دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره ششم، تابستان ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دسته‌بندی درخت‌ها با عدد رومی بزرگ

حسین عبداله‌زاده آهنگر[۱*]، مهلا خیبری[۲]، نادر جعفری راد[۳]

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران
[۳] گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۳/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۶/۲۷

چکیده

تابع $f: V(G) \to \{0,1,2\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی (RDF) برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه برای هر راس u با شرط $f(u) = 0$ راسی مجاور با آن مانند v وجود داشته باشد به‌طوری که $f(v) = 2$. وزن یک RDF f برابر است با $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$. عدد احاطه‌گر رومی گراف G را که با نماد $\gamma_R(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک RDF در گراف G است. در این مقاله کلیه درخت‌های از مرتبه n با عدد احاطه‌گر رومی $n - 3$، را دسته بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: تابع احاطه‌گر رومی، عدد احاطه‌گر رومی

*. ha.ahangar@nit.ac.ir

مقدمه

برای اصطلاحات و نمادهای نظریه گراف که در این‌جا ارایه نشده است، خواننده را به [6,7] ارجاع می‌دهیم. در این مقاله، G گرافی است با مجموعه راس‌های $V = V(G)$ و مجموعه یال‌های $E = E(G)$. مرتبه گراف G را با $|V| = n$ و اندازه گراف G را با $|E| = m$ نشان می‌دهیم. برای راس v مجموعه‌ی همه راس‌هایی که با راس v مجاورند را همسایگی باز راس v نامیده و به‌صورت $N(v)$ نشان می‌دهیم و همسایگی بسته‌ی راس v، را به‌صورت $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ تعریف می‌کنیم. همسایگی باز $S \subseteq V$ برابر است با مجموعه $N(S) = \cup_{v\in S} N(v)$ و همسایگی بسته آن برابر است با مجموعه $N[S] = N(S) \cup (S)$. درجه راس $v \in V(G)$ برابر است با $deg_G(v) = \deg(v) = |N(v)|$. همچنین مینیمم درجه و ماکسیمم درجه یک گراف به ترتیب با $\delta = \delta(G)$ و $\Delta = \Delta(G)$ معرفی می‌شوند. منظور از یک برگ یک راس از درجه یک می‌باشد و راس تکیه‌گاهی راسی مجاور به برگ است. مجموعه برگ‌ها و راس‌های تکیه‌گاهی را به ترتیب با $L(G)$ و $S(G)$ نشان می‌دهیم و همچنین نماد L_v را برای مجموعه همه برگ‌هایی که متصل به راس v هستند معرفی می‌کنیم. منظور از K_n گراف کامل از مرتبه n، C_n دور به طول n و P_n مسیر به طول $n-1$ می‌باشد. گراف بدست آمده از گراف H با الصاق یک برگ به هر راس آن را با $cor(H)$ نمایش می‌دهیم.

زیرگراف القاء شده توسط یک مجموعه S در گراف G را با $G[S]$ نشان می‌دهند. به بزرگترین خروج از مرکز راس‌ها در یک گراف قطر گراف گویند و با $diam(G)$ نشان می‌دهند. کمر گراف G طول کوتاهترین دور در آن گراف می‌باشد و با $girth(G)$ نشان می‌دهند. اگر گراف G شامل دور نباشد، کمر آن را ∞ تعریف می‌کنیم. طول کوتاه‌ترین مسیر از راس u به راس v در گراف G را فاصله‌ی u از v نامیده و با $d(u, v)$ نشان می‌دهیم. مجموعه $A \subseteq V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر نامیده می‌شود هرگاه $N[A] = V(G)$. عدد احاطه‌گر گراف G که با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود برابر با تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر است که کمترین تعداد عضو ممکن را دارد. هر مجموعه احاطه‌گر با مینیمم تعداد عضو را با $\gamma(G)$- مجموعه نشان می‌دهیم.

