

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و پنجم، مرداد و شهریور ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

بررسی ویژگی‌های ساختار ریاضی، تطابق ریاضی و درجه انتزاع در بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده دانش‌آموزان پایه چهارم

فاطمه زارعی^۱، مجید حق‌وردی^{۲*}

^(۱) گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

^(۲) گروه ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۱۲/۱۷

چکیده

هدف این پژوهش، بررسی ویژگی‌های بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده (ساختار ریاضی، تطابق ریاضی، درجه انتزاع) دانش‌آموزان بر اساس چارچوب معرفی شده توسط اوت (۲۰۱۶) در حل مسایل کلامی ریاضی است. از این رو به بررسی تاثیر چگونگی در نظر گرفتن ساختار ریاضی در بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط دانش‌آموزان و اینکه چگونه آنها از تطابق ریاضی با مسئله کلامی اطمینان حاصل می‌کنند و میزان درجه انتزاع آنها پرداخته شد. در این مطالعه از طرح‌ها و نقاشی‌های دانش‌آموزان به عنوان بازنمایی‌های گرافیکی استفاده گردید. در این پژوهش ۱۲۴ دانش‌آموز پایه چهارم مدارس شهر تهران شرکت کردند. داده‌ها از طریق سه آزمون (پیش آزمون، پس آزمون و آزمون پیگیری) در فاصله دو روز متوالی جمع‌آوری شد و آزمون‌ها از ۸ مساله کلامی طراحی شد. پس از پیش آزمون مداخله‌ای ۴ هفته‌ای برگزار شده هر هفته به دانش‌آموزان یک مساله کلامی ریاضی داده شد و از آنها خواسته شد بر اساس مدل ککس (۱۹۹۹) بازنمایی گرافیکی برای آن ترسیم کنند که شامل همه مواردی بود که برای درک مساله لازم است. سپس از برخی دانش‌آموزان خواسته شد که بازنمایی خود را در کلاس ارائه دهند، همه مواردی بود که برای درک مساله لازم است. پس از جمع‌آوری و تحلیل مستندات دانش‌آموزان، یافته‌ها نشان داد که دانش‌آموزان توجه بیشتری به ساختار ریاضی مناسب دارند. همچنین در تطابق ریاضی برای عملگرها، نمایش مقادیر و واحدها از نظر آماری قابل توجه بود اما دانش‌آموزان درجه انتزاع را نسبتاً ثابت نگه داشتند.

واژه‌های کلیدی: حل مساله، ساختار ریاضی، تطابق ریاضی، درجه انتزاع.

۱- مقدمه

اهمیت مسائل کلامی در برنامه درسی ریاضی، از یک سو و دشواری حل آنها از سوی دیگر سبب شده است تا پژوهشگران آموزش ریاضی و روان‌شناسانی که علاقمند به پژوهش در حوزه ریاضی هستند به بررسی فرایند حل مسائل کلامی ریاضی، توجه ویژه‌ای داشته باشند (بورنز، ۲۰۰۰). برخی مطالعات نشان داده‌اند که استفاده از بازنمایی‌های بصری و ملموس، عملکرد را در حل مسائل کلامی بهبود می‌بخشند. تحقیقات نشان داده‌اند اگر استفاده از بازنمایی‌ها به درستی صورت نگیرد ممکن است در روند یادگیری اختلال ایجاد شود مگر آن که یادگیرنده بتواند هر بازنمایی را به طور جداگانه تفسیر کند یا بین انواع بازنمایی‌ها ارتباط و اتصال برقرار کند. در انجام یک فعالیت ریاضی، استفاده از دست نوشته‌ها، یعنی بازنمایی‌هایی که به شکل فیزیکی وجود دارند، امری ضروری است (رُت و ام سی جین، ۱۹۹۸ [1] زیرا بدون بدون چنین بازنمایی‌های فیزیکی، دستیابی به درک ریاضی عملاً غیرممکن است (دُفلر ۲۰۰۸، گلدین و شین گلد ۲۰۰۱ [2,3]. بازنمایی در حال حاضر به عنوان یک صلاحیت ریاضی در استانداردها و برنامه‌های درسی بسیاری از کشورها به عنوان یک اصل محسوب می‌شود. این صلاحیت اغلب با حل مسئله در ارتباط است. علاوه بر این، در برخی تحقیقات، استفاده منعطف‌تری از بازنمایی‌های مختلف برای حل مسئله ریاضی را ضروری قلمداد می‌کنند (هِنز استار و ورشافل ۲۰۰۹ [4]. شورای ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰ [5] اظهار می‌دارد که بازنمایی، ترجمه یک مسئله یا ایده به شکلی جدید، از جمله یک تصویر یا مدل فیزیکی به شکل نمادها، کلمات یا عبارات است. به طور خاص بازنمایی‌های گرافیکی به عنوان ابزاری برای حل مسائل کلامی آموزش داده می‌شوند و توصیفات نوشتاری و بصری به عنوان ابزاری برای درک فرایندهای تفکر دانش‌آموزان عمل می‌کند. همبری (۱۹۹۲ [6] اذعان داشت که در فرایند حل مساله تولید یک بازنمایی گرافیکی به عنوان یک رهیافت مهم در نظر گرفته می‌شود. در همان زمان، اغلب گزارش می‌شد که بسیاری از یادگیرندگان به ندرت از بازنمایی‌های گرافیکی به عنوان یک رهیافت اکتشافی استفاده می‌کنند (فگننت و ولایسیس ۲۰۱۳ لوپز و ولو ۱۹۹۳ [7,8] این امر به ویژه در دوره ابتدایی مشهود است، جایی که مداخلات شامل بازنمایی‌های گرافیکی برای حل مسئله قابل توجه است (همبری، ۱۹۹۲ [6]. در مطالعات مداخله‌ای، بازنمایی‌های گرافیکی بیشتر به عنوان ابزاری برای حل مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرند (وَن اِسَن و هماکر ۱۹۹۰ [9]. هدف این مطالعه بررسی این سوال است که چگونه بازنمایی‌های گرافیکی ایجاد شده توسط یادگیرنده هنگامی که به عنوان مستندات برای دیگران مطرح می‌شوند و در کلاس بازتاب می‌یابند، توسعه می‌یابند و منجر به تسهیل در فرایند حل مسئله می‌شوند.

