دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

صفر شدن تابعگون Ext و قضیه پوچ‌ساز فالتینگز برای مدول‌های کوهن-مکالی نسبی

مریم مست ظهوری[۱]، خدیجه احمدی آملی[۲*]، سعادت‌اله فرامرزی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
[۲ و ۳] استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۹/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۱/۲۹

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و نوتری، a و b ایده‌آل‌هایی از R و M یک R-مدول متناهی باشد. صفر شدن و کوهن-مکالی نسبی بودن تابعگون Ext را روی مدول‌های کوهن-مکالی نسبی صافی شده نسبت به ایده‌آل a (به اختصار $RCMF$) مطالعه کرده‌ایم. نشان داده‌ایم قضیه پوچ‌ساز فالتینگز برای هر مدول کوهن-مکالی نسبی نسبت به a با $Supp(M/aM)\setminus V(b)\neq\varnothing$ برای هر حلقه دلخواه نوتری برقرار است. همچنین نتایج جدیدی درباره بُعد متناهی $f_a(M)$ از مدول M وابسته به ایده‌آل a به دست آورده‌ایم. در ادامه کاربردهایی از مدول‌های کوهن-مکالی نسبی نسبت به ایده‌آل a را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تابعگون Ext، مدول‌های کوهمولوژی موضعی، مدول‌های کوهن-مکالی نسبی صافی شده، قضیه پوچ‌ساز فالتینگز.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: khahmadi@pnu.ac.ir

۱ـ مقدمه

در سراسر این مقاله، R حلقه‌ای جابجایی، نوتری، با عنصر همانی ناصفر با بُعد کرول n است. a و b ایده‌آل‌هایی از R و M یک R-مدول از بُعد مثبت d است. iـاُمین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده‌آل a را با $H_a^i(M)$ نشان می‌دهیم. قبل از تنظیم مقاله، چندین مفهوم مرتبط را یادآوری می‌کنیم. بر اساس تعریف ۲. ۲ از مرجع [17]، R ـمدول متناهی M را کوهن-مکالی نسبی نسبت به a نامیم هرگاه دقیقاً یک اندیس وجود داشته باشد که مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به a در آن ناصفر باشد. به‌طور واضح، این حالت زمانی است که اگر و تنها اگر $grade(a,M)=cd(a,M)$ که در آن $grade(a,M)$ کوچک‌ترین اندیس و $cd(a,M)$ بزرگ‌ترین اندیسی است که به ازای آن $H_a^i(M)\neq 0$. این مفهوم با نماد ایده‌آل‌های به‌طور کوهمولوژیکی مشترک کامل که در مرجع [12] مورد مطالعه قرار گرفته است، ارتباط دارد. نویسندگان این مقاله در مراجع [14] و [15]، به بررسی خواص مدول‌ها و حلقه‌های کوهن–مکالی نسبی پرداخته‌اند. با نگاهی به تعریف ۲. ۱ از مرجع [3]، صافی صعودی $\mu=\{M_i\}_{i=0}^{c}$ از زیر مدول‌های M که $c=cd(a,M)$، صافی بُعد کوهمولوژیکی M نامیده می‌شود هرگاه برای تمام اعداد صحیح $0\leq i\leq c$، M_i بزرگ‌ترین زیرمدول M باشد طوری‌که $cd(a,M_i)\leq i$. اخیراً در مرجع [14]، مفهوم مدول‌های کوهن–مکالی نسبی صافی شده نسبت به ایده‌آل a را که به اختصار آن‌را با نماد $RCMF$ نشان می‌دهیم، تعریف و مطالعه کرده‌ایم. فرض کنیم M یک R–مدول متناهی باشد و $\mu=\{M_i\}_{i=0}^{c}$ صافی بُعد کوهمولوژیکی از زیرمدول‌های M باشد که در آن $c=cd(a,M)$. مدول M را کوهن–مکالی صافی شده (به‌طور متوالی کوهن–مکالی) نسبت به a می‌نامیم هرگاه $\mu_i=M_i/M_{i-1}$ یا صفر باشد یا برای هر $1\leq i\leq c$، کوهن–مکالی نسبی نسبت به a از بُعد کوهمولوژیکی i باشد (تعریف ۲. ۳ از مرجع [14] را ببینید).

یادآوری می‌کنیم بُعد متناهی $f_a(M)$ از M وابسته به ایده‌آل a به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_a(M)=\inf\left\{i\in\mathbb{N}_0 : H_a^i(M)\ is\ not\ f.g.\right\}$$

مقدار $f_a(M)$ اگر وجود داشته باشد یک عدد صحیح مثبت است و در غیر این‌صورت ∞ در نظر گرفته می‌شود. فرمول دیگر، بُعد b–متناهی $f_a^b(M)$ از M وابسته به ایده‌آل a است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_a^b(M)=\inf\left\{i\in\mathbb{N}_0 : b\not\subseteq\sqrt{\left(0:H_a^i(M)\right)}\right\}.$$

که یک عدد مثبت یا بینهایت است.

همچنین، عُمق b–مینیمُم a–تنظیم شده از M که با $\lambda_a^b(M)$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda_a^b(M)=\inf\{depth M_p+ht(a+p)/p :$$
$$p\in Spec(R)\setminus V(b)\}.$$

در حالت کلی فرض نمی‌کنیم $b\subseteq a$. مقدار $\lambda_a^b(M)$ اگر وجود داشته باشد یک عدد صحیح مثبت است و در غیر این‌صورت ∞ در نظر گرفته می‌شود.