تابع $f: V(G) \to \{0,1,2\}$، یک تابع احاطه‌گر رومی (RDF) برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه برای هر راس u با شرط $f(u) = 0$ راسی مجاور با u مانند v وجود داشته باشد به‌طوری که $f(v) = 2$. وزن یک RDF f برابر است با $w(f) = \sum_{v\in V} f(v)$. عدد احاطه‌گر رومی گراف G که با نماد $\gamma_R(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک RDF در گراف G است. به عبارت دیگر $\gamma_R(G) = \min\{w(f) |$ RDF یک f که $\}$. منظور از یک $\gamma_R(G)$- تابع یک RDF می‌باشد که دارای وزن $\gamma_R(G)$ است. مفهوم احاطه‌گری رومی توسط کوکائین [4] معرفی شده است. برای مطالعه بیشتر خواننده را به [2, 5, 8, 9, 10, 11, 12] ارجاع می‌دهیم.

گراف‌های از مرتبه n با عدد احاطه‌گری رومی n در [4] دسته‌بندی شده‌اند. هم‌چنین گراف‌های از مرتبه n با عدد احاطه‌گری رومی $n-1$ و $n-2$ نیز در مقاله [1] دسته‌بندی شده‌اند. در این مقاله درخت‌های از مرتبه n با عدد احاطه‌گری رومی $n-3$ را دسته‌بندی می‌کنیم.

در این مقاله از نتایج مفید زیر استفاده می‌کنیم:

قضیه الف: [3] برای هر دور و مسیر از مرتبه n داریم
$\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$.

فرض کنید $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^{6} \mathcal{H}_i$، به‌طوری که $\mathcal{H}_i$ها خانواده‌ای از گراف‌ها هستند که در مقاله [1] معرفی شده‌اند.

قضیه ب: [1] فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n باشد. در این‌صورت $\gamma_R(G) = n-2$ اگر و تنها اگر $G \in \{P_6, P_7, P_8, C_6, C_7, C_8, K_4, K_{3,3}, cor(C_4)\} \cup \mathcal{F}$.

دسته‌بندی درخت‌ها با عدد رومی بزرگ

ابتدا چندین لم کلیدی ارائه می‌دهیم.

لم ۱: اگر G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 6$ با $\Delta(T) \geq 5$ باشد، آن‌گاه $\gamma_R(G) \leq n-4$.

اثبات: فرض کنید که x یک راس از درجه‌ی $\Delta(G)$ و $N(x) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{\Delta(G)}\}$ باشد. حال تابع $f: V(G) \to \{0,1,2\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم:

$f(x) = 2$، $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$ و برای هر $y \in V(G) - N[x]$، $f(y) = 1$. واضح است که f یک RDF برای گراف G با وزن حداکثر $n - 4$ می‌باشد. در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

لم ۲: اگر G گرافی از مرتبه n و $diam(G) \geq 11$ باشد، آنگاه $\gamma_R(G) \leq n - 4$.

اثبات: فرض کنید $f: V(G) \to \{0,1,2\}$ یک γ_R-تابع برای گراف G، $P: x_1 x_2 \dots x_{diam(G)+1}$ یک مسیر قطری باشد و $diam(G) \geq 11$. در این صورت

$$f = (\{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_9, x_{10}, x_{12}\}, V(T) - \{x_1, \dots, x_{12}\}, \{x_2, x_5, x_8, x_{11}\})$$

یک RDF برای گراف G با وزن حداکثر $n - 4$ می‌باشد که به‌این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

لم ۳: اگر درخت T از مرتبه n و شامل دو راس u و v از درجه‌ی حداقل ۳ باشد به‌طوری که $d(u,v) \geq 3$، آن‌گاه $\gamma_R(G) \leq n - 4$ است.

