دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره نهم، بهار ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۰۱۶۹-۱۶۸۲

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول تحت مشتق تعمیم یافته

توفیق الهویرنلو[۱]، نازنین احمدی[۲]*، الهام احمدی[۳]

(۱) گروه ریاضی کاربردی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
(۲) گروه ریاضی، واحد ورامین–پیشوا، دانشگاه آزاد اسلامی، ورامین، ایران.
(۳) گروه ریاضی، واحد شهر قدس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۲/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۱/۳۰

چکیده

در این تحقیق یک روش عددی به صورت تقریب قطعه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل فازی معرفی می‌گردد. در این روش جواب مساله با یک قطعه‌ای چندجمله‌ای از درجه سه در هر زیر بازه از جواب بیان می‌گردد. مبنای روش، استفاده از بسط تیلور فازی تابع حول مقدار اولیه مساله معادلات دیفرانسیل فازی می‌باشد. وجود، یکتایی جواب و همچنین سرعت همگرایی روش تقریبی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین نشان داده می‌شود که روش معرفی شده در مقایسه با روش اویلر [۱] برای حل معادلات دیفرانسیل فازی تحت مشتق تعمیم یافته دارای دقت بیشتری می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل فازی، مشتق هاکوهارا تعمیم یافته، روش عددی.

*. Email: N.ahmadi@iauvaramin.ac.ir

عهده‌دارمکاتبات

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر به دلیل کاربرد فراوان معادلات دیفرانسیل فازی در بسیاری از مسایل علوم و مهندسی، اینگونه معادلات بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. مهمترین بخش از معادلات دیفرانسیل نوع مشتق به کار رفته در آن می‌باشد، که تاکنون انواع مختلفی از مشتق تعریف شده است. مفهوم مشتق فازی اولین بار توسط چنگ و زاده [۲] معرفی گردید سپس توسط دبیوس و پراید [۳]، پوری و رالسکیو [۴] و گوچسل و وکسمن[۵] انواع دیگری از مشتق تعریف گردید. مشتق هاکوهارا یکی از مهمترین تعاریف مشتق فازی بود که توسط هاکوهارا معرفی گردید[۶]. مقاله کالوا نقطه آغازین برای تحقیق در معادلات دیفرانسیل فازی بود که در این مقاله معادلات دیفرانسیل فازی تحت مشتق هاکوهارا بیان گردید[۷]. برای حل معادلات دیفرانسیل فازی در حالت کلی دو دسته روش، روش‌های عددی و روش‌های تحلیلی موجود می‌باشد که چون روش‌های تحلیلی برای حل کلیه معادلات دیفرانسیل فازی مقدور نمی‌باشد روش‌های عددی کاربرد بیشتری دارند. از جمله روش‌های عددی، روش‌های اویلر، پیشگو-اصلاحگر، پیشگو-اصلاحگر بهبودیافته و تیلور برای حل معادلات دیفرانسیل تحت مشتق هاکوهارا معرفی گردیده است[۸، ۹، ۱۰، ۱۱].

تحقیقات انجام شده نشان داد که جواب معادلات دیفرانسیل فازی تحت مشتق هاکوهارا دارای یک نقص بزرگ می‌باشد که زمانی کهt افزایش پیدا می‌کرد، مقدار ابهام در جواب افزایش می‌یافت. بده و گال با تعریف مشتق تعمیم یافته قوی این نقص را برطرف کردند [۱۲] و خاصیت‌های کلی آن مورد بحث و بررسی قرار گرفت [۱۵،۱۴،۱۳]. همچنین تعدادی از محققین روش‌های عددی تحت مشتق تعمیم یافته برای حل معادلات دیفرانسیل فازی معرفی کردند [۱،۱۶]. به عنوان مثال در [۱] نویسندگان سری تیلور برمبنای مشتق تعمیم یافته هاکوهارا را ارائه، سپس روش اویلر را برای حل معادلات دیفرانسیل فازی معرفی کردند. در این تحقیق نیز یک روش عددی به نام تقریب قطعه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل فازی تحت مشتق تعمیم یافته ارائه گردیده است که در این روش با استفاره از بسط تیلور فازی روی هر زیر بازه از جواب یک قطعه‌ای چند جمله‌ای فازی از درجه سه تولید می‌گردد که نشان داده می‌شود که این روش از دقت مطلوبی برخوردار می‌باشد در همین راستا روش پیشنهادی با روش اویلر مقایسه گردیده و در مثال عددی برتری این روش نشان داده شده است.

این تحقیق به صورت زیر سازماندهی گردیده است: در فصل ۲، تعاریف اساسی و قضایای مورد نیاز آورده شده است. در فصل ۳ روش عددی پیشنهادی بیان و در فصل ۴ روش ارائه شده توسط مثال‌های عددی مورد ارزیابی قرار گرفته شده است. بحث و نتیجه‌گیری در فصل ۵ آورده شده است.

۲- تعاریف اولیه

در این بخش تعاریف اولیه که در بخش‌های بعدی مورد نیاز است معرفی می‌گردد.

محموعه تمام اعداد فازی که نرمال، محدب، نیم پیوسته بالایی و دارای تکیه‌گاه فشرده هستند رو مجموعه اعداد حقیقی با $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ نمایش داده می‌شود.