مقاله حاضر به سه بخش تقسیم شده است. در بخش دوم، صفر شدن و کوهن–مکالی نسبی بودن تابعگون Ext را برای مدول‌های $RCMF$ نسبت به یک ایده‌آل بررسی کرده‌ایم. در واقع در قضیه ۱. ۴ از مرجع [14]، محک پِسکاین از مدول‌های کوهن–مکالی متوالی در نوع تابعگون Ext در حالت مدرج نشان داده شده است. همچنین در تعریف ۲. ۱۰ از مرجع [14]، مدول متعارف کوهمولوژیکی برای M را به‌صورت $Hom_R(H_a^{cd(a,M)}(M),E_R(k))$ تعریف کرده‌ایم و با نماد $K(M)$ نشان داده‌ایم. یکی از نتایج اصلی این مقاله، نتیجه زیر می‌باشد.

فرض کنیم (R,m) یک حلقه موضعی کوهن–مکالی نسبی نسبت به ایده‌آل a با $cd(a,R)=c$ باشد و $K(R)$ مدول متعارف آن با $cd(a,K(R))=c$ باشد. همچنین فرض کنیم M یک R–مدول $RCMF$ با

صافی بیان شده در لم ۲. ۴ و $c_i = cd(a, M_i / M_{i-1})$ برای هر $1 \le i \le r$ باشد. در این‌صورت برای هر $1 \le i \le r$، $Ext_R^{c-c_i}(M, K(R)) \cong Ext_R^{c-c_i}(M_i / M_{i-1}, K(R))$ کوهن-مکالی نسبی نسبت به a با بُعد کوهمولوژیکی c_i است و اگر $j \notin \{c-c_1, \ldots, c-c_r\}$، آن‌گاه خواهیم داشت $Ext_R^j(M, K(R)) = 0$. متعاقباً، در نتیجه ۲. ۶ بخشی از قضیه ۱. ۴ از مرجع [13] را برای R- مدول‌های $RCMF$ نسبت به ایده‌آل a وقتی R یک حلقه جابجایی، نوتری و یکدار است را اثبات خواهیم کرد. به بیان دقیق‌تر، نشان داده‌ایم اگر (R,m) یک حلقه‌ی موضعی کوهن-مکالی نسبت به a با $cd(a,R) = c$ باشد و M نسبت به a، $RCMF$ باشد، آنگاه مدول‌های $Ext_R^{c-i}(M, K(R))$ برای هر $0 \le i \le cd(a,M)$، یا صفر هستند یا کوهن-مکالی نسبی نسبت به a از بُعد کوهمولوژیکی i هستند.

در بخش سوم به بررسی رفتار مقدار $f_a(M)$ پرداخته‌ایم. همانطور که می‌دانیم پوچسازهای مدول‌های کوهمولوژی موضعی از مسائل بسیار مهم برای محققان در زمینه کوهمولوژی موضعی است. در مقایسه با نماد $a(M) = a_0(M) \ldots a_{d-1}(M)$، تعریف شده در مراجع [6] و [18]، برای حالتی‌که (R,m) یک حلقه موضعی منظم است و برای هر $0 \le i \le d-1$، $a_i(M)$ پوچساز $H_m^i(M)$ می‌باشد، ما نماد زیر را برای R-مدول M و ایده‌آل a از R با $h := ht_M(a)$ که در آن R لزوماً موضعی نیست به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$a'(M) := a'_0(M) \ldots a'_{h-1}(M) \quad a'_{h+1}(M) \ldots a'_d(M),$$

که در آن برای هر $0 \le i \le d$ (که $i \ne h$)، $a'_i(M) = Ann_R(H_a^i(M))$. تعدادی نتایج درباره این نماد ارائه خواهیم داد.

یک سوال درباره مدول‌های کوهمولوژی موضعی این است که چه ایده‌آل‌هایی مدول‌های کوهمولوژی موضعی را صفر می‌کنند و قضیه اساسی پوچساز فالتینگز که در مرجع [9] بیان شده است. قضیه پوچساز فالتینگز می‌گوید اگر R تصویر همریخت یک حلقه منظم باشد یا دارای همبافت دوگانی باشد، آنگاه برای هر ایده‌آل a و b از R، $\lambda_a^b(M) = f_a^b(M)$. مواردی وجود دارند که در آنها شرایط این قضیه بهبود یافته است (برای مثال، مرجع [5] را مشاهده کنید). به‌عنوان یکی از نتایج اصلی این مقاله، در قضیه ۳. ۷ نشان خواهیم داد روی یک حلقه دلخواه نوتری R و هر R-مدول کوهن-مکالی نسبی M نسبت به a که $Supp(M/aM) \setminus V(b) \neq \emptyset$ باشد، قضیه پوچساز فالتینگز برقرار است. به‌عنوان حالت خاصی از این نتیجه اصلی، می‌توانیم نتیجه بگیریم روی یک حلقه نوتری موضعی (R,m)، اگر M یک R- مدول کوهن-مکالی باشد، آنگاه $f_m^R(M) = \lambda_m^R(M)$.