اثبات: فرض کنید u و v دو راس از درجه حداقل سه در درخت T باشند به طوری که $d(u,v) \geq 3$. در این صورت

$$f = (N(u) \cup N(v), V(G) - (N[u] \cup N[v]), \{u, v\})$$

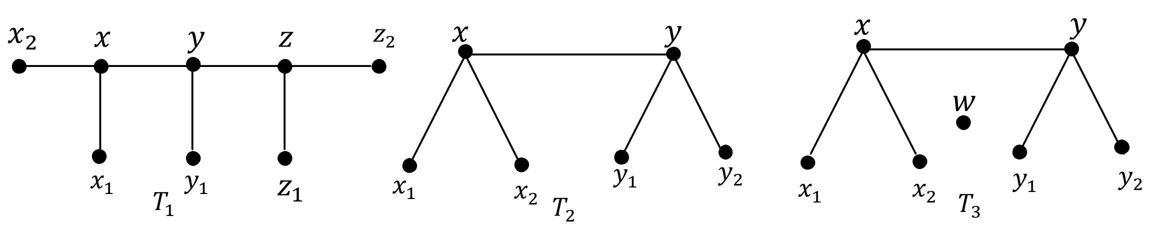
یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n - 4$ می‌باشد. در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

لم ۴: اگر T درختی از مرتبه $n \geq 12$ باشد، که شامل چهار راس غیر برگ x، y، z و t باشد به‌طوری که $N(x) \cap N(y) \cap N(z) \cap N(t) = \emptyset$ آن‌گاه

$$\gamma_R(T) \leq n - 4.$$

اثبات: کافیست تابع f را به‌صورت زیر تعریف کنیم: $f(x) = f(y) = f(z) = f(t) = 2$، برای هر راس $w \in N(x) \cup N(y) \cup N(z) \cup N(t)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه‌ی راس‌های درخت T وزن ۱ را در نظر می‌گیریم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n - 4$ می‌باشد. در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

در این قسمت چند خانواده از درخت‌ها را معرفی می‌کنیم که در بیان نتیجه اصلی به آن‌ها نیاز داریم:



شکل ۱: زیر درخت‌های T_1، T_2 و T_3.

$\mathcal{T}_1$ خانواده‌ای از درخت‌ها شامل T_1 است که از زیرتقسیم بعضی از یال‌های آویزان T_1 حاصل می‌شود، به شرط آن‌که اگر یکی از یال‌های آویزان در x یا z دوبار زیر تقسیم شود، آن‌گاه یال آویزان دیگر در آن راس زیرتقسیم نمی‌شود.

$\mathcal{T}_2$ خانواده‌ای از درخت‌ها شامل T_2 است که از زیرتقسیم حداقل ۲ و حداکثر ۴ بار بعضی از یال‌های آویزان در x یا y حاصل می‌شود، به طوری که یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

(الف) اگر یالی ۳ یا ۴ بار زیر تقسیم شود آن‌گاه هر یال آویزان دیگر حداکثر یک‌بار زیر تقسیم می‌شود.

(ب) اگر یال آویزانی در x و یال آویزان دیگری در y دوبار زیر تقسیم شوند، آن‌گاه حداقل یکی از یال‌های آویزان در x یا y زیر تقسیم نمی‌شود.

$\mathcal{T}_3$ خانواده‌ای از درخت‌ها شامل T_3 است که از زیرتقسیم بعضی از یال‌های آویزان T_3 حاصل می‌شود، به طوری که اگر یال آویزانی در x و یال آویزان دیگری در y دوبار زیر تقسیم شوند، آن‌گاه یال‌های آویزان در x و y زیر تقسیم نمی‌شوند.

$\mathcal{T}_4$ خانواده‌ای از درخت‌ها شامل $T_4 \cong K_{1,3}$ است که از زیرتقسیم حداقل دوبار بعضی از یال‌های آویزان T_4 حاصل می‌شود، به طوری که یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

(الف) اگر یال آویزانی ۵ بار زیرتقسیم شود، آن‌گاه هر یال آویزان دیگر حداکثر یک‌بار زیر تقسیم می‌شود یا یک یال آویزان دوبار و یال آویزان دیگر زیر تقسیم نمی‌شود.

(ب) اگر یال آویزانی ۴ بار زیر تقسیم شود، آن‌گاه یکی از یال‌ها حداکثر دوبار زیر تقسیم می‌شود.