۲- چارچوب نظری تحقیق

حق‌وردی (۱۳۹۳ [۱۰]، به نقل از مایر (۱۹۹۲) از منظر روان‌شناسی شناختی، دو فرایند «فهمیدن مسئله و تشکیل بازنمایی از متن مسئله و جستجوی فضای مسئله در حافظه» و «پیدا کردن راه‌حل» برای حل مسائل کلامی ریاضی را، شناسایی کرده است. او معتقد است که کار اصلی در حل مسائل کلامی، درک و فهمیدن مسئله است و به طور کلی، طراحی حل مسئله، از بازنمایی درست مسئله نشأت می‌گیرد. گلدین و اشتینگولد (۲۰۰۱) تمایز بین اشکال مختلف بازنمایی را مطرح کردند. به نظر آنها تمایز بین بازنمایی‌های توصیفی^۱ و تصویری^۲ (شونتز، ۲۰۰۲ [11] در مورد بازنمایی گرافیکی برای مسائل کلامی مفید است. مسائل کلامی مثال خاصی از بازنمایی‌های توصیفی هستند، در حالی که بازنمایی‌های گرافیکی زیرمجموعه‌ای از بازنمایی‌های تصویری را تشکیل می‌دهند. بازنمایی‌های توصیفی از نمادها تشکیل شده‌اند و با محتوایی که به وسیله یک قرارداد ارائه می‌کنند مرتبط هستند. پژوهشگران بسیاری طی تحقیقات متعدد، نشان دادند که بازنمایی‌های تصویری، نقش مهمی در درک مفاهیم و فرایند حل مسئله در دوره ابتدایی و متوسطه دارند (گولدین ۲۰۰۱؛ ون‌گاردن و مونتاگو ۲۰۰۳؛ مونز و همکاران، ۲۰۱۳؛ کی و کلارک، ۲۰۱۸ [12,13,14]. برای نمونه، کلاین و همکاران (۱۹۹۸) به این نتیجه رسیدند که در ریاضی پایه

^۱ Descriptive^۲ Depictive

دوم دوره ابتدایی، استفاده از محور اعداد به عنوان یک مدل قوی برای نمایش اعداد، در یادگیری جمع و تفریق اعداد تا ۱۰۰ توسط کودکان، نقش مهمی ایفا می‌کند. این در حالی است که محور اعداد، از یک مدل هندسی شامل یک تبادل پیوسته بین بازنمایی هندسی و حسابی تشکیل شده است که بر اساس بعد هندسی، اعداد نمایش داده شده بر محور، متناظر با بردارها هستند. ولی از بعد حسابی، اعداد متناظر با نقطه‌های روی محورند. در نتیجه، حضور هم‌زمان این دو نوع مفهوم‌سازی، ممکن است تأثیرپذیری محور اعداد را محدود کند و عملکرد مورد انتظار دانش‌آموزان را در انجام تکلیف‌های حسابی، به تأخیر اندازد (حق وردی و گویا، ۱۳۹۸) [۱۵].