همانطور که در تذکر ۲. ۹ بیان کرده‌ایم اگر M یک R -مدول کوهن-مکالی نسبی نسبت به a باشد، آنگاه $f_a(M)$ بزرگترین عددی است که به ازای آن مدول $H_a^{f_a(M)}(M)$ آرتینی نمی‌باشد. بالعکس در گزاره ۳. ۱۰، زیر مدولی آرتینی از این مدول‌ها را ارائه می‌دهیم. نتیجه ۳. ۱۱ رفتار بُعد متناهی مدول‌ها نسبت به عناصر غیر مقسوم علیه صفر را برای مدول‌های کوهن-مکالی نسبی نسبت به ایده‌آل a نشان می‌دهد. چندین محک برای $f_a(-)$ به کمک همریختی‌های حلقه‌ای در نتایج ۳. ۱۲ و ۳. ۱۴ بیان شده است. به‌علاوه، نشان می‌دهیم دو رده از مدول‌ها تحت عنوان مدول‌های "ضربی" و "شبه دوگانی" در تساوی $f_a(M) = f_a(R)$ صدق می‌کنند (نتایج ۳. ۱۶ و ۳. ۱۸ را ببینید). این مطلب شناخته شده است که اگر R یک حلقه کامل کوهن-مکالی موضعی باشد، آنگاه $w_R = Hom_R(H_m^n(R), E(R/m))$ مدول متعارف R است. ما این بخش را با نتیجه ۳. ۱۹ به اتمام می‌رسانیم که نشان می‌دهد برای یک حلقه کوهن-مکالی نسبی موضعی نسبت به a، $f_a(w_R) = f_a(R)$.

برای تعاریف و نمادها درباره مدول‌های کوهمولوژی موضعی، خواننده را به مرجع [5] ارجاع می‌دهیم.

۲- صفر شدن و کوهن-مکالی نسبی بودن تابعگون Ext روی مدول‌های $RCMF$

در این بخش به صفر شدن و خاصیت کوهن-مکالی نسبی بودن تابعگون Ext روی مدول‌های $RCMF$

نسبت به ایده‌آل a می‌پردازد.یم این بخش را با یادآوری تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۲. ۱. (تعریف ۲. ۳ از مرجع [14] را ببینید) فرض کنیم M یک R-مدول متناهی باشد و $\mu=\{M_i\}_{i=0}^{c}$ صافی بُعد کوهمولوژیکی از زیر مدول‌های M باشد که در آن $c=cd(a,M)$. مدول M را (به‌طور متوالی کوهن-مکالی نسبی) صافی شده کوهن-مکالی نسبی نسبت به ایده‌آل a می‌نامیم هرگاه برای هر $1\le i\le c$، $\mu_i=M_i/M_{i-1}$ یا صفر باشد یا کوهن-مکالی نسبی نسبت به a از بُعد کوهمولوژیکی i باشد. از این پس چنین مدول‌هایی را به اختصار با نماد $RCMF$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۲. ۲. (تعریف ۲. ۱۰ از مرجع [14] را ببینید) فرض کنیم (R,m,k) یک حلقه موضعی، a ایده‌آلی از آن و M، R-مدولی متناهی با $cd(a,M)=c$ باشد. برای هر $i\neq c$، i-اُمین مدول نُقصان کوهمولوژیکی از M را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K_a^i(M):=D_R(H_a^i(M))$$
$$=Hom_R(H_a^i(M),E_R(\mathrm{M})).$$

مدول $K(M):=K_a^c(M)$ را مدول متعارف کوهمولوژیکی برای M می‌نامیم. توجه داشته باشیم برای $i<0$ یا $i>c$، $K_a^i(M)=0$ است.

لم ۲. ۳. (قضیه ۴. ۳ از مرجع ۱۷ را ببینید) فرض کنیم (R,m) یک حلقه موضعی کوهن-مکالی نسبی نسبت به ایده‌آل a با $cd(a,R)=c$ و $K(R)$ مدول متعارف آن باشد. برای هر $0\le t\le c$ و هر R-مدول کوهن-مکالی نسبی M نسبت به a با $cd(a,M)=t$، داریم

الف) برای هر $j\neq c-t$ ، $Ext_R^j(M,K(R))=0$.

ب) $Ext_R^{c-t}(M,K(R))$ یک مدول کوهن-مکالی نسبی نسبت به a با بُعد کوهمولوژیکی t است.

لم زیر به‌طور مستقیم از تعریف ۲. ۱ بدست می‌آید.

لم ۲. ۴. فرض کنیم M یک R-مدول $RCMF$ نسبت به a با صافی $0=M_0\subset M_1\subset\ldots\subset M_r=M$ و $cd(a,M)=r$ باشد. در این‌صورت برای هر $0\le i\le r$، M/M_i یک مدول $RCMF$ نسبت به a با صافی زیر است.

$$0=M_i/M_i\subset M_{i+1}/M_i\subset\ldots\subset M_r/M_i=M/M_i.$$

برای اثبات نتیجه ۲. ۶، قضیه زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲. ۵. فرض کنیم (R,m) یک حلقه موضعی کوهن-مکالی نسبی نسبت به a با $cd(a,R)=c$ باشد و $K(R)$ مدول متعارف کوهمولوژیکی آن باشد. فرض کنیم M یک R-مدول $RCMF$ با صافی بیان شده در لم ۲. ۴ باشد که $c_i=cd(a,M_i/M_{i-1})$. در این‌صورت برای هر $1\le i\le r$، $Ext_R^{c-c_i}(M,K(R))\cong Ext_R^{c-c_i}(M_i/M_{i-1},K(R))$ یک مدول کوهن-مکالی نسبی نسبت به a با بُعد کوهمولوژیکی c_i است و اگر $j\notin\{c-c_1,\ldots,c-c_r\}$، آن‌گاه $Ext_R^j(M,K(R))=0$.