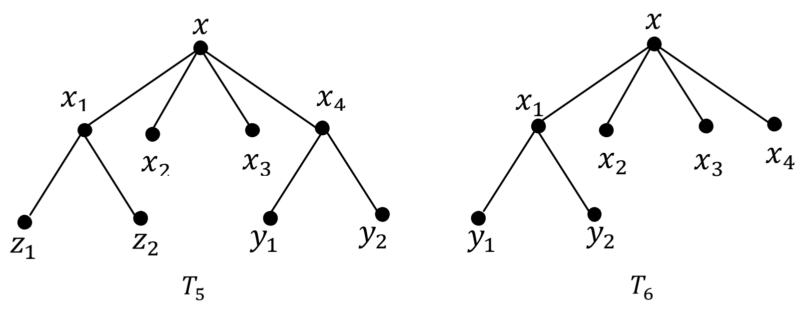
(پ) اگر یکی از یال‌های آویزان ۳ بار زیر تقسیم شود، آن‌گاه هر یال آویزان دیگر حداکثر ۲ بار زیر تقسیم می‌شوند.

(ت) حداقل دو یال آویزان دوبار زیر تقسیم می‌شوند.

$\mathcal{T}_5$ خانواده‌ای از درخت‌ها شامل T_5 است که از زیر تقسیم هر برگ T_5 حداکثر یک بار به‌دست می‌آید.

$\mathcal{T}_6$ خانواده‌ای از درخت‌ها شامل T_6 است به‌طوری که حداکثر یکی از برگ‌های در راس از درجه $\Delta(T)$ دو بار زیر تقسیم و بقیه برگ‌ها حداکثر یک بار زیر تقسیم شوند.

$\mathcal{T}_7$ خانواده‌ای از درخت‌ها شامل $T_7 = K_{1,4}$ است به‌طوری که هر برگ آن حداکثر دوبار زی تقسیم شود و اگر سه برگ آن دوبار زیرتقسیم شوند، آن‌گاه برگ دیگر زیر تقسیم نشود.



شکل ۲: زیر درخت‌های T_5 و T_6

حال قضیه اصلی مقاله را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۵: فرض کنید T درختی از مرتبه n باشد. در این‌صورت $\gamma_R(T) = n - 3$ است اگر و تنها اگر $T \in \bigcup_{i=1}^{7} \mathcal{T}_i \cup \{P_9, P_{10}, P_{11}\}$.

اثبات: فرض کنید $f: V(T) \to \{0,1,2\}$ یک γ_R-تابع برای درخت T و $P: x_1x_2 \dots x_{diamT+1}$ یک مسیر قطری برای درخت T باشد. با توجه به **لم ۲**، داریم $diam(T) \leq 10$. از طرف دیگر، با توجه به **لم ۱** داریم $\Delta(T) \leq 4$. حالت‌های زیر را بر اساس $\Delta(T)$ در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: $\Delta(T) = 2$.

با توجه به **قضیه الف**، واضح است که برای $n \leq 7$، $\gamma_R(P_n) \neq n - 3$ می‌باشد. بنابراین به وضوح $T \in \{P_9, P_{10}, P_{11}\}$.

حالت ۲: $\Delta(T) = 3$.

ابتدا ادعاهای زیر را ثابت می‌کنیم.

ادعا ۱: درخت T حداکثر سه راس از درجه‌ی $\Delta(T)$ دارد.

اثبات: با توجه به **لم** ۳، فاصله هر دو راس از درجه‌ی حداقل ۳، حداکثر ۲ می‌باشد. فرض کنید u و v دو راس از درجه‌ی حداقل ۳ باشند و w راس میانی این دو راس باشد. با استفاده مجدد از **لم** ۳، به سادگی می‌توان دید که هر راس از درجه‌ی حداقل ۳ باید در $N[w]$ باشد. از طرف دیگر اگر راسی از درجه‌ی حداقل ۳ در $N(w)$ باشد، آن‌گاه به سادگی قابل بررسی است که $\gamma_R(G) \leq n - 4$، که تناقض است. بنابراین نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

با توجه به **لم ۳ و ادعا ۱**، یکی از زیردرخت‌های T_1، T_2، T_3 یا $T_4 \cong K_{1,3}$ برحسب ماکزیمم تعداد راس‌های از درجه‌ی $\Delta(T)$ را داریم، با این شرط که هر راس $V(T) - \{x, y, z\}$ از درجه ۲ یا برگ است. زیرحالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

زیرحالت ۲-۱: درخت T دقیقاً سه راس از درجه‌ی $\Delta(T)$ دارد.

