

کشسانی انتخابی در تحلیل پوششی داده‌ها با حضور خروجی‌های مطلوب و نامطلوب

مریم حقیقت‌شناس^۱، علیرضا امیر تیموری^۲، سهراب کردرستمی^{۳*}

^(۱و۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

^(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۹/۱۲

چکیده

بازده به مقیاس و کشسانی مقیاس موضوعات مهمی در تحلیل پوششی داده‌ها به شمار می‌روند. در کشسانی مقیاس ارزیابی پاسخ بردارهای خروجی نسبت به تغییرات حاشیه‌ای بردارهای ورودی به صورت کمی مورد نظر است. در اغلب فعالیت‌های تولیدی و اقتصادی علاوه بر خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های نامطلوب مانند مطالبات معوق در بانک‌ها ایجاد می‌شوند. در این مقاله روی اندازه کشسانی مقیاس انتخابی بر مبنای قیمت داده‌ها و با حضور خروجی-های نامطلوب تمرکز شده است. در اینجا با تغییر جزئی در خروجی‌های نامطلوب تعیین می‌شود که بین ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب کدام یک به عنوان پاسخ تغییر در خروجی‌های نامطلوب انتخاب شوند. در انتها برای نمایش کاربرد چارچوب تئوری پیشنهادی، مدل برای داده‌های واقعی یکی از بانک‌های استانی در ایران به کار برده شده است.

کلید واژگان: تحلیل پوششی داده‌ها، کشسانی مقیاس، کارایی هزینه، خروجی‌های نامطلوب.

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یکی از زیرشاخه‌های مهم و پرکاربرد علم تحقیق در عملیات می‌باشد که به تحلیل و ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) و فعالیت سیستم‌های مختلف اقتصادی می‌پردازد. در حقیقت تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیرپارامتری مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی است که هدف آن بررسی و مقایسه عملکرد واحدهای متجانس شامل چندین ورودی و خروجی است. به این صورت که مرز تقریبی تابع تولید بر اساس مجموعه امکان تولید (PPS) تعیین و با توجه به مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی عملکرد واحدها صورت می‌گیرد.

خروجی‌های نامطلوب یکی از مباحث مهم در تحلیل پوششی داده‌ها است که در دو دهه اخیر توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. مطالبات معوق بانک، آلاینده‌ها در نیروگاه برق، گازهای گلخانه‌ای نظیر گاز دی اکسید کربن و دی اکسید سولفور از جمله مواردی هستند که تحت عنوان خروجی‌های نامطلوب شناخته می‌شوند. از آن جایی که خروجی‌های نامطلوب به موازات خروجی‌های مطلوب تولید می‌شوند و افزایش چنین فاکتورهایی زیان اقتصادی و زیست محیطی را به همراه دارند برای جلوگیری از این مشکل روشی مورد نیاز است که امکان کاهش خروجی‌های نامطلوب و افزایش خروجی‌های مطلوب را به طور هم زمان فراهم نماید.

در فرایند تولید، تغییر یک پارامتر تصمیم روی یک یا چند پارامتر اثر خواهد گذاشت. چنین تبادلاتی بین ورودی‌ها و خروجی‌ها اطلاعات مهمی برای تصمیم‌گیرندگان فراهم می‌کند. بنابراین تخمین نرخ حاشیه‌ای جایگزین و کشسانی مقیاس مسائل مهمی در تئوری تولید هستند زیرا امکان محاسبه اثر تغییرات در یک یا چند داده بر روی داده‌های دیگر را به ما می‌دهد. از طرفی هدف فعالیت اقتصادی به دست آوردن تولید هر چه بیشتر از منابع موجود است. لذا اقتصاددانان اصولاً علاقه‌مند به مساله هزینه تولید می‌باشند. هزینه‌ای که یک بنگاه اقتصادی وقتی منابعش را برای تولید به کار می‌برد، متحمل می‌شود. در مدل کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها، اندازه‌گیری کارایی برای DMU ها تنها بر مبنای داده‌های ورودی و خروجی بود. اما در بعضی موقعیت‌ها وزن، قیمت یا اولویت‌هایی برای داده‌های ورودی و خروجی در نظر گرفته می‌شود. این نوع اطلاعات امکان تجزیه و تحلیل دقیق‌تر داده‌ها را فراهم می‌سازد. در این زمینه بحث کارایی تخصیصی به میان می‌آید که علاوه بر اینکه به تولید بیشترین خروجی با مصرف کمترین ورودی دلالت دارد به انتخاب ترکیب درستی از ورودی‌ها نیز می‌پردازد.

با توجه به اینکه در بسیاری موارد، لحاظ کردن قیمت داده‌ها برای تصمیم‌گیری مدیران یک سازمان از اهمیت خاصی برخوردار بوده و با در نظر نگرفتن قیمت داده‌های ورودی‌ها و با استفاده تنها کارایی تکنیکی نتایج به دست آمده برای تصمیم‌گیری، مطلوب و مفید نخواهد بود. لذا در این مقاله برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تحت ارزیابی، علاوه بر کارایی تکنیکی، کارایی تخصیصی به دلیل حضور قیمت داده‌ها در نظر گرفته شده است. از طرفی با توجه به اینکه در هر سازمان یکی از اهداف مهم و اصلی مدیران به حداقل رساندن هزینه‌های آن سازمان می‌باشد که تاثیر مستقیمی در سوددهی مجموعه دارد و همچنین گاهی حضور خروجی‌های نامطلوب در روند تولید خروجی‌های مطلوب امری اجتناب‌ناپذیر می‌باشد، لذا با توجه به اهمیت موضوع فوق و مطالعات کمی که در این زمینه صورت گرفته در این مقاله ابتدا کارایی هزینه واحدها با حضور قیمت داده‌های ورودی و با حضور خروجی‌های نامطلوب، محاسبه می‌شود و واحدهای کارا مشخص می‌شود. چون کشسانی مقیاس برای واحدهای کارا قابل محاسبه است، برای واحدهای ناکارا نقاط تصویر آنها روی مرز در نظر گرفته می‌شود. سپس در مدل پیشنهادی با تغییر خروجی‌های نامطلوب به اندازه‌ای کوچک و نزدیک به یک که قابل کاربرد در دنیای واقعی باشد، تعیین می‌شود که کدام یک از ورودی‌ها یا خروجی‌های مطلوب و به چه میزان مستلزم تغییر هستند که در نهایت کمترین هزینه حاصل شود.

سپس به کمک دوال مدل، فرمولی برای محاسبه کشسانی داده‌ها از طریق معکوس کشسانی نوشته شده و در پایان، مدل پیشنهادی بر روی داده‌های واقعی یکی از بانک‌های استان اعمال و نتایج مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است.

از این رو، ساختار مقاله به این صورت است که در بخش دوم مروری بر مفاهیم کشسانی مقیاس و کارایی هزینه خواهیم داشت. در بخش سوم مدل پیشنهادی کشسانی مقیاس در حضور عوامل نامطلوب ارائه می‌شود. بخش چهارم به تحلیل مدل پیشنهادی بر روی یکی از بانک‌های استان پرداخته می‌شود. سرانجام در بخش پنجم نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای تحقیقات آینده ارائه می‌شود.

۲. ادبیات موضوعی

همواره تعریف و محاسبه اندازه‌های کشسانی در تحلیل پوششی داده‌ها از اهمیت خاصی برخوردار بوده است. این اهمیت و توجه در نقاط حدی مرز کارا دو چندان می‌شود، نقاطی که در آنها تعریف و محاسبه اندازه‌های کشسانی با دشواری‌های قابل توجهی روبروست. کشسانی مقیاس اولین بار توسط بنکر^۲ [۱] مطرح شد که در آن مدل‌های برنامه‌ریزی خطی برای تخمین کارایی‌های مقیاس و تکنیکی سراسری یک DMU با ارجاع به مرز تولید کارا به کار گرفته شد. پس از آن بنکر و ترال^۳ [۲]، فرساند^۴ و هالمارسون^۵ [۳] و فرساند و همکاران [۴] نیز برای به دست آوردن فرمولی برای کشسانی مقیاس به روش غیرمستقیم کارهایی انجام دادند. روش دیگری که توسط ریوونوزکو^۶ و همکاران [۵] و فرساند و همکاران [۶] انجام شد، روش مستقیم برای محاسبه کشسانی مقیاس بود که این روش فرمول مشخصی برای کشسانی مقیاس نمی‌دهد اما مزایای محاسباتی نسبت به روش غیرمستقیم دارد.