مسائل کلامی اشکالی از بازنمایی‌های توصیفی هستند. مسائل کلامی می‌توانند به عنوان تکالیفی که در قالب متن ارائه می‌گردد فهمیده شوند (شیپر، ۲۰۰۹) [16] و بر روی روابط ریاضی که به صورت شفاهی توصیف شده‌اند، تمرکز دارند. مسائل کلامی متفاوت از لحاظ معنایی می‌توانند روابط ریاضی یکسانی را توصیف کنند و به عملیات ریاضی یکسانی منتهی شوند (ورشافل و گریر و دی کورت، ۲۰۰۰) [17]. لازم به ذکر است که تغییر ساختار سطحی زبان نیز می‌تواند بر دشواری حل مسایل کلامی ریاضی تأثیر بگذارد (حق وردی و ویست، ۲۰۱۶) [18]. به عنوان مثال، اگر اطلاعات موجود در متن به ترتیب لازم برای ارائه داده‌ها ذکر شده باشد، این امر تأثیر مثبتی بر روند حل دارد (استرن، ۱۹۹۸). استفاده از مسائل کلامی اغلب مورد انتقاد برخی پژوهشگران از جمله ورشافل و همکاران (۲۰۰۰) قرار گرفته است: یکی از انتقادات اصلی این است که مسائل کلامی که در تمرین‌های کلاس درس به کار گرفته می‌شود، اغلب هیچ نمودی در دنیای واقعی ندارند، بلکه مسائل تصنعی هستند. در همان زمان، گزارش شده است که دانش‌آموزان اغلب "این مسائل را به روشی کلیشه‌ای و روتین حل می‌کنند" (ورشافل و همکاران، ۲۰۰۰). با این حال، بسته به نحوه استفاده از آنها در تدریس، مسائل کلامی همچنین توانایی توسعه چندین صلاحیت ریاضی را دارند (ورشافل و همکاران، ۲۰۰۰). به عنوان مثال، می‌توان از آنها برای ایجاد ساختارهای جدید ریاضی، نمادسازی مفاهیم و برای کشف مدل‌سازی برخی پدیده‌ها در جریان کلاس درس استفاده کرد (ورشافل و همکاران، ۲۰۰۰). بازنمایی‌های گرافیکی نیز اشکالی از بازنمایی‌های تصویری هستند. واژه گرافیک به بازنمایی‌هایی اطلاق می‌شود که از نمایش برخی خط‌ها و خش‌ها تشکیل شده است (ککس، ۱۹۹۹) [19]. طرح‌ها و ترسیم‌ها می‌توانند به عنوان بازنمایی‌های گرافیکی درک شوند. در این پژوهش، منظور از بازنمایی گرافیکی همان بازنمایی ایجاد شده به وسیله قلم بر کاغذ توسط دانش‌آموز است. استرن، اپریا و اینر (۲۰۰۳) معتقدند که بازنمایی‌های گرافیکی با جنبه‌هایی از فضا مشخص می‌شوند که بر روی عناصر محتوا ترسیم می‌شوند. بنابراین در بازنمایی‌های گرافیکی به دلیل موقعیت تک تک عناصر، روابط مستقیماً آشکار می‌شود (لرکین و سیمون، ۱۹۸۷) [20].

۱-۲ بازنمایی‌های گرافیکی برای مسائل کلامی

نظر به مطالعاتی که در زمینه تولید بازنمایی‌های گرافیکی برای مسائل کلامی انجام شده، از نظر فرگنت و ولسیس (۲۰۱۳) می‌توان دو رویکرد از بازنمایی گرافیکی برای مسایل کلامی، نخست ترغیب دانش‌آموزان به استفاده از انواع شکل‌های معین (مطالعه دیزمن ۲۰۰۲) [21] و ثانياً درگیر کردن دانش‌آموزان برای ایجاد بازنمایی‌های گرافیکی توسط خودشان (مطالعه ون دیک و همکاران ۲۰۰۳a) [22] را مطرح کرد.

نتایج این مطالعات بر اساس مزیت‌هایشان ناسازگارند. برخی از این مطالعات نشان می‌دهند که کودکان اغلب در استفاده از بازنمایی‌های از پیش تعریف شده، مشکل دارند. حق وردی و گویا (۱۳۹۸) نشان دادند که صرفاً، در اختیار قرار دادن انواع ترسیم‌ها در متن انواع مسایل کلامی ریاضی کمکی به تسهیل در فرایند حل آنها ایجاد نکرده است. پانتزیارا و همکاران (۲۰۰۹) [23] نشان می‌دهند که شکل‌ها با اولویت شخصی و مدل‌های ذهنی یادگیرندگان هماهنگ نمی‌باشد لذا آنها نتیجه می‌گیرند که تفسیر کردن دیاگرام‌ها نیز برای بهبود صلاحیت استفاده از نمودارها ضروری است. آنها گزارش دادند که دانش‌آموزان اغلب سعی می‌کردند نمودارهای داده شده را به نمایش تصویری تبدیل کنند تا آنها را تفسیر کنند. ون دیک و همکاران (۲۰۰۳b ۲۰۰۳) [22,24]، این دو رویکرد را در کلاس پنجم مقایسه کردند و زمانی که یادگیرندگان بازنمایی‌های گرافیکی خود را تولید کردند، نتایج بهتری یافتند. آنها نتیجه گرفتند که طراحی مدل‌ها در ترسیم دوباره آنها ممکن است به بینشی