برهان. با استقراء روی r حکم را ثابت می‌کنیم. برای حالت $r=1$، صافی به‌صورت $0=M_0\subset M_1=M$ است که در آن M نسبت به a، $RCMF$ است. طبق تعریف، M_1/M_0 که همان M است، کوهن-مکالی نسبی نسبت به a است. لذا بنابر لم ۲. ۳، برای $j\neq c-1$، $Ext_R^j(M,K(R))=0$ و $Ext_R^{c-1}(M,K(R))$ کوهن-مکالی نسبی نسبت به a از بُعد کوهمولوژیکی ۱ است. هم‌چنین توجه داریم که $c_1=cd(a,M_1/M_0)=cd(a,M_1)=cd(a,M)=r=1$ پس بدین ترتیب حکم برای حالت $r=1$ برقرار است. فرض کنیم $r>1$ و حکم برای $r-1$ برقرار باشد. از رشته دقیق کوتاه $0\to M_1\to M\to M/M_1\to 0,$ رشته دقیق بلند زیر را داریم:

$$\ldots \to Ext_R^j(M/M_1,K(R)) \to Ext_R^j(M,K(R))$$
$$\to Ext_R^j(M_1,K(R)) \to Ext_R^{j+1}(M/M_1,K(R))$$
$$\to \ldots$$

بنابر لم ۲. ۳، برای هر $j \neq c-c_1$، $Ext_R^j(M_1,K(R))=0$ و مدول $Ext_R^{c-c_1}(M_1,K(R))$ کوهن-مکالی نسبی نسبت به a با بُعد کوهمولوژیکی c_1 است. لذا رشته دقیق بلند زیر را بدست می‌آوریم.

$$0 \to Ext_R^{c-c_1}(M/M_1,K(R)) \to Ext_R^{c-c_1}(M,K(R))$$
$$\to Ext_R^{c-c_1}(M_1,K(R)) \to Ext_R^{c-c_1+1}(M/M_1,K(R))$$
$$\to Ext_R^{c-c_1+1}(M,K(R)) \to 0$$

هم‌چنین برای هر $j \neq c-c_1, c-c_1+1$ یکریختی‌های $Ext_R^j(M/M_1,K(R)) \cong Ext_R^j(M,K(R))$ نتیجه می‌شود. از طرفی دیگر، بنابر لم ۲. ۴، M/M_1 یک مدول $RCMF$ نسبت به a است و دارای صافی کوهن-مکالی نسبی نسبت به a از طول $r-1$ به‌صورت $M_1/M_1 \subset M_2/M_1 \subset \ldots \subset M_r/M_1 = M/M_1$ است.
بنابراین با استفاده از فرض استقراء و لم ۲. ۴، برای $j \notin \{c-c_2,\ldots,c-c_r\}$ داریم $Ext_R^j(M/M_1,K(R))=0$ (ضمن این‌که توجه داریم برای هر $2 \le i \le r$، $cd(a,((M_i/M_1)/(M_{i-1}/M_i)))=c_i$). این مطلب ایجاب می‌کند که $Ext_R^{c-c_1}(M/M_1,K(R))=0$ و $Ext_R^{c-c_1+1}(M/M_1,K(R))=0$. لذا با توجه به آخرین رشته دقیق بلند، $Ext_R^{c-c_1}(M,K(R)) \cong Ext_R^{c-c_1}(M_1,K(R))$ یک مدول کوهن-مکالی نسبی نسبت به a از بُعد کوهمولوژیکی c_1 است و $Ext_R^{c-c_1+1}(M,K(R))=0$.
لذا برای هر $j \neq c-c_1$، نتیجه می‌شود

$$Ext_R^j(M,K(R)) \cong Ext_R^j(M/M_1,K(R)).$$

بنابراین اگر به همین روش پیش برویم و صافی $M_i/M_i \subset \ldots \subset M/M_i$ را برای مدول M/M_i در نظر بگیریم، آن‌گاه یکریختی قسمت اول حکم را خواهیم داشت و نیز برای هر $j \neq c-c_i$، یکریختی

$$Ext_R^j(M/M_i,K(R)) \cong Ext_R^j(M/M_{i-1},K(R))$$

حاصل می‌شود که چون $Ext_R^j(M/M_r,K(R))=0$، نتیجه می‌شود برای هر $j \neq \{c-c_1,c-c_2,\ldots,c-c_r\}$،

$$0 = Ext_R^j(M/M_i,K(R))$$
$$\cong \ldots \cong Ext_R^j(M/M_1,K(R))$$
$$\cong Ext_R^j(M,K(R)).$$