پس از آن پودینوسکی^۷ و همکاران [۷] از روش غیرمستقیم به ساخت فرمول کشسانی مقیاس پرداخته و فرمول را به حالات کلی تعمیم دادند. پودینوسکی و فرساند [۸] همچنین به بررسی کشسانی مقیاس به صورت اثر تغییر مجموعه‌ای از ورودی‌ها و خروجی‌ها روی دسته‌ای از خروجی‌ها در هر نقطه از مرز کارا پرداختند. سپس آتسی^۸ و پودینوسکی [۹] روش پودینوسکی و فرساند [۸] را در تکنولوژی با بازده به مقیاس ثابت (CRS) به کار برده و فرمول برنامه‌های خطی مورد نیاز برای محاسبه اندازه کشسانی را نوشتند. پس از آن زلیناک^۹ [۱۰] روی تابع فاصله جهتی برای کشسانی مقیاس و ساهو^{۱۰} و تون^{۱۱} [۱۱] روی کشسانی مقیاس در روش غیرپارامتریک DEA کار کردند. همچنین کاظمی متین و میرجابری [۱۲] به محاسبه کشسانی مقیاس در حضور ورودی‌های ثابت و ریوونوزکو و همکاران [۱۳-۱۴] به بررسی کشسانی در مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی پرداختند. ساهو و همکاران [۱۵] تجزیه کارایی تکنیکی و کشسانی مقیاس در شبکه دو مرحله‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. خالقی^{۱۲} و همکاران [۱۶] در مورد بازده به مقیاس و کشسانی مقیاس در تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای تحقیق کردند. ساهو و همکاران

² Banker

³ Thrall

⁴ Førsund

⁵ Hjalmarsson

⁶ Krivonozhko

⁷ Podinovski

⁸ Atici

⁹ Zelenyuk

¹⁰ Sahoo

¹¹ Tone

¹² Khaleghi

[۱۵] روشی برای محاسبه کشسانی مقیاس ساختارهای شبکه‌ای دو مرحله‌ای بیان کردند. میرجابری^{۱۳} و کاظمی متین^{۱۴} [۱۷] بر اساس تابع فاصله جهتی روشی برای محاسبه کشسانی مقیاس ارائه نمودند. امیرمحمدی^{۱۵} و همکاران [۱۸] یک مثال کاربردی برای محاسبه کشسانی مقیاس در حضور داده‌های صحیح را بررسی کردند. امیرمحمدی و همکاران [۱۹] یک مثال کاربردی روی شعب بانک در باره محاسبه کشسانی مقیاس در حضور عوامل نامطلوب و غیرقابل کنترل ارائه دادند. فتحی اجیرلو^{۱۶} و همکاران [۲۰] با اعمال تغییراتی در مدل‌های فر و همکاران دو مدل شبکه‌ای برای اندازه‌گیری کارایی هزینه ارائه کردند. همچنین سراب^{۱۷} و همکاران [۲۱] روشی برای کارایی هزینه تحت نوسانات هزینه‌های ورودی در تحلیل پوششی داده‌ها را روی یک مثال کاربردی بررسی کردند و سرانجام عزیزی یوسفوند^{۱۸} و همکاران [۲۲] یک روش تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای دومرحله‌ای جهت‌دار به منظور تخمین کارایی کلی و کارایی هر مرحله از فرایندهای دومرحله‌ای را مورد بررسی قرار دادند.

از طرفی در امور اقتصادی کاهش هزینه و ارزیابی عملکرد واحدها از نظر میزان هزینه مصرفی همیشه مورد اهمیت بوده است. دبرو^{۱۹} [۲۳] و فارل^{۲۰} [۲۴] مفهوم کارایی هزینه را برای نخستین بار مطرح نمودند. فر^{۲۱} و همکاران [۲۵] مدل برنامه‌ریزی خطی جهت ارزیابی کارایی هزینه بر اساس مفهوم مطرح شده توسط فارل را ارائه کرده و کوپر^{۲۲} و همکاران [۲۶] روی کارایی هزینه کار کردند و از آن پس مدل‌های مختلفی جهت تعیین میزان کارایی هزینه برای واحدهای مورد ارزیابی با ساختار مختلف ارائه شد.

به علاوه مساله کشش مقیاس در مدل‌های کارایی هزینه در برخی مطالعات مانند [۲۷-۲۸] بررسی شده است. خروجی‌های نامطلوب نیز یکی از موضوعات مهم در DEA است که در دو دهه اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است. هایلو^{۲۳} و ویمن^{۲۴} [۲۹] تحلیل غیرپارامتری به صورت در نظر گرفتن خروجی‌های بد به عنوان ورودی در فرایند تولید را مطرح کردند. سیفورد^{۲۵} و ژو^{۲۶} [۳۰] با منفی کردن علامت خروجی‌های نامطلوب ماهیت خروجی را حفظ کرده ولی وجود داده‌های منفی ایرادی است که به کارشان وارد است. همچنین بحث معکوس نمودن خروجی‌های نامطلوب مطرح شد که به این ترتیب نیز ماهیت خروجی‌های بد به خروجی‌های خوب تغییر کرده اما در این نظریه نیز می‌توان مثالی یافت که با قوانین فیزیک در تناقض باشد. پس از آنها فار و گروسکوف^{۲۷} [۳۱] نشان دادند که شرایط یکنواختی در هایلو و ویمن [۲۹] منطقی نبوده و با قانون فیزیک در تناقض است. آنها همچنین نشان دادند که چگونه اصل دسترسی‌پذیری ضعیف به درستی در مدل استفاده شود. سپس کسمانن^{۲۸} [۳۲] ادعا

¹³ Mirjaberi

¹⁴ Kazemi Matin

¹⁵ Amirmohammadi

¹⁶ Fathi Ajirlu

¹⁷ Sarab

¹⁸ Azizi Usefvand

¹⁹ Veeman

²⁰ Veeman

²¹ Fare

²² Cooper

²³ Hailu

²⁴ Veeman

²⁵ Seiford

²⁶ Zhu

²⁷ Grosskopf

²⁸ Kuosmanen

کرد که اصل دسترسی‌پذیری ضعیف ارائه شده در مدل فار و گروسکوف [۳۱] صحیح نمی‌باشد. وی فرمول غیرپارامتری خود برای دسترسی‌پذیری ضعیف را با حفظ خطی بودن مجموعه تکنولوژی ارائه داد.

۲-۱ کشسانی مقیاس

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده $(DMU_j : j = 1, \dots, n)$ وجود دارد به طوری که هر واحد شامل m ورودی و s خروجی $x_{ij} (i = 1, \dots, m)$ و $y_{rj} (r = 1, \dots, s)$ نامنفی باشد و T_{VRS} مجموعه تکنولوژی تولید تحت بازده به مقیاس متغیر باشد. پودینووسکی و همکاران [۹] تابع پاسخ ورودی-محور $\alpha(\beta)$ ، به عنوان نسبت کمینه بردار ورودی ax_o در T_{VRS} برای بردار خروجی βy_o ، را به صورت زیر تعریف نمودند:

$$\alpha(\beta) = \text{Min}\{a \mid (ax_o, \beta y_o) \in T_{VRS}\} \quad (۱)$$

که با حل مساله برنامه‌ریزی خطی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\alpha(\beta) = \text{Min } a$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq ax_{io}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \beta y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \quad (۲)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$a \text{ is free.}$$

در حقیقت مدل (۲) کمترین مقدار تغییر ورودی‌ها (a) را به ازای تغییر خروجی‌ها به اندازه β تعیین می‌کند. این نکته قابل توجه است که مقدار $\beta > 0$ برای منعکس کردن نسبت تغییرات خروجی توسط مدیر تعیین می‌شود. کشسانی مقیاس یا به عبارتی نسبت بهره‌وری حاشیه‌ای به بهره‌وری میانگین برای واحد $(x, y) = (\alpha(\beta)x_o, \beta y_o)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(x, y) = \frac{\alpha'(\beta)}{\frac{\alpha(\beta)}{\beta}} = \alpha'(\beta) \frac{\beta}{\alpha(\beta)} \quad (۳)$$

که در رابطه فوق $\alpha'(\beta)$ بهره‌وری حاشیه‌ای و $\frac{\alpha(\beta)}{\beta}$ بهره‌وری میانگین می‌باشد. اگر $(\alpha(\beta)x_o, \beta y_o) = (x_o, y_o)$ آنگاه $\beta = \alpha(\beta) = 1$ و $\rho(x, y) = \alpha'(1)$. (این نکته قابل توجه است که (x_o, y_o) یک نقطه کاراست.)

در تحلیل پوششی داده‌ها در نقاط روی مرز، تابع پاسخ $\alpha(\beta)$ مشتق‌پذیر نیست اما دارای مشتق‌های چپ و راست می‌باشد از این رو کشسانی مقیاس راست و چپ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\rho_+(x_o, y_o) &= \alpha'_+(1) \\ \rho_-(x_o, y_o) &= \alpha'_-(1)\end{aligned}\quad (4)$$

مقدار عددی رابطه (۴) از طریق لم ۲ پودینوسکی و همکاران [۹] قابل محاسبه می‌باشد. حال فرض کنید واحد تحت ارزیابی $DMU_o: (x_o, y_o)$ ناکارا باشد. در این صورت برای محاسبه کشسانی مقیاس ابتدا تصویر آن روی مرز کارا تعیین می‌شود سپس کشسانی مقیاس آن تعیین می‌گردد. از آن جایی که نقاط ناکارا دارای نقاط تصویر متفاوتی هستند مقادیر کشسانی مقیاس نیز متفاوت خواهد بود.

۲-۲ کارایی هزینه

به طور کلی در تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی هزینه به صورت حاصل ضرب کارایی تکنیکی در کارایی تخصیصی تعریف می‌شود. زمانی که هیچ صحبتی از قیمت داده‌ها در میان نباشد بحث کارایی تکنیکی مطرح است. یعنی کافی است با کمترین ورودی بیشترین خروجی را داشته باشیم. اما اگر قیمت ورودی‌ها و خروجی‌ها در دست باشد، علاوه بر کارایی تکنیکی، بحث کارایی تخصیصی نیز به میان می‌آید. در واقع ترکیب درستی از ورودی‌ها که بتواند خروجی‌ها را با کمترین هزینه تولید نماید.