عمیق‌تر در معنا و استفاده از مدل‌ها منجر شود و در نتیجه رویکرد انعطاف‌پذیرتری را در حل مسئله ممکن سازد (ون دیک و همکاران، ۲۰۰۳b) [24]. آنچه مبهم است، تأثیر تدریسی است که ترکیبی از تولید بازنمایی‌های گرافیکی شخص با تفسیر بازنمایی‌های گرافیکی داده شده است.

به عقیده سلتر (۱۹۹۳) [25]، بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط یادگیرنده می‌توانند دو عملکرد را انجام دهند: بازنمایی به عنوان ابزار، که به عنوان کمکی برای حل مسئله به معنای بازنمایی شخصی عمل می‌کند. بازنمایی به عنوان مستندات که نتایج و راه حل‌ها را ثبت می‌کنند. در عملکرد دوم، آنها عمومی هستند و به یک مخاطب مرتبط هستند. چنین بازنمایی‌های گرافیکی کامل‌تر، غنی‌تر و مرسوم‌تر از بازنمایی‌های شخصی هستند (ککس ۱۹۹۹). به نظر می‌رسد نوع بازنمایی گرافیکی به کار گرفته شده توسط دانش‌آموز بر موفقیت حل مسئله آنها تأثیر دارد: در حالی که ارتباط مثبتی بین بازنمایی طرحواره‌ای و حل مسئله موفقیت‌آمیز وجود دارد، مطالعه هگارتی و همکاران (۱۹۹۹) [26] نشان داد که تولید بازنمایی‌های تصویری با موفقیت در حل مسئله ارتباط منفی دارد. این یافته‌ها با نتایج مربوط به تکالیف مدل‌سازی مرتبط هستند: طبق نظر رلنزن و همکاران (۲۰۱۷) [27]، هر دو ترسیم موقعیتی و ریاضی به روش‌های مختلف به عملکرد مدل‌سازی ریاضی مرتبط می‌باشند.

برخی تحقیقات از جمله فرگنت و ولسیس (۲۰۱۳) لوپز ریل وولو (۱۹۹۳) و ون اسبن و همکر (۱۹۹۰) [7,8,9] نشان دادند که استفاده از رسم شکل برای حل مسئله توسط فراگیران کاری دشوار است. لوپز رئال و ولو (۱۹۹۳) [8] گزارش می‌دهند که اگر از کودکان بخواهیم که ترسیم کنند به رشد میزان راه حل‌های آنها کمک می‌شود. با این حال در بسیاری از مطالعات، این پیشرفت رخ نداده است و با وجود گزارش لوپز رئال و ولو (۱۹۹۳) [8]، ترسیم تولید شده توسط دانش‌آموزان همیشه به بهبود فرایند حل مسئله منجر نمی‌گردد (همبری، ۱۹۹۹). فرا تحلیل همبری (۱۹۹۹) نشان داد که استفاده از بازنمایی‌های گرافیکی در حل مسئله قابل آموزش است. با مقایسه روش‌های آموزشی مختلف، تدریس ترسیم دیاگرام‌ها بیشترین پیشرفت را در حل مسئله ارائه داد. بر این اساس، مطالعات مداخله‌ای توسط ون اسبن و همکر (۱۹۹۰) [9] نشان داد که دانش‌آموزان کلاس پنجم می‌توانند از آموزش در تولید بازنمایی‌های گرافیکی برای حل مسئله بهره‌مند شوند، در حالی که دانش‌آموزان کلاس اول و دوم قادر به انجام آن نبوده‌اند. به طور مشابه، همبری (۱۹۹۲) نتیجه گرفت که "در پایه‌های نخست دوره ابتدایی باید به جای تأکید بر راه حل‌ها، بر بازنمایی‌های مسئله تمرکز ویژه‌ای شود". پژوهش‌های مختلف نشان می‌دهد که دانش‌آموزان دوره ابتدایی اغلب برای نشان دادن روابط ریاضی مشکل دارند و ترجیح می‌دهند محتوای تکلیف را به تصویر بکشند (هسمن ۲۰۰۶ و ات ۲۰۱۶). هنگامی که یادگیرندگان بازنمایی‌های گرافیکی تولید می‌کنند که حاوی مقدار زیادی اطلاعات ریاضی بی‌ربط است، دشواری برای دانش‌آموزان ایجاد می‌شود زیرا می‌تواند تشخیص ساختارهای ریاضی را برای آنها دشوار کند (پرزمگ ۱۹۸۶). برای بهبود مهارت‌های بازنمایی کودکان، یک رویکرد هنوز کشف نشده را می‌توان در تولید بازنمایی‌های گرافیکی، نه به عنوان ابزاری برای حل مسئله، بلکه به عنوان مستنداتی برای فرآیندهای تفکر در کلاس مشاهده کرد و توضیح داد که چه در ذهنشان می‌گذرد.