برش‌های اعداد فازی برای $0 < r \leq 1$ مجموعه‌های به فرم $[u]^r = \{t \in \mathbb{R} | u(t) \geq r\}$ و $[u]^0 = cl\{t \in \mathbb{R} | u(t) > 0\}$ می‌باشند. در این تحقیق برش‌های $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به فرم $[u]^r = [u^-(r), u^+(r)]$ نمایش داده می‌شود. همچنین اعداد فازی مثلثی با سه تایی $a \leq b \leq c$ ، $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ نمایش داده می‌شود، به‌طوری که برش‌های آن به فرم $u^-(r) = a + (b-a)r$ و $u^+(r) = c - (c-b)r$ برای هر $r \in [0,1]$ می‌باشد.

تعریف ۱-۲: تابع $D: \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ را که بصورت

$$D(u, v) = \sup_{r \in [0,1]} \max\{|u^-(r) - v^-(r)|, |u^+(r) - v^+(r)|\} \qquad (1)$$

تعریف می‌شود را فاصله هاسدورف بین دو عدد فازی $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ گوییم. فضای متریک$(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ کامل،

جداشدنی و بصورت موضعی فشرده است که دارای خصوصیات زیر می‌باشد:

$$D(u \oplus w, v \oplus w) = D(u, v);$$
$$D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| D(u, v);$$
$$D(u \oplus v, w \oplus z) \leq D(u, w) + D(v, z);$$
$$D(u \ominus v, w \ominus z) \leq D(u, w) + D(v, z),$$

که $\ominus$ تفاضل هاکورا می‌باشد به این معنی که $w \ominus v = u$ موجود است اگر و تنها اگر $u \oplus v = w$.

تعریف ۲-۲: فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$، تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا uو v بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \ominus_{gH} v = w$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (i).\, u = v \oplus w; \\ or(ii).\, v = u \oplus (-1)w. \end{cases}$$

تعریف ۳-۲: مشتق تعمیم یافته هاکوهارا تابع $f(a, b) \to R_F$، در نقطه t_0 به صورت

$$f'_{gH}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) \ominus_{gH} f(t_0)}{h}, \qquad (2)$$

تعریف می‌شود. اگر $f'_{gH}(t_0) \in R_F$ آنگاه گوییم f مشتق پذیر تعمیم یافته هاکوهارا (gH-دیفرانسیل پذیر) در نقطه t_0 می‌باشد. همچنین گوییم f در نقطه t_0، [(i)-gH]-دیفرانسیل پذیر است اگر

$$[f'_{gH}]^r(t_0) = [(f^-)'(t_0, r), (f^+)'(t_0, r)] \quad (3)$$

f در نقطه t_0، [(ii)-gH]-دیفرانسیل پذیر است اگر

$$[f'_{gH}]^r(t_0) = [(f^+)'(t_0, r), (f^-)'(t_0, r)] \quad (4)$$

تعریف ۴-۲: نقطه $t_0 \in (a, b)$ نقطه تعویض نوع gH–دیفرانسیل پذیری f است، اگر برای هر همسایگی V از t_0 نقاط $t_1 < t_0 < t_2$ موجود باشند به طوری که (نقطه تعویض نوع I) در نقطه t_1، (۳) برقرار باشد و (۴) برقرار نباشد و در نقطه t_2، (۴) برقرار باشد و (۳) برقرار نباشد.

(نقطه تعویض نوع II) در نقطه t_1، (۴) برقرار باشد و (۳) برقرار نباشد و در نقطه t_2، (۳) برقرار باشد و (۴) برقرار نباشد.

تعریف ۵-۲: فرض کنید $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی فازی مقدار باشد. در این صورت تابع f، gH-دیفرانسیل پذیر از مرتبه n در نقطه $t_0 \in (a, b)$ است اگر توابع $f_{gH}^{(i)}$ به ازای $i = 1, \ldots, n-1$، gH- دیفرانسیل پذیر باشند و همچنین در هیچ نقطه‌ای نوع gH- دیفرانسیل پذیری آنها تعویض نشود. در این صورت

$$(f)_{gH}^{(n)}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(t_0 + h) \ominus_{gH} f^{(n-1)}(t_0)}{h} \qquad (5)$$

به شرط آنکه $(f)_{gH}^{(n)}(t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

قضیه ۱: فرض کنید $\mathrm{T} = [\mathrm{a}, \mathrm{a} + \beta] \subset \mathbb{R}$ که در آن $\beta > 0$ و $\mathrm{f} \in \mathcal{C}_{\mathrm{gH}}^{\mathrm{n}}([\mathrm{a}, \mathrm{b}], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$. به ازای هر $s \in T$

۱. اگر $\mathrm{f}^{(\mathrm{i})}, \mathrm{i} = 0, 1, \ldots, \mathrm{n} - 1$ توابعی [(i)-gH]-دیفرانسیل پذیر باشند و نوع gH-دیفرانسیل پذیری تغییر نکند، آنگاه

$$f(s) = f(a) \oplus f'_{i.gH}(a) \odot (s - a) \oplus f''_{i.gH}(a) \odot \frac{(s - a)^2}{2!} \oplus \ldots \oplus f_{i.gH}^{(n-1)}(a) \odot \frac{(s - a)^{n-1}}{(n-1)!} \oplus R_n(a, s),$$

که در آن

$$R_n(a, s) := \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \ldots \left(\int_a^{s_{n-1}} f_{i.gH}^{(n)}(s_n) ds_n \right) ds_{n-1} \ldots \right) ds_1.$$

۲. اگر $\mathrm{f}^{(\mathrm{i})}, \mathrm{i} = 0, 1, \ldots, \mathrm{n} - 1$ توابعی [(ii)-gH]-دیفرانسیل پذیر باشند و نوع gH-دیفرانسیل پذیری تغییر نکند، آنگاه

$$f(s) = f(a) \ominus (-1) f'_{ii.gH}(a) \odot (s - a) \ominus (-1) f''_{ii.gH}(a) \odot \frac{(a - s)^2}{2!} \ominus (-1) \ldots \ominus (-1) f_{ii.gH}^{(n-1)}(a) \odot \frac{(a - s)^{n-1}}{(n-1)!} \ominus (-1) R_n(a, s),$$