یعنی $Ext_R^j(M,K(R))=0$ که قسمت آخر حکم هم بدست می‌آید. □

نتیجه ۲. ۶. فرض کنیم (R,m) یک حلقه موضعی کوهن-مکالی نسبی نسبت به a با $cd(a,R)=c$ و $K(R)$ مدول متعارف کوهمولوژیکی آن باشد. فرض کنیم M یک R-مدول $RCMF$ نسبت به a باشد. در این‌صورت برای هر $0 \le i \le cd(a,M)$، مدول‌های $Ext_R^{c-i}(M,K(R))$ یا صفر هستند یا کوهن-مکالی نسبت به a با بُعد کوهمولوژیکی i می‌باشند.
اگر عکس رابطه شمول را در نتیجه ۲. ۶ اثبات کنیم، آنگاه می‌توانیم نتیجه بگیریم جمع مستقیم مدول‌های $RCMF$، یک مدول $RCMF$ است. طبیعتاً این سوال پیش می‌آید که آیا عکس این شمول برقرار است یا خیر؟ البته، به آسانی می‌توان نشان داد که مدول‌های کوهن-مکالی نسبی نسبت به یک ایده‌آل با بُعد کوهمولوژیکی یکسان، نسبت به جمع مستقیم خوش رفتار هستند.

۳- بُعد متناهی بودن مدول‌ها و خاصیت کوهن-مکالی نسبی

در این بخش، موضوعاتی مثل بُعد متناهی بودن $f_a(M)$ از مدول M وابسته به ایده‌آل a و عُمق b-مینیمم a-تنظیم شده از M که با $\lambda_a^b(M)$ نشان داده می‌شود را برای مدول‌های کوهن-مکالی نسبی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. توجه کنیم در سراسر این بخش، a و b ایدهآل‌هایی از R هستند که لزوماً $b \subseteq a$ نمی‌باشد. نشان می‌دهیم قضیه پوچساز فالتینگز برای مدول‌های کوهن-مکالی نسبی M نسبت به a با شرط $Supp(M/aM) \setminus V(b) \neq \varnothing$ برقرار است. همچنین، ایده‌آل $a'(M)$ را برای بررسی مسائل مطرح شده

معرفی می‌کنیم. یک ابزار قدرتمند در این بخش، کوهن–مکالی نسبی بودن نسبت به یک ایده‌آل است.این بخش را با تعریف نماد زیر که در مقایسه با نماد $a(M)$ که در مراجع [6] و [18] استفاده شده است آغاز می‌کنیم.

تعریف ۳. ۱. فرض کنیم M یک R–مدول با بُعد کرول d باشد و a ایده‌آلی از حلقه R با $h := ht_M(a)$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$a'(M) := a'_0(M)...a'_{h-1}(M)$$
$$a'_{h+1}(M)...a'_d(M),$$

که در آن برای هر $0 \le i \le d$ و $i \ne h$،

$$a'_i(M) = Ann_R(H^i_a(M)).$$

تذکر ۳. ۲. اگر (R,m) یک حلقه موضعی کوهن–مکالی نسبی نسبت به ایده‌آل a باشد، آن‌گاه با توجه به تعریف ۳. ۱ داریم $a'(R) = R$. بنابراین $\dim(R/a'(R)) = -1$. هم‌چنین نتیجه می‌شود $f_{a'(R)}(R) = \infty$.

نتیجه زیر رابطه جالبی را برای پوچسازهای مولفه‌های صافی یک مدول *RCMF* نشان می‌دهد.

نتیجه ۳. ۳. فرض کنیم M یک مدول *RCMF* نسبت به a باشد و $\mu = \{M_i\}_{i=0}^{c}$ صافی بُعد کوهمولوژیکی آن باشد که $c = cd(a,M)$. در این‌صورت برای تمام $0 \le i \le c$ با $i \ne ht_M(a)$،

$$a'_i(M) = a'_i(M_i) = a'_i(\mu_i).$$

برهان. به قضیه ۲. ۱۲ از مرجع [14] رجوع کنید. □

نتیجه ۳. ۴. فرض کنیم M یک R–مدول کوهن–مکالی نسبی نسبت به a با شرط $M \ne aM$ باشد. در این‌صورت

$$f_a^{a'(M)}(M) = \lambda_a^{a'(M)}(M).$$

برهان. از آنجاکه $a'(R) = R$، با استفاده از تمرین‌های ۹. ۱. ۹ و ۹. ۳. ۳ از مرجع [5] داریم

$$f_a^R(M) = grade(a,M) = \lambda_a^R(M). \; \square$$

تذکر ۳. ۵. برای هر R–مدول متناهی M به‌طوری‌که $ht_M(a) > 0$، نامساوی $f_a(M) \le ht_M(a)$ را داریم. (تذکر ۲. ۷ از مرجع [2] را ببینید.) واضح است اگر M یک R–مدول کوهن–مکالی نسبی نسبت به a باشد، آن‌گاه $f_a(M) = ht_M(a)$. اما مثال‌هایی وجود دارند که در آنها $f_a(M) < ht_M(a)$. فرض کنیم k یک میدان و $R = k[X,Y^2,XY,Y^3]$. در این صورت ارتفاع ایده‌آل $a = (X,Y^2,XY,Y^3)R[Z] + ZR[Z]$ از حلقه چندجمله‌ای $R[Z]$ برابر با ۳ است در حالی‌که بُعد متناهی $f_a(R[Z])$ برابر با ۲ است. (مثال ۹. ۵. ۳ از مرجع [5] را ببینید.)