۲-۲ انواع بازنمایی‌های گرافیکی

در ادبیات پژوهشی، بین انواع مختلف بازنمایی‌های گرافیکی، تمایز قائل شده‌اند. هگارتی و همکاران (۱۹۹۹) بازنمایی تصویری و طرحواره‌ای را به صورت متمایز معرفی کردند. در بازنمایی‌های طرحواره‌ای تمرکز بر روابط فضایی است که در یک مسئله توصیف شده است. در بازنمایی‌های تصویری، تمرکز روی ظاهر اشیای توصیف شده در یک مسئله است (هگارتی و همکاران، ۱۹۹۹). رلنزن، شوکاجلو و لئوپولد (۲۰۱۷) [27] با تمایز بین ترسیم‌های ریاضی^۳ و ترسیم‌های موقعیتی^۴، تمایز مشابهی را در مورد فرآیند مدل‌سازی ریاضی ایجاد کردند: در ترسیم‌های ریاضی، تمرکز بر مدل ریاضی توصیف شده در مسئله است اما در یک ترسیم موقعیتی، موقعیت توصیف شده در مسئله به صورت تصویری ترسیم می‌شود.

^۳ mathematical drawings

^۴ situational drawings

طبق نظر وَن مِتر و گارنر (۲۰۰۵) [28] اگر خود یادگیرنده مسئولیت فرآیند تولید بازنمایی گرافیکی و هم محصول نهایی را بر عهده داشته باشند، این نوع بازنمایی، بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط یادگیرنده نامیده می‌شوند. با توجه به بازنمایی‌های گرافیکی ایجاد شده توسط یادگیرندگان، مطالعه‌ای توسط شرین (۲۰۰۰) [29] نشان می‌دهد که این بازنمایی‌های گرافیکی می‌توانند حتی از روش‌های متنوع‌تری متفاوت باشند. در مطالعه‌ات (۲۰۱۶، ۲۰۱۷) [30,31]، بازنمایی‌های گرافیکی زیر توسط دانش‌آموزان دوره ابتدایی برای حل مسائل کلامی متمایز شده‌اند:

- **خارج از متن**^۵ با توجه به محتوا هیچ پیوندی با متن ندارد.
- **مصور**^۶ پیوندی با متن وجود دارد، اما از نظر ساختاری هیچ شیء مرتبطی در آن نشان داده نمی‌شود.
- **مرتبط با شی**^۷ پیوندی با متن وجود دارد و اشیاء مرتبط از نظر ساختاری نشان داده می‌شوند، اگرچه روابط بین آنها با نظم خاصی قابل شناسایی نیست.
- **دیاگرامی**^۸ (نمایش داده شده با شکل یا خطوط هندسی): پیوندی با متن وجود دارد، اشیاء مرتبط با ساختار نمایش داده می‌شوند و روابط بین آنها به طور منظم قابل شناسایی است.

شکل شماره (۱) یک بازنمایی گرافیکی برای مسئله کلامی را نشان می‌دهد که خارج از متن (a) و مصور (b) است. شکل شماره (۲) چهار نمونه از بازنمایی‌های گرافیکی که به صورت دیاگرامی (الف، ب، پ، ت) و دو مثال مرتبط با شی (ث و ج) را نشان می‌دهد.

"یک درخت صنوبر در یک سال حدود ۱۵ سانتی متر رشد می‌کند. در باغی یک صنوبر به ارتفاع ۱۳ سانتی متر وجود دارد. این درخت چند ساله است؟"

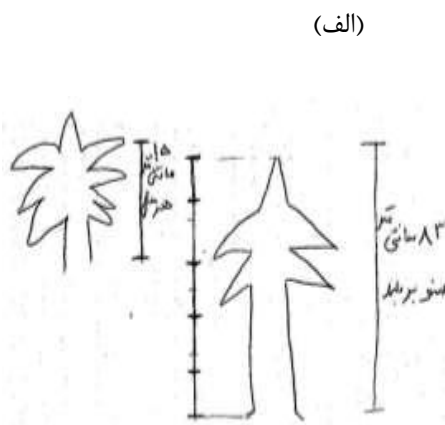
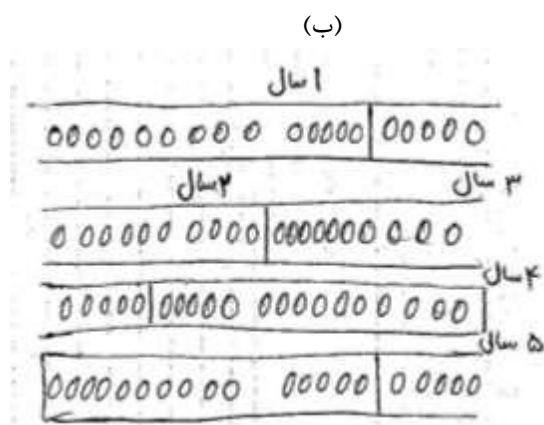


a



b

شکل ۱- بازنمایی‌های گرافیکی برای مسئله کلامی داده شده که خارج از متن (a) و مصور (b) هستند.