به طوری که

$$R_n(a,s) := \int_a^s (\int_a^{s_1} \dots (\int_a^{s_{n-1}} f_{ii.gH}^{(n)}(s_n)ds_n)ds_{n-1} \dots)ds_1.$$

۳. اگر $\mathrm{f}^{(\mathrm{i})}, \mathrm{i} = 0,1,\dots,\mathrm{n}-1$ به ازای $i = 2k-1, k \in \mathbb{N}$ توابعی [(i)-gH]- دیفرانسیل پذیر و به ازای $\mathrm{i} = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ توابعی [(ii)-gH]- دیفرانسیل پذیر باشند، آن گاه

$$f(s) = f(a) \ominus (-1)f'_{ii.gH}(a) \odot (s-a) \oplus f''_{i.gH}(a) \odot \frac{(a-s)^2}{2!} \ominus (-1) \dots \odot (-1)f_{ii.gH}^{\left(\frac{i-1}{2}\right)}(a) \odot \frac{(a-s)^{\frac{i}{2}-1}}{\left(\frac{i}{2}-1\right)!} \oplus f_{i.gH}^{\left(\frac{i}{2}\right)}(a) \odot \frac{(a-s)^{\frac{i}{2}}}{\left(\frac{i}{2}\right)!} \ominus (-1) \dots \ominus (-1)R_n(a,s),$$

که درآن

$$R_n(a,s) := \int_a^s (\int_a^{s_1} \dots (\int_a^{s_{n-1}} f_{i.gH}^{(n)}(s_n)ds_n)ds_{n-1} \dots)ds_1.$$

۴. فرض کنید $f \in C_{gH}^n([a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{F}}), n \geq 3$ همچنین فرض کنید f در بازه $[a,\xi]$، [(i)-gH]- دیفرانسیل پذیر و در بازه $[\xi,b]$، [(ii)-gH]- دیفرانسیل پذیر باشد. (در واقع نقطه ξ نقطه سویچ نوع I برای مشتق مرتبه اول تابع f است) و نقطه $t_0 \in [a,\xi]$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که در همسایگی ξ قرار داشته باشد. علاوه براین مشتق مرتبه دوم تابع f در نقطه ζ_1 از بازه $[t_0,\xi]$ دارای نقطه سویچ نوع II باشد. سپس فرض کنید نوع مشتق پذیری $f^{(i)}, i \leq n$ در بازه $[\xi,b]$ تغییری نکند. آنگاه

$$f(s) = f(t_0) \oplus f'_{i.gH}(t_0) \odot (\xi - t_0) \ominus f''_{ii.gH}(t_0) \odot (t_0 - \zeta_1) \odot (\xi - t_0) \oplus f''_{i.gH}(\zeta_1) \odot \left(\frac{(\xi-\zeta_1)^2}{2} - \frac{(t_0-\zeta_1)^2}{2}\right) \ominus (-1)f'_{ii.gH}(\xi) \odot (s-\xi) \ominus (-1)f''_{ii.gH}(\xi) \ominus \frac{(s-\xi)^2}{2!}$$
$$\ominus (-1)\int_{t_0}^{\xi} (\int_{t_0}^{\zeta_1} (\int_{t_0}^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_4)ds_4)ds_2)ds_1 \oplus \int_{t_0}^{\xi} (\int_{\zeta_1}^{s_1} (\int_{\zeta_1}^{s_3} f'''_{i.gH}(s_5)ds_5)ds_3)ds_1 \ominus (-1)\int_{\xi}^{s} (\int_{\xi}^{t_1} (\int_{t_0}^{t_2} f'''_{ii.gH}(t_3)dt_3)dt_2)dt_1.$$

برهان در مرجع [۱].

۳- روش تقریب قطعه‌ای

معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه فازی به فرم

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)), & t \in I = [0,T], \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (6)$$

که مشتق به کار رفته در آن از نوع مشتق تعمیم یافته و تابع فازی $f: I \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی پیوسته می‌باشند، مفروض است.

در معادله دیفرانسیل فازی مفروض شرط وجود جواب از قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۱: فرض کنید $f: I \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابع فازی پیوسته باشد بطوریکه $k > 0$ ای موجود باشد بطوریکه
$D(f(t,x), f(t,z)) \leq kD(x,z)$
$\forall t \in I, x,z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

در این صورت مساله (۶) دارای دو جواب ([(i)- gH]-دیفرانسیل پذیر و [(ii)-gH]-دیفرانسیل پذیر) روی بازه I می‌باشد.[۱۳]

با فرض برقرار بودن شرایط قضیه فوق و وجود جواب برای مساله (۶) طریقه به دست آودرن جواب عددی برای معادله دیفرانسیل فازی (۶) که در حالت کلی به فرم یک چند جمله‌ای از درجه۳ می‌باشد به شرح ذیل می‌باشد.

ابتدا فرض کنید $y(t)$ جواب فازی واقعی مساله (۶) می‌باشد. ابتدا بازه جواب $[0,T]$ را به زیر بازه‌هایی به فرم $I_\nu = [kh,(k+1)h]$، که $\nu = 0,\cdots,n-1$ $h = \frac{T}{n}$، می‌باشد تبدیل می‌کنیم. بدون این که به کلیت مساله خللی وارد شود فرض می‌کنیم:

$y(t) \in C_{gH}^2([0,T],\mathbb{R}_{\mathcal{F}})$

جواب تقریبی که با $s(t)$ نشان می‌دهیم طی گام‌های زیر ساخته می‌شود.