حال فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده $(DMU_j: j=1, \dots, n)$ وجود دارد به طوری که هر واحد m ورودی $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$ را مصرف نموده تا s خروجی $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj}) \geq 0$ را تولید نماید. همچنین فرض کنید $c_j = (c_{1j}, \dots, c_{mj}) \geq 0$ قیمت ورودی واحد تصمیم‌گیرنده j ام باشد. در این صورت بهترین ترکیب از ورودی‌ها که کمترین هزینه را ایجاد نماید از طریق مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned}Min \quad & \sum_{i=1}^m c_i x_i \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_i \quad i=1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r=1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n.\end{aligned}\quad (5)$$

با توجه به جواب بهینه مدل فوق (x^*) کارایی هزینه برای واحد تحت ارزیابی DMU_o به صورت کسر (نسبت کمترین هزینه به هزینه واقعی) زیر تعریف می‌شود:

$$CE_o = \frac{\sum_{i=1}^m c_i x_i^*}{\sum_{i=1}^m c_i x_{io}} \quad (6)$$

تعریف ۱- واحد تحت ارزیابی DMU_o کارای هزینه است اگر و تنها اگر $CE_o = 1$ ، در غیر این صورت ناکارای هزینه نامیده می‌شود. (لازم به ذکر است $0 < CE_o \leq 1$)

حال واحد تحت ارزیابی (x_0, y_0) و هزینه ورودی‌ها $(c \in R_+^m)$ را در نظر می‌گیریم. کمترین هزینه ورودی‌ها به ازای تغییرات خروجی‌ها به اندازه β (که β مقداری در همسایگی چپ یا همسایگی راست یک می‌باشد)، با توجه به مدل‌های (۲) و (۵) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\alpha(\beta) = \text{Min} \sum_{i=1}^m c_i \alpha x_{io}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \alpha x_{io}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \beta y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\alpha \text{ is free.}$$

واضح است که مدل فوق شدنی است و فرم دوآل آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{Max} \beta \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + u_0$$

s.t.

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u_0 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} \leq \sum_{i=1}^m c_i x_{io},$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$u_0 \text{ is free in sign.}$$

همانطور که پیش‌تر اشاره شد کشسانی مقیاس چپ و راست در نقاط مرزی به ترتیب به صورت $\rho_+(x_0, y_0) = \alpha'_+(1)$ و $\rho_-(x_0, y_0) = \alpha'_-(1)$ تعریف می‌شوند. اما از آنجایی که مقادیر $\alpha'_-(\beta)$ و $\alpha'_+(\beta)$ قابل محاسبه نیستند، از قضیه زیر برای محاسبه عددی آن‌ها استفاده می‌شود:

قضیه ۱- $\alpha'_+(1) = 1 - u_0^{Min}$, $\alpha'_-(1) = 1 - u_0^{Max}$ که در آن u_0^{Max} و u_0^{Min} به ترتیب جواب‌های بهینه مدل‌های خطی زیر می‌باشند:

$$u_0^{Max} = \text{Max } u_0$$

s.t.

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + u_0 = \alpha(1), \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_0 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} \leq \sum_{i=1}^m c_i x_{io},$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m.$$

$$u_0^{Min} = \text{Min } u_0$$

s.t.

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + u_0 = \alpha(1), \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_0 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} \leq \sum_{i=1}^m c_i x_{io},$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m.$$

حال فرض کنید واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j : j = 1, \dots, n$ علاوه بر بردار خروجی مطلوب $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{sj}) \geq 0$ شامل بردار خروجی نامطلوب $w_j = (w_{1j}, \dots, w_{kj}) \geq 0$ باشد. در این صورت مدل کارای هزینه با حضور خروجی‌های نامطلوب به صورت زیر خواهد بود:

$$CE_o = \text{Min} \frac{\sum_{i=1}^m c_i x_i}{\sum_{i=1}^m c_i x_{io}}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} \leq x_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} = w_{lo}, \quad l = 1, \dots, k,$$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) = 1,$$

$$\lambda_j, \mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

با توجه به مقدار هدف مدل فوق، در بهینگی اگر $CE_o = 1$ باشد در این صورت واحد تحت ارزیابی DMU_o کارای هزینه می‌باشد.

۳. مدل پیشنهادی

همان طور که در مقدمه نیز اشاره شد هدف از مقاله پیش رو ارائه یک مدل برنامه‌ریزی خطی با حضور خروجی‌های نامطلوب است به طوری که با تغییر خروجی‌های نامطلوب به اندازه β مدل پیشنهادی تعیین نماید که از میان ورودی‌ها یا خروجی‌های مطلوب کدام یک به اندازه α تغییر نمایند تا کم‌ترین هزینه ایجاد شود. به عبارت دیگر در این مقاله خروجی‌های نامطلوب به اندازه β (عددی در همسایگی یک) تغییر می‌کند و هدف مقاله تعیین پاسخ این تغییر روی ورودی‌ها یا خروجی‌های مطلوب است و می‌خواهیم بدانیم برای ایجاد تغییر در خروجی‌های نامطلوب بهتر است ورودی‌ها تغییر کنند یا خروجی‌های مطلوب به گونه‌ای که کم‌ترین هزینه حاصل شود. برای این منظور فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j : j = 1, \dots, n$ وجود دارد به طوری که هر واحد شامل بردار ورودی $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$ بردار خروجی مطلوب $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{sj}) \geq 0$ و بردار خروجی نامطلوب $w_j = (w_{1j}, \dots, w_{kj}) \geq 0$ باشد. در این صورت برای محاسبه تابع کم‌ترین هزینه مساله برنامه‌ریزی ریاضی صحیح به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \rho_1 \left(\sum_{i=1}^m c_i \alpha x_{i0} \right) + \rho_2 \left(\sum_{i=1}^m c_i x_{i0} \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} \leq \alpha x_{i0} + M(1 - \rho_1), \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} \geq v_{r0} - M(1 - \rho_1), \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} \leq x_{i0} + M(1 - \rho_2), \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} \geq \alpha v_{r0} - M(1 - \rho_2), \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} = \beta w_{l0}, \quad l = 1, \dots, k, \\ & \sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) = 1, \\ & \rho_1 + \rho_2 = 1, \\ & \rho_1, \rho_2 \in \{0, 1\}, \\ & \alpha, \lambda_j, \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

در مدل فوق M یک عدد به قدر کافی بزرگ و ρ_1, ρ_2 متغیرهای دودویی هستند که هنگام تغییر خروجی‌های نامطلوب تعیین می‌نمایند که کدام یک از ورودی‌ها یا خروجی‌های مطلوب به عنوان مجموعه پاسخ برای تغییر باید انتخاب شوند. اگر $\rho_1 = 1$ و $\rho_2 = 0$ ، در این حالت قیود اول و دوم برقرارند و قیود سوم و چهارم زاید بوده و در نتیجه حذف می‌شوند. یعنی در این حالت ورودی‌ها به عنوان مجموعه پاسخ برای تغییر انتخاب شده‌اند. اگر $\rho_1 = 0$ و $\rho_2 = 1$ در این حالت قیود سوم و چهارم برقرار بوده و قیود اول و دوم زاید و در نتیجه حذف می‌گردند. یعنی در این حالت خروجی‌ها به عنوان مجموعه پاسخ برای تغییر انتخاب شده‌اند.

در مدل (۱۲) خروجی‌های نامطلوب به اندازه β تغییر می‌کنند. با توجه به سازگاری با کاربردهای دنیای واقعی این تغییرات نمی‌توانند بسیار بزرگ در نظر گرفته شوند از این رو تغییرات β به صورت موضعی و خیلی نزدیک به یک در نظر گرفته می‌شود. به منظور ایجاد کاهش $\beta < 1$ و برای افزایش $\beta > 1$ در نظر گرفته می‌شود. تغییرات

کاهشی و افزایشی خروجی‌های نامطلوب از نظر منطقی محل اشکال نیست چرا که با کاهش خروجی‌های نامطلوب ناگزیر به تولید کمتر خروجی‌های مطلوب بوده و با افزایش خروجی‌های نامطلوب سهم بیشتری از خروجی‌های مطلوب نیز باید تولید شود. با توجه به تغییر خروجی‌های نامطلوب به اندازه β به منظور تعیین کمترین هزینه، مدل مورد نظر تعیین می‌نماید که کدام یک از ورودی‌ها یا خروجی مطلوب ملزم به تغییر به اندازه α می‌باشند. هم‌چنین با توجه به مقادیر دست آمده برای α می‌توان تعیین نمود که مقدار تغییرات ورودی‌ها یا خروجی‌های مطلوب کمتر یا بیشتر از مقدار تغییرات در خروجی نامطلوب بوده است.

نکته مهمی که باید به آن اشاره شود این است که کشسانی مقیاس چگونگی تغییر شاخص‌ها در مقابل تغییر سایر شاخص‌ها در شکل کمی است. در این مقاله با توجه به اینکه تغییر در خروجی‌های نامطلوب را متأثر از تغییر در ورودی‌ها و یا خروجی‌های مطلوب در نظر گرفتیم، لذا معیار محاسبه شده کشسانی مقیاس خواهد بود.

مدل (۱۲) به دلیل وجود متغیرهای ρ_1 و α در تابع هدف غیرخطی می‌باشد. برای خطی کردن مدل با تغییر متغیر $\rho_1 \alpha = \alpha_1$ روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_1 \leq M \rho_1 \\ \alpha_1 &\leq \alpha \leq \alpha_1 + M(1 - \rho_1) \end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری این روابط در مدل (۱۲)، مدل خطی آن را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &Min \left(\sum_{i=1}^m c_i \alpha_1 x_{io} \right) + \left(\sum_{i=1}^m c_i \rho_2 x_{io} \right) \\ &s.t. \\ &\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} \leq \alpha x_{io} + M(1 - \rho_1), \quad i = 1, \dots, m, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} \geq v_{ro} - M(1 - \rho_1), \quad r = 1, \dots, s, \\ &\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} \leq x_{io} + M(1 - \rho_2), \quad i = 1, \dots, m, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} \geq \alpha v_{ro} - M(1 - \rho_2), \quad r = 1, \dots, s, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} = \beta w_{lo}, \quad l = 1, \dots, k, \\ &\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) = 1, \\ &\rho_1 + \rho_2 = 1, \\ &\rho_1, \rho_2 \in \{0, 1\}, \\ &\beta, \lambda_j, \mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ &0 \leq \alpha_1 \leq M \rho_1, \\ &\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_1 + M(1 - \rho_1). \end{aligned} \quad (13)$$

قضیه ۲- اگر $(\lambda^*, \alpha^*, \rho_1^*, \rho_2^*, \alpha_1^*)$ یک جواب بهینه مدل (۱۳) باشد آنگاه $(\lambda^*, \alpha^*, \rho_1^*, \rho_2^*)$ یک جواب بهینه مدل (۱۲) می‌باشد.