با توجه به **ادعا ۱**، به آسانی مشاهده می‌شود که سه راس از درجه‌ی $\Delta(T)$ مجاور هم قرار دارند. فرض کنید که x، y و z سه راس مجاور از درجه‌ی $\Delta(T)$ باشند به‌طوری که $N(x) = \{x_1, x_2, y\}$، $N(y) = \{x, z, y_1\}$ و $N(z) = \{z_1, z_2, y\}$. **لم۴**، نتیجه می‌دهد که هر یال آویزان از زیر درخت T_1 حداکثر دوبار زیر تقسیم می‌شود. حال نشان می‌دهیم که تنها یک یال آویزان در راس‌های x و z می‌تواند حداکثر دو بار زیرتقسیم شود. فرض (خلف) کنید که دو یال آویزان از زیر درخت T_1 دوبار زیر تقسیم شوند. اگر یال‌های آویزان xx_1 و yy_1 دوبار زیر تقسیم شوند، آن‌گاه با به‌کارگیری **لم ۴**، داریم $\gamma_R(T) \leq n - 4$، که تناقض است. حال فرض کنید یال‌های آویزان xx_1 و xx_2 (به‌طور مشابه یال‌های آویزان zz_1 و zz_2 یا یال‌های آویزان xx_1 و zz_1) دوبار زیر تقسیم شوند. در این‌صورت مسیرهای $P_1: xw_1w_2x_1$ و $P_2: xw_3w_4x_2$ در درخت T وجود دارند. حال تابع f را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم: $f(z) = f(w_2) = f(w_4) = 2$، برای هر راس $w \in N(z) \cup N(w_2) \cup N(w_4)$، $f(w) = 0$ و به بقیه راس‌های درخت T وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم، در این‌صورت f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n - 4$ می‌باشد، که تناقض است. اگر یال آویزان yy_1 دوبار زیر تقسیم شود، به‌سادگی می‌توان یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n - 4$ یافت، که تناقض است. بنابراین یال آویزان yy_1 حداکثر یک‌بار زیر تقسیم می‌شود. در نهایت نشان می‌دهیم که اگر یکی از یال‌های آویزان در راس‌های x یا z دوبار زیر تقسیم شود، آن‌گاه یال‌های آویزان دیگر در گراف T برگ می‌باشند. در غیر این‌صورت به‌سادگی مشابه قبل می‌توان یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n - 4$ یافت، که تناقض می‌باشد. در نتیجه $T \cong \mathcal{T}_1$.

زیرحالت ۲-۲: درخت T دقیقاً دو راس از درجه‌ی $\Delta(T)$ دارد.

فرض‌کنید xو y دو راس از درجه‌ی$\Delta(T)$ باشند. دوحالت اتفاق می‌افتد. (الف) $xy \in E(T)$ یا (ب) $xy \notin E(T)$.

بررسی حالت (الف): با توجه به **قضیه ب** حداقل یکی از برگ‌های T_2 حداقل دوبار زیرتقسیم می‌شود. حال نشان می‌دهیم که هر یال آویزان زیر درخت T_2، حداکثر ۴ بار زیر تقسیم می‌شود. فرض خلف کنید که چنین نباشد، لذا مسیر $P: xw_1w_2w_3w_4w_5x_1$ در درخت T وجود دارد. در این‌صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$f(w_5) = f(w_2) = f(y) = 2$، برای هر راس $w \in N(w_5) \cup N(w_2) \cup N(y)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های گراف وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. در این‌صورت f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n-4$ می‌باشد، که تناقض است.