گام اول: با فرض این‌که $y(t)$ و $y'(t)$، [(i)-gH]-دیفرانسیل پذیر و نوع دیفرانسیل پذیری روی بازه $[0,T]$ تغییر نکند، قطعه اول از تقریب $s(t)$ که با $s_0(t)$ نشان می‌دهیم به فرم زیر نوشته می‌شود

$$s_0(t) = y(0) \oplus y'_{i.gH}(0) \odot t \oplus y''_{i.gH}(0) \odot \frac{t^2}{2!} \oplus \alpha_0 \odot \frac{t^3}{3!}, \quad (7)$$

اگر $y(t)$ و $y'(t)$، [(ii)-gH]-دیفرانسیل پذیر و نوع دیفرانسیل پذیری روی بازه $[0,T]$ تغییر نکند در این صورت $s_0(t)$ به فرم

$$s_0(t) = y(0) \ominus (-1)t \odot y'_{ii.gH}(0) \ominus (-1)\frac{t^2}{2} \odot y''_{ii.gH}(0) \ominus (-1)\frac{t^3}{3!} \odot \alpha_0 \quad (8)$$

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که y'، [(i)-gH]-دیفرانسیل پذیر و y''، [(ii)-gH]-دیفرانسیل پذیر باشد، لذا

$$s_0(t) = y(0) \ominus (-1)t \odot y'_{ii.gH}(0) \oplus \frac{t^2}{2} \odot y''_{i.gH}(0) \ominus (-1)\frac{t^3}{3!} \odot \alpha_0 \quad (9)$$

که در روابط (۷)، (۸) و (۹) $0 \le t \le h$، $0 \le \xi \le h$ و ضریب $\alpha_0 = y'''_{i.gH}(0)(\xi)$ مجهول می‌باشد.

برای تعیین مقدار مجهول $\alpha_0 = (\alpha^-(r), \alpha^+(r))$ از این قاعده استفاده می‌کنیم که چون $s_0(t)$ جواب تقریبی از معادله (۶) می‌باشد لذا باید در معادله دیفرانسیل فازی صدق کند از این رو در نقطه $t = h$ خواهیم داشت

$$D(s_0'(h), f(h, s_0(h))) = 0,$$

با به کار گیری متر هاسدورف

$$(s_0^-)'(h,r) = f^-(s_0(h),r)),$$
$$(s_0^+)'(h,r) = f^+(s_0(h),r))$$

با جایگذاری مقدیر مربوط و حل دستگاه متناظر مقدار α_0 به دست می‌آید، لذا قطعه اول از تقریب یعنی $s_0(t)$ ساخنه می‌شود.

گام دوم: اکنون پس از ساختن قطعه اول تقریب در بازه $[0,h]$، نوبت ساختن تقریب روی بازه‌های $[kh,(k+1)h]$ برای $k = 1, \cdots, n-1$ می‌باشد که به فرم زیر می‌باشد

$$s(t) = \sum_{i=0}^{2} s_k^{(i)}(t) \odot \frac{(t-kh)^i}{i!} \oplus \alpha_k \odot \frac{(t-kh)^3}{3!} \quad (10)$$

که $s_0(t)$ از گام۱ به دست آمده است. در رابطه (۱۰) مقدار فازی α_k مجهول می‌باشد که برای به دست آمدن مقدار آن همانند آنچه در گام اول بیان شد با قرار دادن $t = kh$ در رابطه

$$D(s'(kh), f(kh, s(kh))),$$

و حل دستگاه حاصل مقدار مجهول به دست می‌آید.

لذا تقریب $s(t)$ روی بازه جواب $[0,T]$ ساخته می‌شود که این تقریب روی هر زیر بازه بصورت یک چندجمله‌ای از درجه ۳ می‌باشد.

قضیه: تقریب ذکر شده موجود و یکتاست به شرطی که $h < \frac{3}{L}$.

برهان: در بازه $[kh,(k+1)h]$، تراز بالا و پایین تقریب به فرم زیر می باشد

$$s_k^-(t,r) = \sum_{i=0}^{2} (s_{k-1}^-)^{(i)}(kh,r) \odot \frac{(t-kh)^i}{i!} \oplus \alpha_k^-(r) \odot \frac{(t-kh)^3}{3!} = A_k^-(t,r) \oplus \alpha_k^-(r) \odot \frac{(t-kh)^3}{3!},$$

$$s_k^+(t,r) = \sum_{i=0}^{2} (s_{k-1}^+)^{(i)}(kh,r) \odot \frac{(t-kh)^i}{i!} \oplus \alpha_k^+(r) \odot \frac{(t-kh)^3}{3!} = A_k^+(t,r) \oplus \alpha_k^-(r) \odot \frac{(t-kh)^3}{3!},$$

مقادیر $A_k^-(t,r)$ و $A_k^+(t,r)$ معلوم می‌باشند. اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که مقادیر $\alpha_k^-(r)$ و $\alpha_k^+(r)$ بصورت یکتا از روابط

$$(s^-)'((k+1)h,r) = f^-((k+1)h, s((k+1)h),r) \quad (11)$$

$$(s^+)'((k+1)h,r) = f^+((k+1)h, s((k+1)h),r) \quad (12)$$

به دست می‌آیند. با جایگذاری s_k^- , s_k^+ در (۱۱) و (۱۲) روابط زیر حاصل می‌گردد

$$\alpha_k^-(r) = \frac{2}{h^2}\{f^-((k+1)h, A_k^-((k+1)h) +\alpha_k^-(r)\frac{h^3}{3!}) - (A_k^-)'((k+1)h,r)\}, \quad (13)$$

$$\alpha_k^+(r) = \frac{2}{h^2}\{f^+((k+1)h, A_k^+((k+1)h,r) +\alpha_k^+(r)\frac{h^3}{3!}) - (A_k^+)'((k+1)h,r)\}, \quad (14)$$