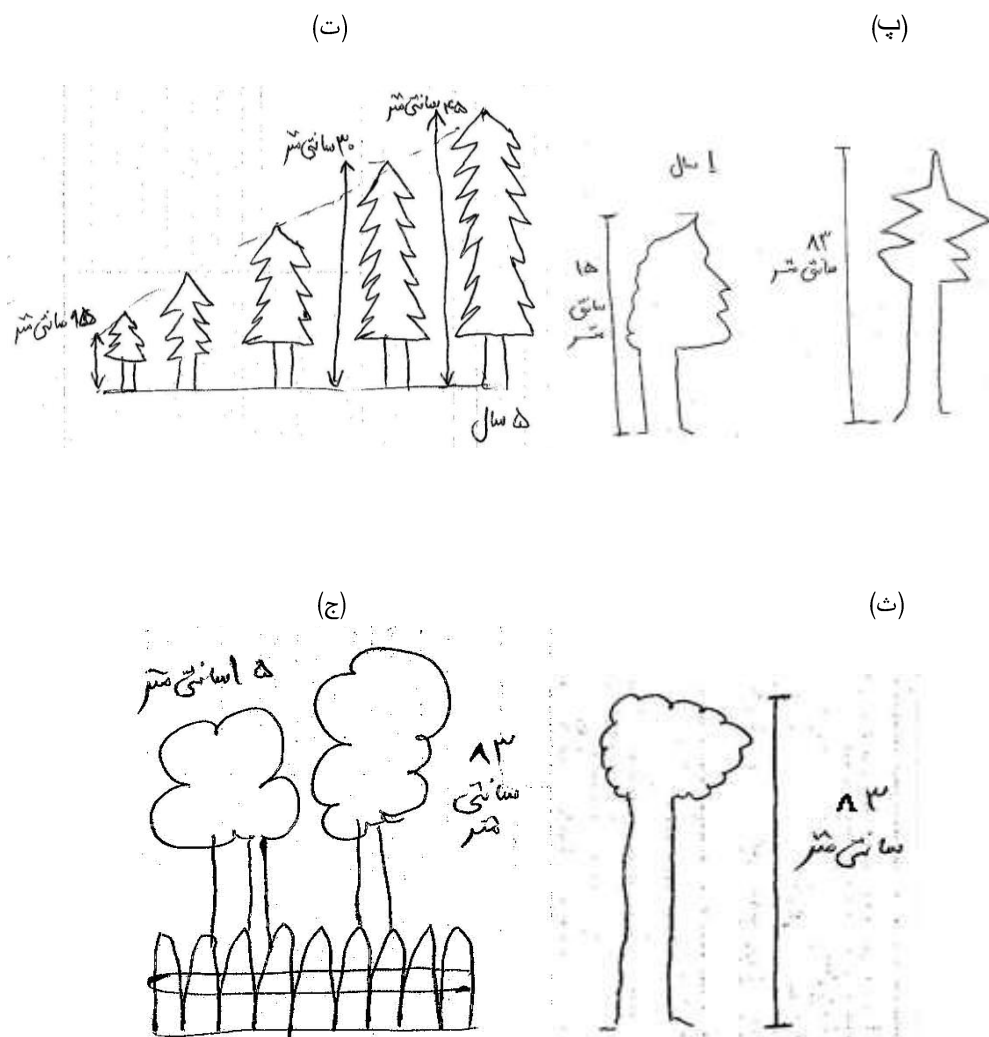


^۵ Off the text

^۶ Illustrative

^۷ Object-related

^۸ Diagrammatic



شکل (۲) - بازنمایی گرافیکی (همراه با ترجمه) و مسئله کلامی مرتبط مطالعه (أت ۲۰۱۶)