ادعا ۲: اگر یالی ۳ یا ۴ بار زیر تقسیم شود آن‌گاه هر یال آویزان دیگر حداکثر یک‌بار زیر تقسیم می‌شود.

اثبات: فرض خلف کنید که یال آویزانی از زیر درخت T_2، ۳ بار زیر تقسیم شود و حداقل یک یال آویزان دیگر حداقل دوبار زیرتقسیم شود. بدون از دست دادن کلیت مسئله، مسیرهای $P_1: xw_1w_2w_3x_1$ و $P_2: xz_1z_2x_2$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$f(w_3) = f(z_2) = f(y) = 2$، برای هر راس $w \in N(w_3) \cup N(z_2) \cup N(y)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های گراف وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n-4$ می‌باشد، که تناقض است.

با به‌کارگیری **لم ۴** ادعای زیر به آسانی اثبات می‌شود.

ادعا ۳: اگر یال آویزانی در x و یال آویزان دیگری در y دوبار زیر تقسیم شوند، آن‌گاه حداقل یکی از یال‌های آویزان در x یا y زیر تقسیم نمی‌شود.

با توجه به **قضیه ب** حداقل یک یال آویزان در x و y باید دوبار زیرتقسیم شود. حال نشان می‌دهیم اگر دو یال آویزان در x و y دوبار زیر تقسیم شوند، آن‌گاه آن دو یال آویزان در یک راس تکیه‌گاهی مشترک واقع نیستند. فرض (خلف) کنید که دو یال آویزان که در یک راس تکیه‌گاهی واقع هستند، را دوبار زیرتقسیم کنیم، مثلاً یال آویزان در x. در این‌صورت مسیرهای $xw_1w_2x_1$ و $xz_1z_2x_2$ در درخت T وجود دارند. حال تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$f(w_2) = f(z_2) = f(y) = 2$، برای هر راس $w \in N(w_2) \cup N(z_2) \cup N(y)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های گراف وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n-4$ می‌باشد، که تناقض است.

بنابراین با توجه به مفروضات بالا و **ادعاهای ۲ و ۳** داریم: $T \cong \mathcal{T}_2$.

بررسی حالت (ب):

با به‌کارگیری **لم ۴** ادعای زیر به آسانی اثبات می‌شود.

ادعا ۴: اگر یال آویزانی در x و یال آویزان دیگری در y دوبار زیر تقسیم شوند، آن‌گاه یال‌های آویزان در x و y زیر تقسیم نمی‌شوند.

با استدلالی مشابه حالت قبل، می‌توان ثابت کرد که اگر دو یال آویزان که در یک راس تکیه‌گاهی واقع هستند، را دوبار زیرتقسیم کنیم، آن‌گاه $\gamma_R(T) \leq n-4$، که تناقض است. بنابراین با توجه به مفروضات بالا و **ادعا ۴** داریم: $T \cong \mathcal{T}_3$.

زیرحالت ۲-۳: دقیقاً یک راس از درجه‌ی $\Delta(T)$ باشد.

ادعا ۵: اگر یال آویزانی ۵ بار زیرتقسیم شود، آن‌گاه هر یال آویزان دیگر حداکثر یک‌بار زیر تقسیم می‌شود یا یک یال آویزان دوبار زیرتقسیم می‌شود و یال آویزان دیگر زیر تقسیم نمی‌شود.

اثبات: اگر یال آویزانی دوبار زیرتقسیم شود، آن‌گاه به وضوح با استفاده **لم ۴** یال آویزان دیگر زیرتقسیم نمی‌شود.

با به‌کارگیری **لم ۴** ادعای زیر به آسانی اثبات می‌شود.

ادعا ۶: اگر یال آویزانی ۴ بار زیرتقسیم شود، آن‌گاه یکی از یال‌ها حداکثر دوبار زیر تقسیم می‌شود.

ادعا ۷: اگر یال آویزانی ۳ بار زیر تقسیم شود، آن‌گاه هر یال آویزان دیگر حداکثر ۲ بار زیر تقسیم می‌شود.