در گزاره زیر، یک کران بالا برای $\lambda_a^b(M)$ تامین می‌کنیم.

گزاره ۳. ۶. فرض کنیم M یک R–مدول کوهن–مکالی نسبی نسبت به a باشد که $Supp(M/aM) \setminus V(b) \ne \varnothing$. در این‌صورت $\lambda_a^b(M) \le ht_M(a)$.

برهان. فرض کنیم $p \in Supp(M/aM) \setminus V(b)$ و q یک ایده‌آل اول مینیمال $a + Ann_R(M)$ باشد طوری‌که $q \subseteq p$. در این‌صورت برای هر $i \ge 0$ داریم:

$$H^i_a(M)_q \cong H^i_{(a+Ann_R(M))R_q}(M_q)$$
$$\cong H^i_{qR_q}(M_q).$$

بنابر قضیه ۶. ۱. ۴ از مرجع [5] و چون $H_{qR_q}^{depth M_q}(M_q)$ ناصفر است، نتیجه می‌گیریم

$$depth\, M_q = \dim M_q.$$

اما $\dim M_q = ht_M(a)$. بنابراین

$$depth\, M_q = ht_M(a).$$

حال بنابر تعریف، $\lambda_a^b(M) \le depth\, M_q = ht_M(a)$ همانطور که مطلوب است. □

حال می‌توانیم نتیجه اصلی این فصل را بیان کنیم که نشان می‌دهد قضیه پوچساز فالتینگز برای مدول‌های کوهن-مکالی نسبی روی حلقه‌های نوتری برقرار است.

قضیه ۳. ۷. فرض کنیم M یک R-مدول کوهن-مکالی نسبی نسبت به a است. اگر ایده‌آل اولی مانند $p \in Supp(M / aM) \setminus V(b)$ وجود داشته باشد به طوری‌که $ht_M(a) = ht_M(p)$، آن‌گاه $f_a^b(M) = \lambda_a^b(M)$.

برهان. از آنجا که M، کوهن-مکالی نسبی نسبت به a است، به آسانی می‌توان دید

$$ht_M(a) = cd(a, M) = f_a^b(M).$$

بنابراین با استفاده از گزاره ۳. ۶ و قضیه ۹. ۳. ۵ از مرجع [5]، داریم

$$ht_M(a) \le \lambda_a^b(M) \le ht_M(a).$$

بنابراین تساوی حکم اثبات شده است. □

به‌عنوان حالت خاصی از قضیه ۳. ۷، نتیجه زیر را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۳. ۸. فرض کنیم (R, m) یک حلقه موضعی نوتری باشد. اگر M یک R-مدول کوهن-مکالی باشد، آن‌گاه $f_m^R(M) = \lambda_m^R(M)$.

برهان. بنابر فرض، چون M کوهن-مکالی نسبی نسبت به m است، حکم به آسانی از قضیه قبل نتیجه می‌شود. □

تذکر ۳. ۹. فرض کنیم I یک ایده‌آل از R باشد. یادآوری می‌کنیم یک دنباله $a_1, \dots, a_n$ از عناصر حلقه R یک M-رشته‌ی منظم I-صافی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $1 \le i \le n$ و هر $p \in Ass(M / (a_1, \dots, a_{i-1}M)) \setminus V(I)$، $a_i \notin p$ و داشته باشیم

$$Supp(M / (a_1, \dots, a_n)M) \setminus V(I) \neq \varnothing.$$

واضح است که طول هر M-رشته‌ی منظم I-صافی ماکسیمال شامل در a که با $I - fgrade_M(a)$ نشان داده می‌شود برابر با کوچک‌ترین عدد صحیح $i \ge 0$ است که $Supp(H_a^i(M)) \not\subset V(I)$. (قضیه ۱. ۱۳ از مرجع [1] را ببینید.) به آسانی می‌توان مشاهده کرد که اگر (R, m) یک حلقه موضعی و a یک ایده‌آل از R باشد که $Supp(M / aM) \setminus \{m\} \neq \varnothing$ باشد، آن‌گاه

$$m - fgrade_M(a) = \min\left\{ i \in \mathbb{N}_0 \middle| H_a^i(M) \text{ is not Artinian} \right\}$$

در وضعیت فوق، اگر M یک R-مدول کوهن-مکالی نسبی نسبت به a باشد، آن‌گاه چون $H_a^{f_a(M)}(M) \neq 0$ داریم

$$f_a(M) = ht_M(a) = m - fgrade_M(a).$$

لذا $H_a^{f_a(M)}(M)$ آرتینی نیست. چون مدول کوهمولوژی موضعی از مرتبه بالای $H_a^{\dim M}(M)$ آرتینی است، خواهیم داشت $q_a(M) < \dim M$. به‌خصوص، اگر برای هر $i \neq ht_M(a)$، $H_a^i(M) = 0$، آن‌گاه

$$q_a(M) = f_a(M).$$

همانطور که در تذکر ۳. ۹ مشاهده کردیم، هر چند مدول‌های کوهمولوژی موضعی از مرتبه بالا، تقریباً همیشه آرتینی نیستند، در گزاره زیر شرطی را تامین می‌کنیم که تحت آن‌ها، زیر مدولی آرتینی از این نوع مدول‌ها وجود دارند.