۳-۲ ویژگی‌های بازنمایی گرافیکی تولید شده

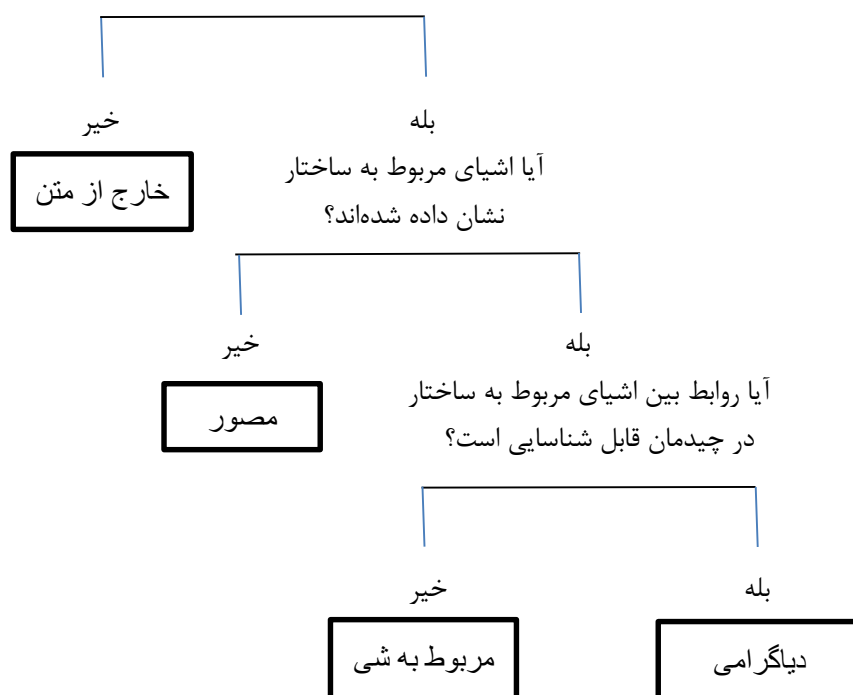
سه ویژگی اصلی بازنمایی گرافیکی برای مسائل کلامی در مطالعه أت (۲۰۱۶) معرفی شده است: ساختار ریاضی، تطابق ریاضی، و درجه انتزاع.

۳-۱-۲ ساختار ریاضی

یک ساختار ریاضی ممکن است بر اساس نظریه مجموعه رینکینز (۱۹۷۳) تعریف شود: روابط بین عناصر نامنظم (بی شکل) یک مجموعه را می‌توان با تعریف پیوندها روی یک مجموعه تعیین کرد. بدین ترتیب یک ساختار بر یک مجموعه تعریف می‌شود. در متن مسائل کلامی، اطلاعات با مقادیر و اسامی ارائه می‌شود که با افعال و حروف اضافه به یکدیگر مرتبط می‌شوند بنابراین به مسئله کلامی ساختار ریاضی داده شده است. برای بازنمایی گرافیکی، لازم است علائمی برای اشیاء ساخته شود مانند مقادیر و اسامی که باید نشان داده شوند. روابط بین این علائم با چیدمان علائم بر روی ورق مشخص می‌شود. از آنجایی که ساختار ریاضی بر روی علائم این اشیاء تعریف شده است، که آنها را اشیاء مربوط به ساختار می‌نامند. شکل شماره (۲) شش مثال از بازنمایی‌های گرافیکی مطالعه أت (۲۰۱۶) برای مساله مذکور را نشان می‌دهد. در حالی که در بازنمایی‌های (الف، پ، ت، ث، ج) درختان یا خط‌ها از نظر ساختاری نشانه‌های شیء مرتبط هستند، در (ب)، این دایره‌ها به عنوان عناصر یک مجموعه هستند. (الف،

ب و پ) ساختار ریاضی یک شیب ثابت را در چیدمان نشانه‌ها برای اشیاء ساختاری مرتبط نشان می‌دهند. بازنمایی (ت) فقط رابطه بین ۱۵ سانتی متر و ۱ سال را نشان می‌دهد بازنمایی گرافیکی (ث و ج) فقط اشیاء مربوط به ساختار را نشان می‌دهند، به عنوان مثال، برای مقدار ۸۳ سانتی‌متر، بدون هیچ نظم نمایش داده شده است. بازنمایی‌های گرافیکی با ساختار ریاضی را می‌توان به عنوان علائمی با خاصیت رابطه‌ای درک کرد که اساس آنها یک نوشته است. بنابراین، آنها ویژگی نمودارها را به خود می‌گیرند (درفلر، ۲۰۰۸) [2].

آیا بازنمایی ربطی به متن دارد؟ (با توجه به محتوا)



شکل (۳): ابزار تجزیه و تحلیل ساختار ریاضی براساس مطالعه اوت (۲۰۱۷)

ترسیم‌های دانش‌آموزان بر اساس ابزار معرفی شده در شکل شماره (۳) طبقه‌بندی می‌شود. در مطالعه حاضر برای تجزیه و تحلیل ساختار ریاضی ترسیم‌ها، دو دسته از آنها نمره‌دهی یا کدگذاری شدند. دسته اول ترسیم‌هایی هستند که هم اشیای مرتبط با ساختار مسئله و هم روابط بین آنها به وضوح دیده می‌شود و دسته دوم ترسیم‌هایی که فقط روابط بین اشیاء مشخص است.