اثبات: فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. لذا مسیرهای $P_1: xw_1w_2w_3x_1$ و $P_2: xz_1z_2z_3x_2$ در درخت T

وجود دارند. در این‌صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.
$f(z_3) = f(x) = f(w_3) = 2$، برای هر راس $w \in N(x) \cup N(w_3) \cup N(z_3)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های گراف وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n-4$ می‌باشد، که تناقض است.
با به‌کارگیری **قضیه ب** ادعای زیر به آسانی اثبات می‌شود.

ادعا ۸: حداقل دو یال آویزان دوبار زیر تقسیم می‌شوند.
بنابراین با توجه به مفروضات بالا و **ادعاهای ۵، ۶، ۷، و ۸** داریم: $T \cong \mathcal{T}_4$.

حالت ۳: $\Delta(T) = 4$.

ادعا ۹: درخت T دقیقاً یک راس از درجه‌ی $\Delta(T)$ دارد.

اثبات: فرض (خلف) کنید که حداقل دو راس x و y از درجه‌ی $\Delta(T)$ باشند. در این‌صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.
$f(x) = f(y) = 2$، برای هر راس $w \in N(x) \cup N(y)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های گراف وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n-4$ می‌باشد، که تناقض است.

ادعا ۱۰: اگر $\deg(x) = 4$ باشد، آن‌گاه برای هر راس y که $\deg(y) = 3$ داریم $d(x,y) = 1$.

اثبات: فرض (خلف) کنید برای راسی مانند y که $\deg(y) = 3$ داریم $d(x,y) \geq 2$. در این‌صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.
$f(x) = f(y) = 2$، برای هر راس $w \in N(x) \cup N(y)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های گراف وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n-4$ می‌باشد، که تناقض است.
فرض کنید $N(x) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. با بکارگیری **ادعا۱۰**، به آسانی نتیجه می‌گیریم که هر راس از درجه‌ی ۳ در $N(x)$ می‌باشد. از طرف دیگر واضح است‌که حداکثر ۲ راس از $N(x)$ از درجه‌ی ۳ هستند. لذا زیرحالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

زیرحالت ۳-۱: دقیقاً دو راس از $N(x)$ از درجه‌ی ۳ باشند.
نشان می‌دهیم که هر برگ در T_5 حداکثر یک‌بار زیر تقسیم می‌شود. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد و یکی از یال‌های T_5 دوبار زیر تقسیم شود. پس یکی از مسیرهای $P_1: x_1w_1w_2y_1$ یا $P_2: xz_1z_2y_3$ در درخت T وجود دارد. اگر مسیر P_1 وجود داشته باشد، در این‌صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.
$f(w_2) = f(x) = 2$، برای هر راس $w \in N(x) \cup N(w_2)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های درخت T وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n-4$ می‌باشد، که تناقض است.
اگر مسیر P_2 وجود داشته باشد، در این‌صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.
$f(z_2) = f(x_1) = f(x_2) = 2$، برای هر راس $w \in N(x_1) \cup N(x_2) \cup N(z_2)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های درخت T وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n-4$ می‌باشد، که تناقض است.
با توجه به مفروضات بالا، نتیجه می‌گیریم که $T \cong \mathcal{T}_5$.

زیرحالت ۳-۲: تنها یک راس از $N(x)$ از درجه‌ی ۳ باشد.
ادعاهای زیر را ثابت می‌کنیم:

ادعا ۱۱: هر یال آویزان در x_1، حداکثر یک‌بار زیر تقسیم می‌شود.

اثبات: فرض (خلف) کنید که حداقل ۲ یال آویزان در x_1، دوبار زیر تقسیم شوند. لذا مسیر $P_1: x_1w_1w_2y_1$ در درخت T وجود دارد. در این‌صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$f(x) = f(w_2) = 2$، برای $w \in N(x) \cup N(w_2)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های درخت T وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n - 4$ می‌باشد، که تناقض می‌باشد.