اثبات: به آسانی می‌توان نشان داد که $(\lambda^*, \alpha^*, \rho_1^*, \rho_2^*)$ یک جواب شدنی برای مدل (۱۲) است. فرض می‌کنیم این جواب بهینه نباشد و مدل (۱۲) جواب دیگری مانند $(\bar{\lambda}, \bar{\alpha}, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2)$ داشته باشد که بهینه است. اگر قرار دهیم $\bar{\alpha}_1 = \rho_1^*$ به وضوح $(\bar{\lambda}, \bar{\alpha}, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\alpha}_1)$ یک جواب شدنی مدل (۱۳) می‌باشد و این تناقض است. چون $(\lambda^*, \alpha^*, \rho_1^*, \rho_2^*, \alpha_1^*)$ جواب بهینه مدل (۱۳) بود بنابراین اثبات کامل است.

به دلیل حضور متغیرهای دودویی در مدل (۱۲) برای نوشتن دوال مدل می‌توان یک مساله ثانویه برای آن تعریف کرد. برای این منظور یکبار $\rho_1 = 0$ در نظر گرفته و مساله برنامه‌ریزی خطی متناظر با آن را نوشته و بار دیگر با در نظر گرفتن $\rho_2 = 0$ مساله برنامه‌ریزی خطی متناظر با آن را می‌نویسیم. بنابراین به ترتیب برای $\rho_1 = 0$ و $\rho_2 = 0$ داریم:

$$\text{Min } \left(\sum_{i=1}^m c_i \alpha x_{io} \right)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} \leq \alpha x_{io}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} \geq v_{ro}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} = \beta w_{lo}, \quad l = 1, \dots, k,$$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) = 1,$$

$$\alpha, \beta, \lambda_j, \mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m c_i x_{io}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} \geq \alpha v_{ro}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} = \beta w_{lo}, \quad l = 1, \dots, k,$$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) = 1,$$

$$\alpha, \beta, \lambda_j, \mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

حال برای هر کدام از این مدل‌ها می‌توان دوال نوشت. دوال مدل‌های فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\alpha(\beta) = \text{Max} - \sum_{i=1}^m z_i x_{io} + \beta \sum_{l=1}^k t_l w_{lo} + u_0$$

s.t.

$$-\sum_{i=1}^m z_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r v_{rj} + \sum_{l=1}^k t_l w_{lj} + u_0 \leq 0,$$

$$\sum_{i=1}^m z_i x_{io} \leq \sum_{i=1}^m c_i x_{io},$$

$$-\sum_{i=1}^m z_i x_{ij} + u_0 \leq 0,$$

$$z_i, u_r \geq 0,$$

$$\alpha(\beta) = \text{Max} + \sum_{r=1}^s u_r v_{ro} + \beta \sum_{l=1}^k t_l w_{lo} + u_0$$

s.t.

$$-\sum_{i=1}^m z_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r v_{rj} + \sum_{l=1}^k t_l w_{lj} + u_0 \leq 0,$$

$$-\sum_{i=1}^m z_i x_{ij} + u_0 \leq 0,$$

$$z_i, u_r \geq 0,$$

سپس از تلفیق این دو مساله به کمک متغیرهای دودویی ρ_1, ρ_2 به مساله زیر می‌رسیم:

$$\alpha(\beta) = \text{Max} - \rho_1 \sum_{i=1}^m z_i x_{io} + \rho_2 \sum_{r=1}^s u_r v_{ro} + \beta \sum_{l=1}^k t_l w_{lo} + u_0$$

s.t.

$$-\sum_{i=1}^m z_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r v_{rj} + \sum_{l=1}^k t_l w_{lj} + u_0 \leq 0, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^m z_i x_{io} \leq \sum_{i=1}^m c_i x_{io} + L(1 - \rho_1),$$

$$-\sum_{i=1}^m z_i x_{ij} + u_0 \leq 0,$$

$$\rho_1 + \rho_2 = 1,$$

$$\rho_1, \rho_2 \in \{0, 1\},$$

$$z_i, u_r \geq 0,$$

مدل فوق غیرخطی می‌باشد که با تغییر متغیر $\rho_1 z_i = z_{li}, \rho_2 u_r = u_{lr}$ روابط زیر را داریم:

$$0 \leq z_{li} \leq L \rho_1$$

$$z_{li} \leq z_i \leq z_{li} + L(1 - \rho_1)$$

$$0 \leq u_{lr} \leq L \rho_2$$

$$u_{lr} \leq u_r \leq u_{lr} + L(1 - \rho_2)$$

با جایگذاری این روابط در مدل (۱۴)، فرم خطی آن به صورت زیر خواهد شد:

$$\alpha(\beta) = \text{Max} - \sum_{i=1}^m z_{li} x_{io} + \sum_{r=1}^s u_{lr} v_{ro} + \beta \sum_{l=1}^k t_l w_{lo} + u_0$$

s.t.

$$-\sum_{i=1}^m z_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r v_{rj} + \sum_{l=1}^k t_l w_{lj} + u_0 \leq 0,$$

$$\sum_{i=1}^m z_i x_{io} \leq \sum_{i=1}^m c_i x_{io} + L(1 - \rho_1),$$

$$-\sum_{i=1}^m z_i x_{ij} + u_0 \leq 0,$$

$$0 \leq z_{li} \leq L \rho_1,$$

$$z_{li} \leq z_i \leq z_{li} + L(1 - \rho_1),$$

$$0 \leq u_{lr} \leq L \rho_2,$$

$$u_{lr} \leq u_r \leq u_{lr} + L(1 - \rho_2),$$

$$\rho_1 + \rho_2 = 1,$$

$$\rho_1, \rho_2 \in \{0, 1\},$$

$$z_i, u_r \geq 0 \quad \forall i, r.$$

(۱۵)

در تابع هدف مدل فوق برای $\beta = 1$ خواهیم داشت:

$$\alpha(1) =$$

$$Max - \sum_{i=1}^m z_{1i} x_{io} + \sum_{r=1}^s u_{1r} v_{ro} + \sum_{l=1}^k t_l w_{lo} + u_0$$

حال فرض کنید Λ_0 مجموعه تمام جواب‌های بهینه مدل (۱۵) باشد همانگونه که می‌دانیم مرز تولید ساخته شده توسط DEA قطعه قطعه خطی است و در نقاط راسی که همان DMU های کارای راسی هستند، وجود جواب‌های بهینه چندگانه محاسبه اندازه کشسانی را با مشکل مواجه می‌کند. لذا در صدد محاسبه کشسانی راست و چپ خواهیم بود. برای محاسبه کشسانی راست و چپ برای واحد تحت ارزیابی DMU_0 ، ابتدا دو مساله زیر را حل می‌کنیم:

$$\rho_0^+ = Min - \sum_{i=1}^m z_{1i} x_{io} + \sum_{r=1}^s u_{1r} v_{ro} + \sum_{l=1}^k t_l w_{lo}$$

s.t.

$$(z, u, t, z_1, u_1, w, u_0) \in \Lambda_0 \quad (16)$$

$$\rho_0^- = Max - \sum_{i=1}^m z_{1i} x_{io} + \sum_{r=1}^s u_{1r} v_{ro} + \sum_{l=1}^k t_l w_{lo}$$

s.t.

$$(z, u, t, z_1, u_1, w, u_0) \in \Lambda_0 \quad (17)$$

اگر $\alpha(\beta)$ در همسایگی راست و چپ $\beta = 1$ تعریف شده باشد خواهیم داشت:

$$\alpha'_+(1) = \rho_0^+, \alpha'_-(1) = \rho_0^- \quad (18)$$

بنابراین برای محاسبه کشسانی راست و کشسانی چپ، کفایت جواب‌های بهینه مدل‌های (۱۶) و (۱۷) را به ازای $\beta = 1$ بیابیم.

۴. مطالعه کاربردی

از آنجایی که بانک‌ها به عنوان یک موسسه مالی و خدماتی از جایگاه ویژه‌ای در اقتصاد هر کشور برخوردارند و فعالیت موثر بانک‌ها در رشد و شکوفایی بخش‌های مختلف اقتصادی و تولیدی اثرات مهمی بر جای می‌دارد، لذا مدل (۱۳) به صورت تحلیل تجربی روی داده‌های شعب یکی از بانک‌های استانی کشور پیاده‌سازی شد. برای این منظور داده‌های مربوط به ۴۷ شعبه درجه ۲ و درجه ۳ یکی از بانک‌های استانی کشور مربوط به مهر ماه سال ۱۳۹۹ در نظر گرفته و از ۴ دسته ورودی، ۴ دسته خروجی مطلوب و یک خروجی نامطلوب استفاده شد.