برای مقادیر مجهول $\alpha_k^-(r)$ و $\alpha_k^+(r)$ نگاشت $g(\alpha_k)$ که

$$\alpha_k^- = g_{k,1}(\alpha_k^-),$$
$$\alpha_k^+ = g_{k,2}(\alpha_k^+),$$

و

$$\alpha_k = g(\alpha_k),$$
$$\alpha_k = (\alpha_k^-, \alpha_k^+)^T$$
$$g(\alpha_k) = (g_{k,1}, g_{k,2})^T,$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که

$$\| g(\alpha_k^1) - g(\alpha_k^2) \| \le \frac{hL}{3} \| \alpha_k^1 - \alpha_k^2 \|, \quad (15)$$

که L ثابت لیپ شیتس می‌باشد. بنابراین $g(\alpha_k)$ یک نگاشت انقباض قوی به ازای $h < \frac{3}{L}$ می‌باشد و حکم حاصل می‌گردد.

اکنون نشان می‌دهیم که مرتبه همگرایی روش ارائه شده از مرتبه ۴ می‌باشد.

قضیه۲: عدد ثابت K موجود است بطوری‌که $D(s(h), y(h)) < Kh^4$.

برهان: از تقریب به دست آمده داریم:

$$s^-(h,r) = y^-(0,r) + h(y^-)'(0,r) + \frac{h^2}{2!}(y^-)''(0,r) + \frac{h^3}{3!}\alpha_0^-, \quad (16)$$

$$s^+(h,r) = y^+(0,r) + h(y^-)'(0,r) + \frac{h^2}{2!}(y^+)''(0,r) + \frac{h^3}{3!}\alpha_0^+, \quad (17)$$

همچنین

$$y^-(h,r) = y^-(0,r) + h(y^-)'(0,r) + \frac{h^2}{2!}(y^-)''(0,r) + \frac{h^3}{3!}(y^-)'''(0,r) + \frac{h^4}{4!}(y^-)^{(4)}(\xi,r),$$

$$y^+(h,r) = y^+(0,r) + h(y^+)'(0,r) + \frac{h^2}{2!}(y^+)''(0,r) + \frac{h^3}{3!}(y^+)'''(0,r) + \frac{h^4}{4!}(y^+)^{(4)}(\xi,r),$$

که در روابط فوق $0 < \xi < h$ می‌باشد.

همچنین واضح است که

$$D\big(s(h), y(h)\big) = \frac{h^3}{3!}\sup_{r\in[0,1]} \max\{|\alpha_0^- -(y^-)'''(0,r) - \frac{1}{4}(y^-)^{(4)}(\xi,r)|, |\alpha_0^+ - (y^+)'''(0,r) - \frac{1}{4}(y^+)^{(4)}(\xi,r)|\}.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$D\big(s(h), y(h)\big) = \frac{h^3}{3!} D\left(\alpha_0, y'''(0) + \frac{1}{4}y^{(4)}(\xi)\right) \quad (18)$$

برای نشان دادن آنچه که در حکم مساله مورد نظر است باید نشان دهیم که α_0 تابعی بر حسب h و بطور یکنواخت کراندار می‌باشد.

داریم

$$\alpha_0^- = \frac{2!}{h^2}\{f(h, y^-(0,r) + h(y^-)'(0,r) + \frac{h^2}{2!}(y^-)''(0,r) + \frac{h^3}{3!}\alpha_0^-) - (y^-)'(0,r) - h(y^-)''(0,r),\},$$

$$\alpha_0^+ = \frac{2!}{h^2}\{f(h, y^+(0,r) + h(y^+)'(0,r) + \frac{h^2}{2!}(y^+)''(0,r) + \frac{h^3}{3!}\alpha_0^+) - (y^+)'(0,r) - h(y^+)''(0,r),\},$$

اکنون نگاشت $g_0(u)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g_0^-(u) = \frac{2!}{h}\{f(h, y^-(0,r) +h(y^-)'(0,r) + \frac{h^2}{2!}(y^-)''(0,r) + \frac{h^3}{3!}u^-) -(y^-)'(0,r) - h(y^-)''(0,r),\},$$

$$g_0^+(u) = \frac{2!}{h}\{f(h, y^+(0,r) +h(y^+)'(0,r) + \frac{h^2}{2!}(y^+)''(0,r) + \frac{h^3}{3!}u^+) -(y^+)'(0,r) - h(y^+)''(0,r),\},$$