گزاره ۳. ۱۰. فرض کنیم (R, m) یک حلقه موضعی و M یک R-مدول کوهن-مکالی نسبی نسبت به a با $ht_M(a) = h$ و $\dim_R(M / aM) = 1$ باشد. در این‌صورت برای عنصری مانند $x \in m$، مدول $H_{Rx}^0(H_a^h(M))$ روی R، آرتینی است.

برهان. فرضِ $\dim_R(M / aM) = 1$ وجود $x \in m$ را به‌طوری‌که $\dim M / (a + Rx)M = 0$ را تضمین

می‌کند. دنباله دقیق زیر را مطابق با نتیجه ۳. ۵ از مرجع [19] در نظر می‌گیریم.

$$0 \to H^1_{Rx}(H^{h-1}_a(M)) \to H^h_m(M) \to H^0_{Rx}(H^h_a(M)) \to 0$$

با توجه به این‌که $H^{h-1}_a(M)=0$، نتیجه می‌شود $H^0_{Rx}(H^h_a(M))$ روی R، آرتینی است. □

در لم ۷. ۲ از مرجع [16] ثابت شده است $f_a(M) \le s + f_a(M/\underline{x}M)$ که در آن s یک عدد صحیح نامنفی و $\underline{x}=x_1,\dots,x_n$ یک M–رشته منظم است. اکنون ما شرایطی را مهیا می‌کنیم که این نامساوی به یک مساوی تبدیل می‌شود.

نتیجه ۳. ۱۱. فرض کنیم (R,m) یک حلقه موضعی و M یک R–مدول کوهن–مکالی نسبی نسبت به a با $ht_M a = c$ باشد. اگر $\underline{x}=x_1,\dots,x_n$ یک رشته‌ی منظم روی M و $D_R(H^c_a(M))$ باشد، آن‌گاه $f_a(M) = f_a(M/\underline{x}M) + n.$

برهان. بنابر تعریف و نتیجه ۲. ۲۳ از مرجع [14]، داریم $f_a(M) = cd(a,M)$ و $f_a(M/\underline{x}M) = cd(a, M/\underline{x}M).$ حال با استفاده از قضیه ۲. ۲۲ مرجع [14] حکم نتیجه می‌شود. □

در ادامه این بخش، چندین نتیجه برای $f_a(M)$ وقتی M یک R–مدول کوهن–مکالی نسبی نسبت به ایده‌آل a است، بیان می‌کنیم. به ویژه، در دو نتیجه زیر، رفتار $f_a(-)$ را تحت همریختی‌ها بیان می‌کنیم.

نتیجه ۳. ۱۲. فرض کنیم برای تمام اعداد صحیح مثبت $k \in \mathbb{N}$، همریختی حلقه‌ای $\phi_k : R \to R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که دستگاه معکوس از ایده‌آل‌های $\{\phi_k(a)R\}_{k\in\mathbb{N}}$ با $\{a^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ هم پایان باشد. در این‌صورت اگر R کوهن–مکالی نسبی نسبت به a باشد، آن‌گاه برای تمام $k\in\mathbb{N}$ها، $f_a(R) = f_{\phi_k(a)R}(R)$.

برهان. ابتدا، چون دستگاه معکوس از ایده‌آل‌های $\{\phi_k(a)R\}_{k\in\mathbb{N}}$ با دستگاه معکوس $\{a^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ هم‌پایان است، لذا برای هر i، jای وجود دارد که $a^j \subseteq \phi_i(a)R \subseteq a$. بنابراین برای هر $k\in\mathbb{N}$، $grade(\phi_k(a),R) = grade(a,R).$

از طرفی دیگر بنابر لم ۲. ۱ از مرجع [7] داریم $cd(\phi_k(a)R,R) = cd(a,R)$. بنابراین برای هر $k\in\mathbb{N}$، R کوهن–مکالی نسبی نسبت به a است. حال تذکر ۵ اثبات را کامل می‌کند. □

مثال ۳. ۱۳. برای هر حلقه نوتری R از مشخصه مثبت p، اگر $\phi_k : R \to R$ نگاشت فروبینوس در نظر گرفته شود نتیجه برقرار است.

نتیجه ۳. ۱۴. فرض کنیم $f : R \to R'$ یک همریختی یکدست باوفا از حلقه‌های نوتری باشد. اگر R کوهن–مکالی نسبی نسبت به ایده‌آل a باشد، آن‌گاه $f_a(R) = f_{aR'}(R')$.

برهان. بنابر گزاره ۳. ۷ از مرجع [14]، R' کوهن–مکالی نسبی نسبت به aR' است. حال، با استفاده از تذکر ۳. ۵، اثبات کامل می‌شود. □

برای مثال‌هایی از نتیجه ۳. ۱۴، خواننده را به مثال‌های ۳. ۹ و ۳. ۱۰ از مرجع [14] ارجاع می‌دهیم.

در این قسمت مدول‌هایی را ارائه می‌دهیم که تساوی $f_a(M) = f_a(R)$ در مورد آن‌ها برقرار است.

تعریف ۳. ۱۵. (مرجع [8] را ببینید.) R–مدول M را ضربی گوییم هرگاه برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل a از R موجود باشد طوری‌که $N = aM$.