ورودی‌ها شامل: هزینه‌های عمومی (x_1)، هزینه‌های پرسنلی (x_2)، سود سهم سپرده‌گذاران (x_3) و تعداد حساب‌ها (x_4) می‌باشد. هزینه‌های عمومی شامل هزینه‌های اداری، استهلاک، هزینه مطالبات معوق و سایر هزینه‌ها است. هزینه‌های پرسنلی شامل حقوق پرداختی به کارمندان شعبه بوده و سود سهم سپرده‌گذاران میزان سود پرداختی به هر سپرده‌گذار می‌باشد. برای تعداد حساب‌ها مجموع توزین شده تعداد انواع حساب‌ها در نظر گرفته شد. برای این منظور مجموع تعداد حساب‌های جاری هر شعبه با وزن ۰/۱، تعداد حساب‌های قرض‌الحسنه هر شعبه با

وزن $\frac{0}{2}$ ، تعداد حساب‌های کوتاه‌مدت هر شعبه با وزن $\frac{0}{3}$ و تعداد حساب‌های بلندمدت هر شعبه با وزن $\frac{0}{4}$ قرار داده شد.

خروجی‌های مطلوب شامل: منابع (y_1) ، مصارف (y_2) ، درآمدهای مشاع (y_3) و درآمدهای غیرمشاع (y_4) می‌باشد. منابع، میزان سرمایه‌های مشتریان نزد هر شعبه بوده که از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. مصارف، میزان وام‌های پرداختی به مشتریان می‌باشد. درآمدهای مشاع، سود دریافتی حاصل از پرداخت تسهیلات و درآمدهای غیرمشاع، درآمد حاصل از کارمزد و سایر فعالیت‌ها تعریف می‌شود. خروجی نامطلوب هم میزان مطالبات معوق شعبه (w) می‌باشد. داده‌های ورودی و خروجی این ۴۷ شعبه در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱- اطلاعات آماری ۴۷ شعبه یکی از بانک‌های کشور

شعبه	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	w
1	973	1419	48309	7741	1313333	314692	28747	3186	4157
2	455	473	22743	3001	521881	213372	16217	3190	14787
3	840	820	55513	5798	1092017	279246	17838	2309	2374
4	725	715	20698	4568	722912	204581	15463	2567	3566
5	456	435	21129	3058	726585	262633	23099	2326	1300
6	529	706	30372	4152	815724	396424	36357	3891	1400
7	618	681	33965	4583	791399	341796	33961	2003	4572
8	896	1374	32460	6412	1120043	412675	25571	3562	17606
9	680	726	27009	4025	719086	247618	20148	2837	3651
10	1524	893	158561	5165	1947805	865634	76771	3488	2612
11	658	1316	34955	6498	1113360	260485	20918	2702	3447
12	621	429	23350	2625	597535	235690	17317	2112	1381
13	584	911	31436	4843	834275	260679	24124	2303	5062
14	1062	1068	26538	5215	758145	185300	16552	2547	4375
15	797	779	17851	3232	574083	162367	11837	2818	879
16	877	1721	49437	8163	1317123	213605	17215	5518	2079
17	472	560	23066	2964	594347	187439	14703	2149	988
18	661	551	27371	3360	666361	170529	13770	2102	3018
19	529	667	26064	3167	712317	173760	12683	3381	1329
20	537	331	32172	1995	669988	325752	19352	2844	13885
21	1513	194	21465	1369	666665	155180	10906	1160	1119
22	626	284	9183	1181	591287	514691	41348	1939	3732
23	1083	1507	88396	9882	1991909	549907	37665	4993	5554
24	749	1401	33279	6009	938110	313770	21837	3021	3528
25	793	1349	37210	7139	979612	448979	33237	4179	3301
26	435	662	26618	4974	717944	107349	9337	1569	1134
27	747	1164	22069	6960	703640	285927	21063	2830	4697
28	550	656	27306	4648	860666	308012	23517	3158	6603
29	802	1341	44946	9316	1156130	385314	28664	3233	115385
30	479	825	21618	5478	575746	255703	22260	2255	10201

31	557	1060	23541	6700	792221	246036	12922	2982	5201
32	441	849	26228	5278	759975	215884	16856	2314	3409
33	500	394	38841	2839	1035729	300462	19513	3461	54712
34	1013	2203	45078	10716	1342867	475540	35222	4102	14962
35	1158	1634	50387	10060	1372739	475384	41305	4433	9980
36	834	956	52958	8151	1215744	405985	37959	4024	39061
37	601	823	17330	4709	486344	246036	23031	2675	6656
38	582	540	26255	3215	732388	328711	28350	2741	3506
39	544	586	27962	3871	827276	356591	33900	2511	4189
40	848	865	32632	6167	851573	321847	28983	3718	10286
41	1213	1370	37999	6572	1104807	635114	58570	5738	6851
42	922	1572	36756	6313	1182735	592787	63911	4927	11929
43	838	925	32722	7894	874270	131502	10428	3172	11827
44	754	864	26343	4807	755242	273455	23139	3158	7491
45	716	694	29224	3651	728655	298579	21731	3893	1777
46	947	1387	30217	8933	988957	382969	27991	4485	16727
47	921	701	29669	2489	766081	323129	16406	3217	2922

در بانکداری کم کردن هزینه‌ها بسیار با اهمیت است. بانک‌ها با کم کردن هزینه‌ها قادر به بالا بردن سود خالص می‌باشند. از آنجایی که برای به دست آوردن کشسانی مقیاس به شعب کارای هزینه نیاز است، باید ابتدا با مدل (۱۱) شعب کارای هزینه مشخص شود. بر اساس نظرخواهی از کارشناسان اهمیت چهار ورودی یکسان معرفی و در نتیجه هزینه (C) برای ورودی‌ها ۱ در نظر گرفته شد. بر اساس مدل (۱۱) کارایی هزینه شعب محاسبه و ۱۵ شعبه شامل شعب ۵، ۶، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۵، ۱۶، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۳۳، ۳۶، ۴۱، ۴۲ و ۴۵ با نمره کارایی برابر یک و در نتیجه شعب کارای هزینه مشخص شد. از آنجایی که کشسانی مقیاس برای واحدهای کارا قابل محاسبه است، برای ۳۲ شعبه دیگر نیز نقاط تصویر داده‌ها روی مرز در نظر گرفته شد.

سپس خروجی‌های نامطلوب این داده‌ها با ۴ مقدار مختلف $\beta = 1/0.3$, $\beta = 1/0.1$, $\beta = 0.99$, $\beta = 0.97$ به کمک مدل (۱۳) تغییر داده شد که نتایج به دست آمده از مدل (۱۳) با مقادیر مختلف β در جدول (۲) آمده است.

جدول ۲- توصیف آماری نتایج مدل (۱۳) برای ۱۵ شعبه کارای هزینه و نقاط تصویر ۳۲ شعبه ناکارا

$\beta = 0.97$	ρ_1	ρ_2	α	$\beta = 0.99$	ρ_1	ρ_2	α
DMU01	-	-	-	DMU01	0.00	1.00	0.9977
DMU02	0.00	1.00	0.9439	DMU02	0.00	1.00	0.9635
DMU03	-	-	-	DMU03	-	-	-
DMU04	0.00	1.00	0.9958	DMU04	0.00	1.00	0.9986
DMU05	-	-	-	DMU05	-	-	-
DMU06	-	-	-	DMU06	-	-	-
DMU07	0.00	1.00	0.9470	DMU07	0.00	1.00	0.9470
DMU08	-	-	-	DMU08	0.00	1.00	0.9692
DMU09	-	-	-	DMU09	0.00	1.00	0.9898

DMU10	-	-	-	DMU10	-	-	-
DMU11	-	-	-	DMU11	-	-	-
DMU12	-	-	-	DMU12	1.00	0.00	1.0299
DMU13	0.00	1.00	0.9522	DMU13	0.00	1.00	0.9522
DMU14	0.00	1.00	0.9927	DMU14	0.00	1.00	0.9987
DMU15	-	-	-	DMU15	-	-	-
DMU16	-	-	-	DMU16	-	-	-
DMU17	-	-	-	DMU17	-	-	-
DMU18	-	-	-	DMU18	-	-	-
DMU19	-	-	-	DMU19	0.00	1.00	0.9694
DMU20	0.00	1.00	0.9387	DMU20	0.00	1.00	0.9602
DMU21	-	-	-	DMU21	-	-	-
DMU22	-	-	-	DMU22	-	-	-
DMU23	-	-	-	DMU23	-	-	-
DMU24	0.00	1.00	0.9840	DMU24	0.00	1.00	0.9632
DMU25	-	-	-	DMU25	0.00	1.00	0.9950
DMU26	-	-	-	DMU26	-	-	-
DMU27	0.00	1.00	0.9782	DMU27	1.00	0.00	1.0005
DMU28	0.00	1.00	0.9620	DMU28	0.00	1.00	0.9727
DMU29	-	-	-	DMU29	0.00	1.00	0.9991
DMU30	0.00	1.00	0.9767	DMU30	0.00	1.00	0.9788
DMU31	0.00	1.00	0.9483	DMU31	0.00	1.00	0.9527
DMU32	-	-	-	DMU32	-	-	-
DMU33	-	-	-	DMU33	-	-	-
DMU34	1.00	0.00	1.0000	DMU34	1.00	0.00	1.0000
DMU35	-	-	-	DMU35	-	-	-
DMU36	1.00	0.00	0.9819	DMU36	1.00	0.00	0.9940
DMU37	0.00	1.00	0.9493	DMU37	1.00	0.00	1.0008
DMU38	-	-	-	DMU38	0.00	1.00	0.9352
DMU39	0.00	1.00	0.9520	DMU39	0.00	1.00	0.9520
DMU40	0.00	1.00	0.9557	DMU40	1.00	0.00	1.0008
DMU41	-	-	-	DMU41	-	-	-
DMU42	0.00	1.00	0.9557	DMU42	-	-	-
DMU43	1.00	0.00	1.0000	DMU43	1.00	0.00	1.0000
DMU44	0.00	1.00	0.9541	DMU44	1.00	0.00	1.0007
DMU45	0.00	1.00	0.8660	DMU45	0.00	1.00	0.8625
DMU46	0.00	1.00	0.9982	DMU46	1.00	0.00	1.0007
DMU47	-	-	-	DMU47	0.00	1.00	0.9961