نگاشت $g_0(u)$ یک نگاشت انقباض برای هر $h < 3/L,$ می‌باشد زیرا

$$D\big(g_0(u), g_0(u^*)\big) \leq \tfrac{hL}{3} D(u, u^*) \qquad (19)$$

مخصوصاً برای $h \leq 1/L$ داریم:

$$D(g_0(u_1), g_0(u_2)) \leq \frac{1}{3} D(u_1, u_2),$$

اکنون قرار می‌دهیم $u_1 = \alpha_0,\ u_2 = 0,$ لذا:

$$D(g_0(\alpha_0), g_0(0)) \leq \frac{1}{3} D(\alpha_0, 0)$$

$$D(g_0(\alpha_0),0) + D(g_0(0),0) \leq \frac{1}{3} D(\alpha_0, 0)$$

که نتیجه می‌شود

$$D(\alpha_0, 0) + D(g_0(0),0) \leq \frac{1}{3} D(\alpha_0, 0)$$

بنابراین:

$$D(\alpha_0, 0) \leq \tfrac{3}{2} D(g_0(0), 0) \qquad (20)$$

اکنون تقریب $g_0^-(0)$ و $g_0^+(0)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} g_0^-(0) &= \frac{2!}{h}\{f(h, y^-(0,r) + h(y^-)'(0,r) \\ &+ \frac{h^2}{2!}(y^-)''(0,r)) - (y^-)'(0,r) \\ &\qquad - h(y^-)''(0,r),\}, \\ &= \frac{2!}{h^2}\{(y^-)'(h,r) + O(h^3) - (y^-)'(0,r) \\ &\qquad - h(y^-)''(0,r))\}, \\ &= \frac{2!}{h^2}\{(y^-)'(0,r) + h(y^-)''(0,r) \\ &+ o(h^2) - (y^-)'(0,r) - h(y^-)''(0,r))\} \\ &\leq M_1, \end{aligned}$$

همچنین بطور مشابه می‌توان نتیجه گرفت

$$g_0^+(u) \leq M_2 \qquad (21)$$

اکنون قرار می‌دهیم $M = \max\{M_1, M_2\}$ بنابراین $D(\alpha_0, 0) < \frac{3}{2}M$ و α_0 برای $h \leq 1/L$ بطور یکنواخت کراندار می‌باشد و

$$D(s(h), y(h)) = o(h^3)$$

از طرفی $D(s'(h), y'(h)) = o(h^3)$ زیرا

$$\begin{aligned} &D(s'(h), y'(h)) \\ &= D(f(h, s(h)), f(h, y(h))) \\ &\leq LD(s(h), y(h)) < kLh^3 = K^* h^3, \end{aligned}$$

که $k^* = \max\{k, Lk\}$. می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} &(s^+)'(h,r) = (y')^+(h,r) + o(h^3) \\ &= (y^+)'(0,r) + h(y^+)''(0,r) \\ &+ \tfrac{h^2}{2!}(y^+)'''(0,r) + o(h^3), \qquad (22) \\ &(s^-)'(h,r) = (y')^-(h,r) + o(h^3) \\ &= (y^-)'(0,r) + h(y^-)''(0,r) \\ &+ \tfrac{h^2}{2!}(y^-)'''(0,r) + o(h^3), \qquad (23) \end{aligned}$$

با استفاده از تعاریف $(s')^+(h,r)$ و $(s')^-(h,r)$ داریم:

$$\begin{aligned} &s^+(h,r) = y^+(0,r) + h(y^-)'(0,r) \\ &+ \tfrac{h^2}{2!}(y^+)''(0,r) + \tfrac{h^3}{3!}\alpha_0^+, \qquad (24) \\ &s^-(h,r) = y^-(0,r) + h(y^-)'(0,r) \\ &+ \tfrac{h^2}{2!}(y^-)''(0,r) + \tfrac{h^3}{3!}\alpha_0^-,, \qquad (25) \end{aligned}$$

با ادغام روابط (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) داریم:

$$\alpha_0^- = (y_0^-)''' + o(h),$$
$$\alpha_0^+ = (y_0^+)''' + o(h),$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$D(s(h), y(h)) = o(h^4).$$

۴- مثال‌های عددی

مثال ۱: معادله دیفرانسیل فازی به فرم

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \oplus (1.3,2,2.1), \quad 0 \leq t \leq 1; \\ y(0) = (0.82 + 0.18r, 1.2 - 0.2r), \\ y'(0) = (2.12 + 0.88r, 3.3 - 0.3r), \\ y''(0) = (2.12 + 0.88r, 3.3 - 0.3r), \end{cases}$$

مفروض است.

جواب واقعی، [(i)-gH]-دیفرانسیل پذیر معادله داده شده بصورت

$$\begin{cases}(y_-)'(t;r) = y_-(t;r) + 1.3 + 0.7r,\\ (y^+)'(t;r) = y^+(t;r) + 2.1 - 0.1r,\\ y(0;r) = [0.82 + 0.18r, 1.2 - 0.2r],\end{cases}$$

می‌باشد.

اکنون با استفاده از روش قطعه‌ای چند جمله‌ای بیان شده و قرار دادن $h = 0.25$. $s_0(t)$ به دست می‌آید

$$s_0(t) = y(0) \oplus y'_{i.gH}(0) \odot t \oplus y''_{i.gH}(0) \odot \frac{t^2}{2} \oplus \alpha_0 \odot \frac{t^3}{6},$$

و برای $\nu = 1,2,3,$ داریم

$$s_\nu(t) = s_{\nu-1}(\nu h) \oplus s'_{\nu-1}(\nu h) \odot (t - \nu h) \oplus s''_{\nu-1}(\nu h) \odot \frac{(t-\nu h)^2}{2} \oplus \alpha_\nu \odot \frac{(t-\nu h)^3}{6} \qquad (26)$$

جواب دقیق و جواب تقریبی $s_i(t)$ برای $i = 0,1,2,3,$ در شکل‌های ۱،۲،۳ و ۴ نشان داده شده است.

مثال ۲: معادله دیفرانسیل فازی

$$\begin{cases} y_{ii}'(t) = -y(t) \oplus\odot\ (0.7,1,1.8), \quad 0 \le t \le 1,\\ y(0) = (r, 2.2 - 1.2r),\\ y'(0) = (-2.2 + 1.2r, -r),\\ y''(0) = (0.2r + 1.8, 2.9 - 0.9r),\end{cases}$$

مفروض است.

