmoud, B., Temperature 3D profiling in cryogenic cylindrical devices using Boubaker polynomials expansion scheme (BPES), *Cryogenics*, **49** (2009) 217-220.
- [11] Boubaker, K., Boubaker polynomials expansion scheme (BPES) solution to Boltzmann diffusion equation in the case of strongly anisotropic neutral particles forward-backward scattering. *Ann. Nucl. Energy*, **38** (2011) 1715-1717.
- [12] Boubaker, K. and Zhang L., Fermat-linked relations for the Boubaker polynomial sequences via Riordan matrices analysis. *J. Assoc. Arab Univ. Basic Appl. Sci.*, **12** (2012) 74-78.
- [13] Labiadh H. and Boubaker, K., A Sturm-Liouville shaped characteristic differential equation as a guide to establish a quasi-polynomial expansion to the Boubaker polynomials, *Diff. Eq. and Cont. Proc.*, **2** (2007) 117-133.
- [14] Zhao, T.G. , Naing, L. and Yue W. X., Some New Features of Boubaker Polynomials Expansion Scheme BPES. *Math. Notes*, **87(2)** (2010) 165-168.
- [1] Delves, L.M. and Mohamed, J.L., *Computational Method for Integral Equations*, Cambridge University Press, New York, (1985).
- [2] Avazzadeh, Z. and Heydari, M., Chebyshev polynomials for solving two dimensional linear and nonlinear integral equations of the second kind, *Comput. and Appl. Math.*, **31(1)** (2012) 127-142.
- [3] Tohidi, E., Taylor matrix method for solving linear two-dimensional Fredholm integral equations with Piecewise Intervals, *Computational and Applied Mathematics*, **34(3)** (2015) 1117-1130.
- [4] Rahimi, M. Y., Shahmorad, S., Talati, F. And Tari, A., An Operational Method for The Numerical Solution of Two Dimensional Linear Fredholm Integral Equations with an Error Estimation, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **36(2)** (2010) 119-132.
- [5] Mirzaee, F. and Hadadiyan, E., Numerical solution of linear Fredholm integral equations via two-dimensional modification of hat functions, *Appl. Math. Comput.*, **250** (2015) 805-816.
- [6] Guoqiang, H. and Wang, R., Richardson extrapolation of iterated discrete Galerkin solution for two-dimensional Fredholm integral equations, *J. Comput. and Appl. Math.*, **139** (2002) 49-63.
- [7] Guoqiang, H. and Jiong, W., Extrapolation of Nystrom solution for two-dimensional nonlinear Fredholm integral equations, *J. Comput. and Appl. Math.*, **134** (2001) 259-268.