$\beta = 1.01$	ρ_1	ρ_2	α	$\beta = 1.03$	ρ_1	ρ_2	α
DMU01	1.00	0.00	0.9999	DMU01	1.00	0.00	0.9996
DMU02	-	-	-	DMU02	-	-	-
DMU03	1.00	0.00	0.9994	DMU03	1.00	0.00	0.9981
DMU04	1.00	0.00	0.9992	DMU04	1.00	0.00	0.9975
DMU05	1.00	0.00	0.9997	DMU05	1.00	0.00	0.9992
DMU06	1.00	0.00	1.0000	DMU06	1.00	0.00	1.0000
DMU07	1.00	0.00	0.9998	DMU07	1.00	0.00	0.9995
DMU08	-	-	-	DMU08	-	-	-
DMU09	1.00	0.00	0.9982	DMU09	1.00	0.00	0.9945
DMU10	-	-	-	DMU10	-	-	-
DMU11	1.00	0.00	1.0000	DMU11	1.00	0.00	0.9999
DMU12	1.00	0.00	0.9986	DMU12	1.00	0.00	0.9959
DMU13	1.00	0.00	0.9998	DMU13	1.00	0.00	0.9995
DMU14	1.00	0.00	0.9990	DMU14	1.00	0.00	0.9971
DMU15	1.00	0.00	0.9997	DMU15	1.00	0.00	0.9992
DMU16	1.00	0.00	1.0000	DMU16	1.00	0.00	1.0001
DMU17	1.00	0.00	0.9991	DMU17	1.00	0.00	0.9973
DMU18	1.00	0.00	0.9985	DMU18	1.00	0.00	0.9954
DMU19	1.00	0.00	0.9994	DMU19	1.00	0.00	0.9982
DMU20	0.00	1.00	0.9961	DMU20	-	-	-
DMU21	1.00	0.00	1.0005	DMU21	1.00	0.00	1.0014
DMU22	-	-	-	DMU22	-	-	-
DMU23	-	-	-	DMU23	-	-	-
DMU24	1.00	0.00	0.9995	DMU24	1.00	0.00	0.9985
DMU25	1.00	0.00	0.9991	DMU25	1.00	0.00	0.9973
DMU26	1.00	0.00	0.9900	DMU26	1.00	0.00	0.9701
DMU27	0.00	1.00	0.9841	DMU27	0.00	1.00	0.9964
DMU28	1.00	0.00	0.9989	DMU28	1.00	0.00	0.9966
DMU29	1.00	0.00	0.9999	DMU29	0.00	1.00	0.9991
DMU30	0.00	1.00	0.9891	DMU30	-	-	-
DMU31	1.00	0.00	0.9990	DMU31	1.00	0.00	0.9971
DMU32	1.00	0.00	0.9982	DMU32	1.00	0.00	0.9947
DMU33	-	-	-	DMU33	-	-	-
DMU34	0.00	1.00	0.9947	DMU34	-	-	-
DMU35	1.00	0.00	0.9997	DMU35	1.00	0.00	0.9991
DMU36	-	-	-	DMU36	-	-	-
DMU37	0.00	1.00	0.9859	DMU37	-	-	--
DMU38	1.00	0.00	0.9983	DMU38	1.00	0.00	0.9948
DMU39	1.00	0.00	0.9992	DMU39	1.00	0.00	0.9977
DMU40	0.00	1.00	0.9935	DMU40	-	-	-

DMU41	-	-	-	DMU41	-	-	-
DMU42	0.00	1.00	0.9728	DMU42	-	-	-
DMU43	0.00	1.00	0.9622	DMU43	0.00	1.00	0.9648
DMU44	0.00	1.00	0.9891	DMU44	-	-	-
DMU45	0.00	1.00	0.8590	DMU45	0.00	1.00	0.8555
DMU46	-	-	-	DMU46	-	-	-
DMU47	1.00	0.00	0.9988	DMU47	1.00	0.00	0.9964

خلاصه این نتایج برای تحلیل بهتر داده‌ها در جدول (۳) آمده است.

جدول ۳- خلاصه نتایج جدول (۲)

$\beta = 0.97$	$\beta = 0.99$	$\beta = 1.01$	$\beta = 1.03$
$\alpha(\beta) > 0.97$: ۹	$\alpha(\beta) > 0.99$: ۱۵	$\alpha(\beta) > 1.01$: ۰	$\alpha(\beta) > 1.03$: ۰
$\alpha(\beta) < 0.97$: ۱۲	$\alpha(\beta) < 0.99$: ۱۴	$\alpha(\beta) < 1.01$: ۳۸	$\alpha(\beta) < 1.03$: ۳۱
Inf. response: ۲۶	Inf. response: ۱۸	Inf. response: ۹	Inf. response: ۱۶
No. of $\rho_1 = 1$: ۳	No. of $\rho_1 = 1$: ۹	No. of $\rho_1 = 1$: ۲۸	No. of $\rho_1 = 1$: ۲۷
محدوده تغییرات α از ۰/۹۸۱۹ تا ۱	محدوده تغییرات α از ۰/۹۹۴۰ تا ۱/۰۲۹۹	محدوده تغییرات α از ۰/۹۹۰۰ تا ۱/۰۰۰۵	محدوده تغییرات α از ۰/۹۷۰۱ تا ۱/۰۰۱۴
No. of $\rho_2 = 1$: ۱۸	No. of $\rho_2 = 1$: ۲۰	No. of $\rho_2 = 1$: ۱۰	No. of $\rho_2 = 1$: ۴
محدوده تغییرات α از ۰/۹۹۸۲ تا ۰/۸۶۶۰	محدوده تغییرات α از ۰/۹۹۹۱ تا ۰/۸۶۲۳	محدوده تغییرات α از ۰/۹۹۶۱ تا ۰/۸۵۹۰	محدوده تغییرات α از ۰/۹۹۹۱ تا ۰/۸۵۵۵

همانطور که از نتایج پیداست به ازای مقدار ۰/۹۷ برای β ۲۶ جواب نشدنی و در نتیجه ۲۱ جواب شدنی به دست آمده است و ۹ شعبه تابع پاسخی بیشتر از ۰/۹۷ و ۱۲ شعبه تابع پاسخی کمتر از ۰/۹۷ دارند. در ۳ شعبه برای کم کردن هزینه باید ورودی‌ها به عنوان تابع پاسخ تغییر کنند و در ۱۸ شعبه باید خروجی‌های مطلوب تغییر یابند. در این حالت وقتی خروجی نامطلوب (مطالبات معوق بانک) به اندازه ۰/۹۷ کاهش می‌یابد، ۳ شعبه باید ورودی‌های خود را در فاصله ۰/۹۸۱۹ تا ۱ کاهش داده و ۱۸ شعبه باید در خروجی‌های خود تغییر ایجاد کنند تا هزینه کاهش یابد و همچنین وقتی β مقدار ۱/۰۱ را می‌گیرد یعنی در خروجی نامطلوب به اندازه ۰/۰۱ افزایش ایجاد کنیم در ۲۸ شعبه برای کاهش هزینه مقدار ورودی‌ها در فاصله ۰/۹۹۰۰ تا ۱/۰۰۰۵ باید تغییر یابد و در ۱۰ شعبه خروجی‌ها نیازمند به تغییر برای کاهش هزینه می‌باشند. همینطور در مورد β های برابر با ۰/۹۹ و ۱/۰۳ می‌توان نتایج را بررسی کرد.

در پایان کار، مدل‌های (۱۶) و (۱۷) را برای محاسبه کشسانی راست و کشسانی چپ این ۱۵ شعبه کارای هزینه باضافه ۳۲ نقطه تصویر شعب ناکارا به ازای مقادیر مختلف β به کار بردیم. توصیف آماری برای تمام DMUها در جدول (۴) آمده است.