جواب واقعی $y(t)$ ، [(ii)-gH]-دیفرانسیل پذیر و بصورت

$$\begin{cases}(y_-)'(t;\alpha) = -y_-(t;\alpha) + t\ [1.8 - 0.8\alpha],\\ (y^+)'(t;\alpha) = -y^+(t;\alpha) + t\ [0.7 + 0.3\alpha],\\ y(0;\alpha) = [\alpha, 2.2 - 1.2\alpha]\end{cases}$$

می‌باشد. با استفاده از روش تقریب و $h = 0.25$ خواهیم داشت:

$$s_0(t) = y(0) \ominus (-1)y'_{ii.gH}(0) \odot t \oplus y''_{i.gH}(0) \odot \frac{t^2}{2} \ominus (-1)\alpha_0 \odot \frac{t^3}{6}, \qquad (27)$$

و برای $\nu =$ ۱،۲،۳,

$$s_\nu(t) = s_{\nu-1}(\nu h) \oplus s'_{\nu-1}(\nu h) \odot (t - \nu h) \oplus s''_{\nu-1}(\nu h) \odot \frac{(t-\nu h)^2}{2} \oplus \alpha_\nu \odot \frac{(t-\nu h)^3}{6} \qquad (28)$$

جواب واقعی و جواب تقریبی $s_i(t)$ برای $i = 0,1,2,3$ در شکل‌های ۵، ۶ ، ۷ و ۸ نشان داده شده است.

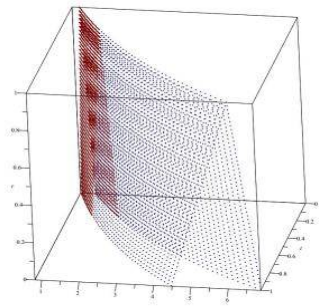
مقایسه بین تقریب ارائه شده و روش ارائه شده توسط الهویرنلو در مقاله [۶] در جدول ۱ نشان داده شده است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله روش عددی برای حل معادله دیفرانسیل فازی تحت مشتق تعمیم یافته ارائه گردید. در این تحقیق برای تقریب در هر زیر بازه از جواب از یک چند جمله‌ای از درجه ۳ با استفاده ازبسط تیلور فازی به دست آمده است. وجود، یکتایی و همگرایی جواب‌های به دست آمده از روش بیان گردید و نشان دادیم که مرتبه همگرایی روش فوق از مرتبه ۴ می‌باشد.

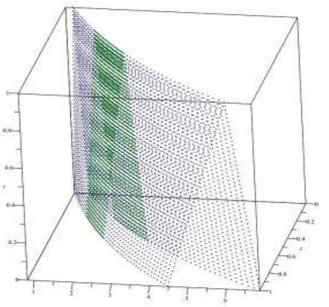
جدول ۱: مقایسه خطای حاصل از جواب به دست آمده از روش

t	خطای روش قطعه‌ای h=0.25	خطای روش الهویرنلو h=0.005
0	0	0
0.1	2.5334×10^{-5}	6.58119×10^{-4}
0.2	1.11585×10^{-4}	1.19083×10^{-3}
0.3	9.8167×10^{-5}	1.61606×10^{-3}
0.4	1.8666×10^{-5}	1.94945×10^{-3}
0.5	6.3174×10^{-5}	2.20464×10^{-3}
0.6	1.0778×10^{-5}	2.39351×10^{-3}
0.7	9.2513×10^{-5}	2.52638×10^{-3}
0.8	8.1174×10^{-5}	2.61220×10^{-3}
0.9	4.3971×10^{-5}	2.65874×10^{-3}
1	1.02016×10^{-4}	2.67269×10^{-3}



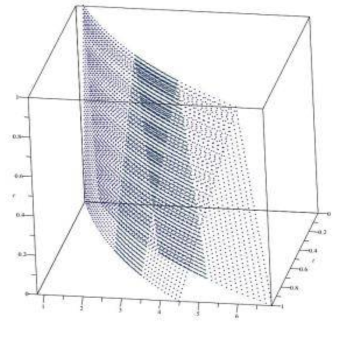
شکل ۱

مقایسه جواب واقعی و جواب حاصل از روش عددی ارائه شده.
خطوط بنفش جواب واقعی در کل بازه و خطوط قرمز جواب تقریبی.



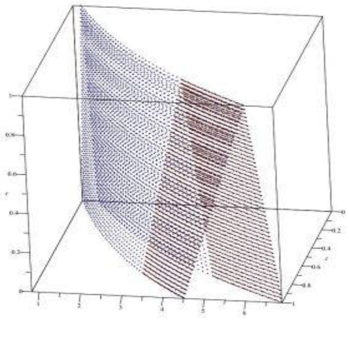
شکل۲

مقایسه جواب واقعی و جواب حاصل از روش عددی ارائه شده.
خطوط بنفش جواب واقعی در کل بازه و خطوط سبز جواب تقریبی.



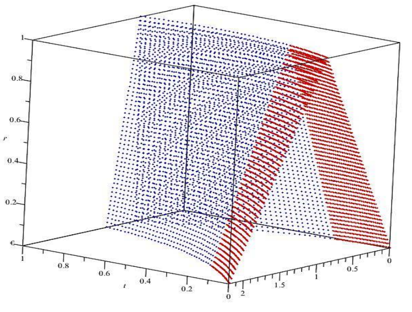
شکل ۳

مقایسه جواب واقعی و جواب حاصل از روش عددی ارائه شده.
خطوط بنفش جواب واقعی در کل بازه و خطوط آبی جواب تقریبی به ازای؛ $t \in [0.5, 075]$ در مثال ۱.