نتیجه ۳. ۱۶. فرض کنیم R یک حلقه کوهن–مکالی نسبی نسبت به a و M یک R–مدول ضربی باوفا باشد. در این‌صورت $f_a(M) = f_a(R)$.

برهان. برای اثبات، نتیجه ۳. ۲ از مرجع [14] و تذکر ۳. ۵ را به‌کار ببرید. □

تعریف ۳. ۱۷. (مراجع [10] و [21] را ببینید.) $R-$مدول M شبه دوگانی نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) M به‌طور متناهی تولید شده باشد.

ب) نگاشت $\chi_M^R : R \to Hom_R(M,M)$، تعریف شده توسط $r \mapsto [s \mapsto rs]$، یکریختی باشد.

ج) برای هر $i > 0$، $Ext_R^i(M,M) = 0$.

نتیجه ۳. ۱۸. فرض کنیم R یک حلقه کوهن–مکالی نسبی نسبت به ایده‌آل a و M یک $R-$مدول شبه دوگانی باشد. در این‌صورت $f_a(M) = f_a(R)$.

برهان. برای اثبات، کافی است نتیجه ۳. ۴ از مرجع [14] و تذکر ۳. ۵ را مشاهده نمایید. □

این بخش با نتیجه‌ای درباره مدول‌های متعارف به پایان می‌رسانیم.

نتیجه ۳. ۱۹. فرض کنیم (R,m) یک حلقه کوهن–مکالی موضعی نسبی نسبت به ایده‌آل a باشد و w_R مدول متعارف آن باشد. در این‌صورت $f_a(w_R) = f_a(R)$.

برهان. بنابر قضیه ۳. ۵ از مرجع [14]، w_R کوهن–مکالی نسبی نسبت به a است اگر و تنها اگر R یک حلقه کوهن–مکالی نسبی نسبت به a باشد. بنابراین با استفاده از تذکر ۳. ۵، اثبات کامل است. □

فهرست منابع

[1] Kh. Ahmadi Amoli, Filters regular sequences, local cohomology modules and singular sets, PhD. Thesis, (1996).

[2] M. Asgharzadeh, K. Divaani-Aazar and M. Tousi, The finiteness dimension of local cohomology modules and its dual notion, J. Pure Appl. Algebra, 213 (2009) 321-328.

[3] A. Atazadeh, M. Sedghi, and R. Naghipour, Cohomological dimension filtration and annihilators of top local cohomology modules, Colloquium Mathematicum, 139 (2015) 25-35.

[4] M. Brodmann, A rigidity result for highest order local cohomology modules, Arch. Math. 79 (2002) 87-92.

[5] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, Local Cohomology: an algebraic introduction with geometric applications, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 60, Cambridge University Press, Cambridge, (1998).

[6] N. T. Coung, On the dimension of the non-Cohen-Macaulay locus of local rings admitting dualizing complexes, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1991) 109, 479-488.

[7] K. Divaani-Aazar, R. Naghipour and M. Tousi, Cohomological dimension of certain algebraic varieties, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002) 3537-3544.

[8] Z.A. El-Bast and P.F. Smith, Multiplication modules, Comm. Algebra 16 (1988) 755-779.

[9] Faltings. G. Über die Annulatoren lokaler Kohomologiegruppen, Arch. Math. (Basel) 30 (1978), no. 5, 473-476.

[10] H. B. Foxby, Gorenstein modules and related modules. Math. Scand 31 (1972) 267-284.

[11] R. Hartshorne, Cohomological dimension of algebraic varieties, Ann. of Math. 88 (1968) 403-450.

[12] M. Hellus and P. Schenzel, Notes on local cohomology and duality, Journal of Algebra, 401 (2014) 48-61.

[13] J. Herzog, E. Sbarra, Sequentially Cohen-Macaulay modules and local cohomology, In: Algebra, Arithmetic and Geometry, Part I, II. Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math 16 (2000).

[14] M. Mast Zohouri, Kh. Ahmadi Amoli, S. O. Faramarzi, Relative Cohen-Macaulay filtered modules with a view toward relative Cohen-Macaulay modules, Math. Reports 20(70) 3 (2018), 301-318.

[15] M. Mast Zohouri, Local cohomology modules and relative Cohen-Macaulayness. Discuss. Math. Gen. Algebra Appl 38 (2018) 197–205.

[16] A. A. Mehrvarz, R. Naghipour, M. Sedghi. Faltings' local-global principal for the finiteness of local cohomology modules over Noetherian rings, Comm. Algebra 43 (11) (2015) 953-958.

[17] M. Rahro Zargar, Some duality and equivalence results, arXiv:1308.3071v2 [math.AC].

[18] P. Schenzel, On the use of local cohomology in algebra and geometry, in:, Lectures at the summer school of commutative Algebra and Algebraic Geometry, Birkha, Basel, Ballaterra, (1996).

[19] P. Schenzel, Proregular sequences, local cohomology, and completion, Math. Scand. 92 (2) (2003) 161-180.

[20] N. V. Trung, Absolutely superficial sequences, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 93 (1983) 35-47.

[21] W. V. Vasconcelos, Divisor theory in module categories, North-Holland Math. stud., vol. 14, North HollandPublishing Co., Amsterdam, (1974).