جدول ۴- کشسانی راست و چپ به ازای مقادیر مختلف β

شعبه	$\beta = 0.97$			$\beta = 0.97$			$\beta = 0.99$			$\beta = 0.99$		
	ρ_0^+	ρ_1	ρ_2	ρ_0^-	ρ_1	ρ_2	ρ_0^+	ρ_1	ρ_2	ρ_0^-	ρ_1	ρ_2
1	-0.1094	0	1	0.2109	0	1	-0.1116	0	1	0.2110	0	1
2	-0.1094	0	1	0.3495	0	1	-0.1116	0	1	0.3507	0	1
3	-0.1094	0	1	0.1644	0	1	-0.1116	0	1	0.1631	0	1
4	-0.1094	0	1	0.0608	0	1	-0.1116	0	1	0.0608	0	1
5	-0.1094	0	1	0.0864	0	1	-0.1116	0	1	0.0860	0	1
6	-0.1094	0	1	0.1418	0	1	-0.1116	0	1	0.1415	0	1
7	-0.1094	0	1	0.1101	0	1	-0.1116	0	1	0.1097	0	1
8	-0.1094	0	1	0.2571	0	1	-0.1116	0	1	0.2578	0	1
9	-0.1094	0	1	0.1984	0	1	-0.1116	0	1	0.1980	0	1
10	-0.1094	0	1	2.9704	0	1	-0.1116	0	1	2.9720	0	1
11	-0.1094	0	1	0.1272	0	1	-0.1116	0	1	0.1273	0	1
12	0.0000	1	0	0.0598	0	1	0.0000	1	0	0.0595	0	1
13	-0.1094	0	1	0.1130	0	1	-0.1116	0	1	0.1130	0	1
14	-0.1094	0	1	0.0827	0	1	-0.1116	0	1	0.0827	0	1
15	-0.1094	0	1	0.0585	0	1	-0.1116	0	1	0.0583	0	1
16	-0.1094	0	1	0.3296	0	1	-0.1116	0	1	0.3285	0	1
17	-0.1094	0	1	0.0615	0	1	-0.1116	0	1	0.0612	0	1
18	-0.1094	0	1	0.1098	0	1	-0.1116	0	1	0.1094	0	1
19	-0.1094	0	1	0.0943	0	1	-0.1116	0	1	0.0941	0	1
20	-0.1094	0	1	0.2899	0	1	-0.1116	0	1	0.2908	0	1
21	-0.1094	0	1	0.0664	0	1	-0.1116	0	1	0.0660	0	1
22	-0.1127	1	0	0.2261	0	1	-0.1127	1	0	0.2258	0	1
23	-0.1094	0	1	2.6251	0	1	-0.1116	0	1	2.6279	0	1
24	-0.1094	0	1	0.1024	0	1	-0.1116	0	1	0.1022	0	1
25	-0.1094	0	1	0.1725	0	1	-0.1116	0	1	0.1724	0	1
26	-0.1094	0	1	0.0750	0	1	-0.1116	0	1	0.0730	0	1
27	-0.1094	0	1	0.2716	0	1	-0.1116	0	1	0.2715	0	1
28	-0.1094	0	1	0.1490	0	1	-0.1116	0	1	0.1493	0	1
29	-0.1094	0	1	0.2024	0	1	-0.1116	0	1	0.2028	0	1
30	-0.1094	0	1	0.2143	0	1	-0.1116	0	1	0.2149	0	1
31	-0.1094	0	1	0.1799	0	1	-0.1116	0	1	0.1794	0	1
32	-0.1094	0	1	0.1148	0	1	-0.1116	0	1	0.1144	0	1
33	-0.1094	0	1	0.1148	0	1	-0.1116	0	1	0.1144	0	1
34	-0.1094	0	1	0.4183	0	1	-0.1116	0	1	0.4194	0	1
35	-0.1094	0	1	0.5030	0	1	-0.1116	0	1	0.5039	0	1
36	-0.1094	0	1	1.4738	0	1	-0.1116	0	1	1.4844	0	1
37	-0.1094	0	1	0.2376	0	1	-0.1116	0	1	0.2380	0	1
38	-0.1094	0	1	0.1587	0	1	-0.1116	0	1	0.1583	0	1

39	-0.1094	0	1	0.1095	0	1	-0.1116	0	1	0.1091	0	1
40	-0.1094	0	1	0.3830	0	1	-0.1116	0	1	0.3839	0	1
41	-0.1094	0	1	0.6061	0	1	-0.1116	0	1	0.6071	0	1
42	-0.1094	0	1	0.6471	0	1	-0.1116	0	1	0.6490	0	1
43	-0.1094	0	1	0.0904	0	1	-0.1116	0	1	0.0905	0	1
44	-0.1094	0	1	0.2954	0	1	-0.1116	0	1	0.2959	0	1
45	-0.1094	0	1	0.0881	0	1	-0.1116	0	1	0.0879	0	1
46	-0.1094	0	1	0.5139	0	1	-0.1116	0	1	0.5159	0	1
47	-0.1094	0	1	0.1567	0	1	-0.1116	0	1	0.1563	0	1

شعبه	$\beta = 1.01$			$\beta = 1.01$			$\beta = 1.03$			$\beta = 1.03$		
	ρ_0^+	ρ_1	ρ_2	ρ_0^-	ρ_1	ρ_2	ρ_0^+	ρ_1	ρ_2	ρ_0^-	ρ_1	ρ_2
1	-1.2008	0	1	0.2110	0	1	-1.3475	0	1	0.2110	0	1
2	-1.1454	0	1	0.3518	0	1	-1.1815	0	1	0.3530	0	1
3	-1.2393	0	1	0.1619	0	1	-1.4632	0	1	0.1607	0	1
4	-1.1647	0	1	0.0608	0	1	-1.2392	0	1	0.0609	0	1
5	-1.3724	0	1	0.0856	0	1	-1.8624	0	1	0.0851	0	1
6	-1.6584	0	1	0.1412	0	1	-2.7203	0	1	0.1409	0	1
7	-1.1791	0	1	0.1092	0	1	-1.2824	0	1	0.1088	0	1
8	-1.1462	0	1	0.2586	0	1	-1.1839	0	1	0.2593	0	1
9	-1.2078	0	1	0.1977	0	1	-1.3685	0	1	0.1974	0	1
10	-4.0324	0	1	2.9736	0	1	-9.8423	0	1	2.9751	0	1
11	-1.1934	0	1	0.1274	0	1	-1.3254	0	1	0.1274	0	1
12	-1.2176	0	1	0.0593	0	1	-1.3979	0	1	0.0590	0	1
13	-1.1733	0	1	0.1130	0	1	-1.2651	0	1	0.1130	0	1
14	-1.1722	0	1	0.0827	0	1	-1.2618	0	1	0.0826	0	1
15	-1.5969	0	1	0.0580	0	1	-2.5359	0	1	0.0577	0	1
16	-1.9133	0	1	0.3273	0	1	-3.4852	0	1	0.3262	0	1
17	-1.4235	0	1	0.0609	0	1	-2.0156	0	1	0.0606	0	1
18	-1.2020	0	1	0.1091	0	1	-1.3513	0	1	0.1087	0	1
19	-1.3731	0	1	0.0939	0	1	-1.8646	0	1	0.0938	0	1
20	-1.1452	0	1	0.2917	0	1	-1.1807	0	1	0.2927	0	1
21	-1.4064	0	1	0.0656	0	1	-1.9644	0	1	0.0652	0	1
22	-1.2114	0	1	0.2256	0	1	-1.3793	0	1	0.2254	0	1
23	-1.2400	0	1	2.6307	0	1	-1.4653	0	1	2.6334	0	1
24	-1.1810	0	1	0.1021	0	1	-1.2882	0	1	0.1019	0	1
25	-1.2062	0	1	0.1723	0	1	-1.3638	0	1	0.1722	0	1
26	-1.5786	0	1	0.0720	0	1	-2.4810	0	1	0.0717	0	1
27	-1.2001	0	1	0.2715	0	1	-1.3456	0	1	0.2714	0	1
28	-1.1694	0	1	0.1495	0	1	-1.2534	0	1	0.1497	0	1
29	-1.1659	0	1	0.2032	0	1	-1.2428	0	1	0.2035	0	1

30	-1.1467	0	1	0.2154	0	1	-1.1852	0	1	0.2159	0	1
31	-1.1835	0	1	0.1790	0	1	-1.2958	0	1	0.1785	0	1
32	-1.1936	0	1	0.1140	0	1	-1.3259	0	1	0.1137	0	1
33	-1.1403	0	1	0.1140	0	1	-1.1660	0	1	0.1137	0	1
34	-1.1534	0	1	0.4205	0	1	-1.2054	0	1	0.4216	0	1
35	-1.1790	0	1	0.5048	0	1	-1.2822	0	1	0.5057	0	1
36	-1.1415	0	1	1.4950	0	1	-1.1696	0	1	1.5055	0	1
37	-1.1603	0	1	0.2384	0	1	-1.2262	0	1	0.2388	0	1
38	-1.2040	0	1	0.1579	0	1	-1.3571	0	1	0.1574	0	1
39	-1.1826	0	1	0.1087	0	1	-1.2931	0	1	0.1083	0	1
40	-1.1531	0	1	0.3848	0	1	-1.2044	0	1	0.3857	0	1
41	-1.1996	0	1	0.6081	0	1	-1.3441	0	1	0.6091	0	1
42	-1.1603	0	1	0.6508	0	1	-1.2262	0	1	0.6526	0	1
43	-1.1491	0	1	0.0907	0	1	-1.1925	0	1	0.0908	0	1
44	-1.1600	0	1	0.2964	0	1	-1.2251	0	1	0.2969	0	1
45	-1.2221	0	1	0.0876	0	1	-1.4114	0	1	0.0874	0	1
46	-1.1474	0	1	0.5180	0	1	-1.1873	0	1	0.5200	0	1
47	-1.2150	0	1	0.1560	0	1	-1.3903	0	1	0.1556	0	1

همانطور که می‌دانیم و پیشتر نیز اشاره شد، کشسانی تنها برای واحدهای کارا تعریف می‌شود و برای واحدهای ناکارا تصاویر شعاعی ورودی محور یا خروجی محور واحدها در نظر گرفته می‌شود. که ما در اینجا تصویر ورودی محور را در نظر گرفته‌ایم. با توجه به جدول (۴) و مقادیر کشسانی راست و چپ می‌توان دید که در شعب ۱۰، ۲۳ و ۳۶ نسبت به مقادیر مختلف β کشسانی راست کمتر از یک و کشسانی چپ بیشتر از یک و در بقیه شعب مقادیر کشسانی راست و چپ برای مقادیر مختلف β کمتر از یک می‌باشد. به کمک جدول فوق می‌توان بررسی کرد که با افزایش یا کاهش خروجی‌های نامطلوب به اندازه ۰/۰۱ و ۰/۰۳، خروجی‌های مطلوب یا ورودی‌ها کدام و به چه میزان افزایش یا کاهش می‌یابند. به عنوان مثال در شعبه ۵ با توجه به مقادیر کران بالا و پایین کشسانی برای $\beta = 1.01$ ، با افزایش خروجی نامطلوب به اندازه ۰/۰۱، خروجی مطلوب به اندازه ۱/۳۷۲۴ و ۰/۰۸۵۶ افزایش می‌یابد. همچنین در شعبه ۱۲ به ازای $\beta = 0.99$ ، با توجه به مقادیر کران بالا و پایین کشسانی، با کاهش خروجی نامطلوب به اندازه ۰/۰۱ ورودی به اندازه ۰/۲۵۷۸ باید کاهش یابد. خلاصه این نتایج برای تحلیل بهتر داده‌ها در جدول (۵) آمده است.