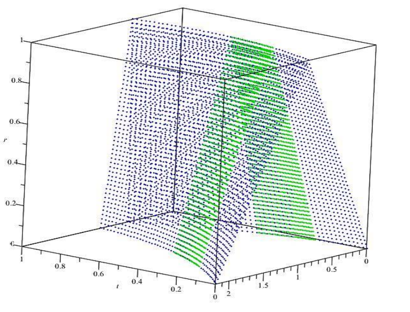
شکل ۴

مقایسه جواب واقعی و جواب حاصل از روش عددی ارائه شده.
خطوط بنفش جواب واقعی در کل بازه و خطوط قهوه‌ای جواب تقریبی به ازای؛ $t \in [0.75, 1]$ در مثال ۱.



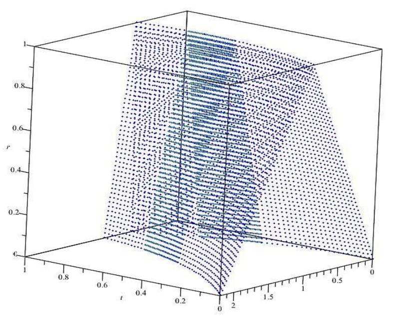
شکل ۵

مقایسه جواب واقعی و جواب حاصل از روش عددی ارائه شده.
خطوط بنفش جواب واقعی در کل بازه و خطوط قرمز جواب تقریبی به ازای؛ $t \in [0, 0.25]$ در مثال ۲



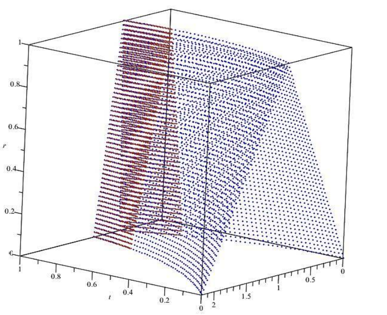
شکل ۶

مقایسه جواب واقعی و جواب حاصل از روش عددی ارائه شده.
خطوط بنفش جواب واقعی در کل بازه و خطوط سبز جواب تقریبی به ازای؛ $t \in [0.25, 0.5]$ در مثال ۲



شکل ۷

مقایسه جواب واقعی و جواب حاصل از روش عددی ارائه شده.
خطوط بنفش جواب واقعی در کل بازه و خطوط آبی جواب تقریبی به ازای؛ $t \in [0.5, 0.75]$ در مثال ۲



شکل ۸

مقایسه جواب واقعی و جواب حاصل از روش عددی ارائه شده.
خطوط بنفش جواب واقعی در کل بازه و خطوط قهوه‌ای جواب تقریبی به ازای؛ $t \in [0.75, 1]$ در مثال ۲

فهرست مراجع

[1] T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand, "A full fuzzy method for solving differential equation based on Taylor expansion", Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 29 (2015) 1039–1055 DOI:10.3233/IFS-151713.

[2] S.L. Chang, L.A. Zadeh, On fuzzy mapping and control, IEEE Trans, Systems Man Cybernet. 2 (1972) 30-34.

[3] D. Dubois, H. Prade, Towards fuzzy differential calculus: Part 3, differentiation, Fuzzy Sets and Systems. 8 (1982) 225-233.

[4] M. L. Puri, D.A. Ralescu, Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. App. 91 (1983) 552-558.

[5] R. Goetschel and W. Voxman, Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987), 31-43.

[6] M. Hukuhara, Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convex, Funkcial. Ekvac. 10 (1967)205-229.

[7] O. Kaleva, Fuzzy differential equations. Fuzzy Sets Syst. 24 (1987) 319-330.

[8] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, Numerical Solutions of Fuzzy Differential Equations By Taylor Method, Journal of Computational Methods in Applied Mathematics 2 (2002) 113-124.

[9] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, N. Ahmady and E. Ahmady, Improved predictor-corrector method for solving fuzzy initial value problems, Information Sciences 179 (2009)945-955.

[10] T. Allahviranloo, N.Ahmady, E.Ahmady, Numerical solution of fuzzy differential equations by Predictor-Corrector method, Information Sciences, 177/7 (2007) 1633-1647.

[11] M. Ma, M. Friedman, A. Kandel, Numerical Solutions of fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems. 105 (1999) 133-138.

[12] B. Bede and S. G. Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy Set and Systems 151(2005)581-599.

[13] B. Bede and L. Stefanini, Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, Fuzzy Sets and Systems 230 (2013)119-141.

[14] B. Bede and L. Stefanini, Solution of Fuzzy Differential Equations with generalized differentiability using LU-parametric representation, EUSFLAT 1(2011)785- 790.

[15] B. Bede and S. G. Gal, Remark on the new solutions of fuzzy differential equations, Chaos Solitons Fractals (2006).

[16] M.R. Balooch Shahryari, S. Salahshour, Improved predictor-corrector method for solving fuzzy differential equations under generalized differentiability, Journal of Fuzzy Set Value Analysis, 2012, (2012) 1-16.

[17] Y. Chalco-Cano, H. Roman-Flores, On new solution of fuzzy diffeential equations, Chaos Solitons and Fractals. 38 (2006) 112-115.

[18] T. Allahviranloo, N.Ahmady, E.Ahmady, Erratum to "Numerical solution of fuzzy differential equations by Predictor-Corrector method", Information Sciences, 178 (2008) 1780-1782.

[19] M. Chen, C. Wu, X. Xue, G. Liu, On fuzzy boundary value problems, Information Sciences, 178 (2008) 1877-1892.

[20] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems. 24 (1987) 319-330.