ادعا ۱۲: حداکثر یکی از یال‌های آویزان در x، دوبار زیر تقسیم می‌شود.

اثبات: فرض (خلف) کنید که حداقل ۲ یال آویزان در x، دوبار زیر تقسیم شوند. لذا مسیرهای $P_1: xw_1w_2x_2$ و $P_2: xz_1z_2x_3$ در درخت T وجود دارند. در این‌صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$f(z_2) = f(x_1) = f(w_2) = 2$، برای هر راس $w \in N(x_1) \cup N(w_2) \cup N(z_2)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های درخت T وزن ۱ را اختصاص می-دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n - 4$ می‌باشد، که تناقض می‌باشد.

با توجه به **ادعاهای ۱۱ و ۱۲**، نتیجه می‌گیریم که $T \cong \mathcal{T}_6$.

زیرحالت ۳-۳: درخت T هیچ راس از درجه‌ی ۳ نداشته باشد.

به‌وضوح درخت T شامل $T_7 = K_{1,4}$ می‌باشد و تمام راس‌های گراف بجز راس مرکزی T_7 از درجه‌ی ۲ می‌باشند. ادعاهای زیر را بررسی می‌کنیم:

ادعا ۱۳: هر یال آویزان دوبار زیر تقسیم می‌شود.

اثبات: فرض (خلف) کنید که چنین نباشد و یال آویزانی از T_7، سه‌بار زیرتقسیم شود. لذا مسیر $P_1: xw_1w_2w_3x_1$ در درخت T وجود دارد. در این صورت تابع f با ضابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$f(x) = f(w_3) = 2$، برای هر راس $w \in N(x) \cup N(w_3)$، $f(w) = 0$ و برای بقیه راس‌های درخت T وزن ۱ را اختصاص می‌دهیم. واضح است‌که f یک RDF برای درخت T با وزن حداکثر $n - 4$ می‌باشد، که تناقض است.

هم‌چنین با به‌کارگیری **لم ۴** ادعای زیر به آسانی ثابت می‌شود.

ادعا ۱۴: اگر سه یال آویزان از T_7، دوبار زیرتقسیم شوند، آن‌گاه یال آویزان دیگر زیرتقسیم نمی‌شود.

با توجه به **ادعاهای ۱۳ و ۱۴**، نتیجه می‌گیریم که $T \cong \mathcal{T}_7$.

Referenc:

1. H. Abdollahzadeh Ahangar and M. Khaibari, Graphs with large Roman domination number, Submitted.
2. W.E. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince, Douglas B. West, Extremal Problems for Roman Domination, SIAM J. Discrete Math. 23 (2009), 1575-1586.
3. J.E. Cockayne, P.A. Dreyer Jr, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, Roman domination in graphs, Discrete Math. 278 (2004), 11-22.
4. E.J. Cockayne, PJP. Grobler, W. Grundlingh, J. Munganga, JH. van Vuuren, Protection of a graph, Discrete Math. 67 (2005), 19- 32.
5. H. Fernau, Roman domination a a parameterized perspective, Int. J. Comput. Math. 85 (2008), 25-38.
6. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, Fundamentals of in Domination Graphs, Marcel Dekker Inc. New York, 1998.
7. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, Domination in Graphs: Advanced Topics, Marcel Dekker Inc. New York, 1998.
8. M.A. Henning, A characterization of Roman trees, Discuss. Math. Graph Theory, 22(2) (2002), 325-334.
9. M.A. Henning, Defending the Roman empire from multiple attacks, Discrete Math. 271 (2003), 101-115.
10. M.A. Henning and S.T. Hedetniemi, Defending the Roman empire-a new strategy, Discrete Math. 266 (2003), 239-251.
11. C.S. ReVelle and K.E. Rosing, Defendens imperium Romanum: a classical problem in military strategy. Am. Math. Mon. 107(7) (2000), 585-594.
12. X. Song and X. Wang, Roman domination number and domination number of a tree, Chin. Q. J. Math. 21 (2006), 358-367.