جدول ۵- خلاصه کشسانی راست و چپ به ازای مقادیر مختلف β

	$\beta = 0.97$		$\beta = 0.99$		$\beta = 1.01$		$\beta = 1.03$	
	ρ_0^+	ρ_0^-	ρ_0^+	ρ_0^-	ρ_0^+	ρ_0^-	ρ_0^+	ρ_0^-
min	-0.1127	0.598	-0.1127	0.0583	-4.0324	0.058	-9.8423	0.0577
max	0	2.9704	0	2.972	-1.1403	2.9736	-1.1660	2.9751
Inf. response:	0	0	0	0	0	0	0	0
No. of $\rho_1 = 1$:	2	0	2	0	0	0	0	0
No. of $\rho_2 = 1$:	45	47	45	47	47	47	47	47

همانطور که در جداول (۵) ملاحظه می‌شود کمترین مقدار کشسانی راست به ازای $\beta = 1.03$ برابر با $9/8423$ - و بیشترین مقدار کشسانی راست به ازای $\beta = 0.99, \beta = 0.97$ و برابر با صفر می‌باشد. همچنین کمترین مقدار کشسانی چپ به ازای $\beta = 1.03$ و برابر با $0/0577$ و بیشترین مقدار کشسانی چپ نیز به ازای $\beta = 1.03$ و برابر با $2/9751$ به دست آمده است. همچنین ملاحظه می‌شود که در $\beta = 0.97$ در مورد کشسانی راست تمام جواب‌ها شدنی بوده در ۴۵ شعبه خروجی‌ها نیازمند تغییرند و در دو شعبه ورودی‌ها باید تغییر کنند و در مورد کشسانی چپ نیز جواب نشدنی نداریم و ورودی‌ها بدون تغییر می‌مانند و در ۴۷ شعبه در خروجی‌ها باید تغییر حاصل شود. همینطور در مورد بقیه مقادیر β می‌توان نتیجه‌گیری کرد. با توجه به نتایج جدول ۴ و خلاصه شده آن در جدول ۵ می‌توان بررسی کرد که با تغییر مقدار جزئی از خروجی نامطلوب، ورودی یا خروجی مطلوب کدام و به چه میزان باید تغییر کنند.

۵. نتیجه‌گیری

کشسانی مقیاس و بازده به مقیاس دو ابزار کلیدی برای ارزیابی عملکرد واحدها هستند زمانی که یک DMU افزایش یا کاهش یابد تعیین می‌کنند که زمینه برای افزایش بهره‌وری وجود دارد یا خیر. در این مقاله روی اندازه کشسانی مقیاس بر اساس مدل کارایی هزینه متمرکز شده و یک فرمول برای محاسبه کشسانی بر اساس هزینه واحدها نوشته شد. همچنین در مورد اندازه‌گیری کشسانی براساس انتخاب ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب پس از تغییر خروجی‌های نامطلوب بحث شد. برای نشان دادن کاربرد این روش، مدل روی داده‌های واقعی ۴۷ شعبه از درجه ۲ و درجه ۳ یکی از بانک‌های استانی کشور پیاده شد. نتایج به دست آمده در این مقاله می‌تواند کمک مالی در جهت کم کردن هزینه‌ها به بانک استانی کشور ارائه دهد. در این مقاله نشان داده شد که چگونه می‌توان با تغییر اندکی در خروجی‌های نامطلوب، ورودی‌ها یا خروجی‌های مطلوب را به عنوان تابع پاسخ انتخاب کرد تا هزینه‌ها را کاهش داد. به عنوان یک پیشنهاد برای تحقیقات آینده، می‌توان مدل فوق را در حالت تصادفی انجام داد. همچنین می‌توان همین کار را برای ساختارهای شبکه‌ای هم به کار برد.

فهرست منابع

- [1] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W.W., 1984. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*. 30, 1078-1092.
- [2] Banker, R. D. and R. M. Thrall. (1992). "Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis." *European Journal of Operational Research* 62, 74-84.
- [3] Forsund, F.R. and L. Hjalmarsson. (2004). "Are All Scales Optimal in DEA Theory and Empirical Evidence." *Journal of Productivity Analysis*, 21, 25-48.
- [4] Førsund, F. R., Hjalmarsson, L., Krivonozhko, V. E., & Utkin, O. B., 2007a. Calculation of scale elasticity in DEA models: direct and indirect approaches. *Journal of Productivity Analysis* 28, 45-56.
- [5] Krivonozhko, V.E., Volodin, A.V., Sablin, I.A., Patrin, M., 2004. Constructions of economic functions and calculation of marginal rates in DEA using parametric optimization methods. *Journal of the Operational Research Society* 55, 1049-1058.
- [6] Førsund, F.R., Kittelsen, S.A.C., Krivonozhko, V.E., 2007b. Farrell revisited: Visualising the DEA production frontier. Memorandum 15/2007, Department of Economics, University of Oslo.
- [7] Podinovski, V. V., Førsund, F. R., Krivonozhko, & V. E., 2009. A simple derivation of scale elasticity in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research* 197, 149-153.
- [8] Podinovski, V. V., & Førsund, F. R., 2010. Differential characteristics of efficient frontiers in data envelopment analysis. *Operations Research* 58, 1743-1754.
- [9] Atici, K. B., and Podinovski, V. V., 2012. Mixed partial elasticities in constant returns-to-scale production technologies. *European Journal of Operational Research* 220, 262-269.
- [10] Zelenyuk V., 2013. A scale elasticity measure for directional distance function and its dual: Theory and DEA estimation. [*European Journal of Operational Research*, 228\(3\)](#), 592-600.
- [11] Sahoo B., & Tone K., 2015. Scale Elasticity in Non-parametric DEA Approach. In: Zhu J. (eds) *Data Envelopment Analysis. International Series in Operations Research & Management Science*, 221. Springer, Boston, MA.
- [12] Mirjafari, M., & Kazemi Matin, R., 2015. Computation of scale elasticity in presence of exogenously fixed inputs. *Measurement*. 73, 275-283.
- [13] Krivonozhko V.E., Førsund F.R., Lychev A.V. (2014) Measurement of returns to scale using non-radial DEA models *European Journal of Operational Research* 232(3): 664-670.
- [14] Krivonozhko, V. E., Lychev, A. V., & Førsund, F. R. (2017). Measurement of returns to scale in radial DEA models. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 57(1), 83-93.
- [15] Sahoo, B. K., Zhu, J., Tone, K., & Klemen, B. M. (2014). Decomposing technical efficiency and scale elasticity in tow-stage network DEA. *European Journal of Operational Research*, 233(3), 584-594.

- [16] Khaleghi, M., Jahanshahloo, G., Zohrehbandian, M., & Lotfi, F. H. (2012). Returns to scale and scale elasticity in two-stage DEA. *Mathematical and computational applications*, 17(3), 193-202.
- [17] Mirjaberi, M., & Kazemi Matin, R. (2016). On the calculation of directional scale elasticity in data envelopment analysis. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 33(04), 1650026.
- [18] Amirmohammadi, H., Amirteimoori, A. A., Kordrostami, S., & Vaez-Ghasemi, M. (2021). Scale elasticity in the presence of integer data: An application to electricity distribution companies. *Studies of Applied Economics*, 39(2).
- [19] Amirmohammadi, H., Amirteimoori, A., Kordrostami, S., & Ghasemi, M. V. Scale elasticity in the presence of undesirable and nondiscretionary factors: an application to bank branches. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 101.
- [20] Fathi Ajirlu, S., Amirteimoori, A., & Kordrostami, S., Measuring the cost efficiency in NDEA. *Journal of New Researches in Mathematics*, 2020, 6(27), 141-154.
- [21] Sarab, R. G., Amirteimoori, A., Malek, A., & Kordrostami, S. (2021). Cost efficiency analysis in data envelopment analysis framework: An application to sugar industries. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 42(5), 1137-1161.
- [22] Azizi Usefvand, R., Kordrostami, S., Amirteimoori, A., & Daneshmand-Mehr, M. (2022). Estimating the directional scale elasticity of two-stage processes in the presence of undesirable outputs. *Modern Research in Decision Making*.
- [23] Farrell, M. J., 1957. The measurement of productive efficiency. *Journal of the royal statistical society*. 120, 253-290.
- [24] Debreu (1951), The coefficient of resource utilization, *Econometrica* 19, pp.273-292.
- [25] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., (1985). The measurement of efficiency of production. Kluwer-Nijhoff, Boston.
- [26] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K., (2000). Data Envelopment Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [27] Tone, K., Sahoo, B. K. (2006). Re-examining scale elasticity in DEA. *Annals of Operations Research*, 145, 69-87.
- [28] Sahoo, B. K., Tone, K. (2017). Determining returns to scale in the VRS DEA model. *Advances in DEA Theory and Applications: With Extensions to Forecasting Models*, 33-39.
- [29] Hailu, A., Veeman, T. S., (2001). Nonparametric productivity analysis with undesirable outputs: An application to the Canadian pulp and paper industry. *American Journal of Agricultural Economics*, 85, 1075-1077.
- [30] Seiford, L., and Zhu, J., (2002). Models for undesirable factors in efficiency evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142, 16-20.
- [31] Färe, R., Grosskopf, S., (2003). Nonparametric productivity analysis with undesirable outputs: comment. *American Journal of Agricultural Economics*, 85, 1070-1074.
- [32] Kuosmanen, T., (2005). Weak disposability in nonparametric production analysis with undesirable outputs. *American Journal of Agricultural Economics*, 87, 1077-1082.