۲-۳-۲ تطابق ریاضی

اگر مسئله کلامی و بازنمایی گرافیکی هر دو "از نظر اطلاعاتی" معادل باشند، بین مسئله کلامی و یک بازنمایی گرافیکی تطابق ریاضی وجود دارد (پالمر، ۱۹۸۷) [32] و این در صورتی است که هر دو شرط زیر برآورده شوند:

اولاً، یک تطابق در مورد اشیاء وجود دارد. یعنی هم مقادیر (مثلاً ۸۳) و هم واحد اندازه‌گیری (مثلاً سانتی متر) مطرح شده در مسئله را بتوان در ترسیم مشاهده نمود (کرسچ، ۱۹۹۷) [33].

ثانیاً، در مورد عملگرهای بین افعال و حروف اضافه در متن و ترتیب علائم برای اشیاء از نظر ساختاری مرتبط در ترسیم گرافیکی، تطابق وجود دارد. یعنی عملگری که برای حل مسئله مورد نیاز است مثل جمع یا ضرب را بتوان در ترسیم گرافیکی شناسایی نمود.

تطابق ریاضی ممکن است از نظر مقادیر اندازه‌گیری شده، واحدهای اندازه‌گیری یا عملگر، به صورت تطابق ریاضی کامل، جزئی یا ناموجود تعریف شود. در ابزار تجزیه و تحلیل، این حالات در یک ماتریس 3×3 مرتب شده‌اند (شکل شماره ۴): بدین معنی که اگر تمام مقادیر اندازه‌گیری شده در مسئله را بتوان در بازنمایی گرافیکی شناسایی کرد آنگاه در مورد مقادیر، تطابق کامل وجود دارد یا اگر فقط تعدادی از واحدهای اندازه‌گیری بیان شده در مسئله در بازنمایی گرافیکی قابل مشاهده باشد در مورد واحد اندازه‌گیری تطابق جزئی وجود دارد. همچنین ممکن است، مقادیر و عملگرها در بازنمایی گرافیکی مشخص نباشد در این صورت ترسیم‌ها بدون انطباق هستند. هرگاه مقادیر یا عملگرهایی که به صورت گرافیکی نشان داده می‌شوند غیر از موارد ذکر شده در مسئله کلامی است به عنوان مثال جمع به جای ضرب، در این صورت نیز عدم تطابق وجود دارد (الف، ب، ت و ج) شکل شماره (۱)، یک تطابق کامل در مورد مقادیر اندازه‌گیری شده وجود دارد. در این مثال‌ها، تمام مقادیر اندازه‌گیری شده در تمرین (۱۵ سانتی متر، ۸۳ سانتی متر) را می‌توان در بازنمایی گرافیکی شناسایی کرد. (در پ و ث)، این تطابق جزئی است، زیرا فقط ۱۵ سانتی متر (C) یا ۸۳ سانتی متر (ث) قابل مشاهده است، در حالیکه در (ب)، واحد اندازه‌گیری در نظر گرفته نمی‌شود. این مورد در نمونه‌های دیگر است. در مورد عملگر، تطابق کامل در (الف، ب و پ)، تطابق جزئی در (ت)، و عدم تطابق در (ث و ج) وجود دارد.

۳-۲-۳ درجه انتزاع

ترسیم‌های کودکان برای مسائل کلامی کم و بیش واقع‌گرایانه است. برای تجزیه و تحلیل این موضوع، از ایده انتزاع استفاده می‌شود. طبق نظر پشک (۱۹۸۸) [34]، درجه انتزاع را می‌توان به عنوان میزان تمرکز بر بازنمایی جنبه‌های ریاضی مسئله کلامی توصیف کرد. هر قدر کودکان در ترسیم‌های خود اشیای موجود در متن سوال را ترسیم کنند بدین معنی است که بازنمایی گرافیکی تولید شده توسط کودک واقع‌گرایانه تر و هر قدر برای ترسیم، از نمادها و علائم دیگری برای نشان دادن اشیای موجود در متن کمک بگیرند بازنمایی آنها حالت انتزاعی و مجردتری به خود می‌گیرد. از این ایده برای تعریف درجه انتزاع استفاده می‌شود. لذا درجه انتزاع را در یک بازنمایی گرافیکی به عنوان درجه تمرکز بر بازنمایی جنبه‌های ریاضی مسئله کلامی توصیف می‌شود (أت، ۲۰۱۵). ویژگی‌های کلیدی را می‌توان مستقل از یکدیگر تجزیه و تحلیل کرد. با این حال، پیش نیاز برای تعیین تطابق ریاضی و درجه انتزاع این است که اشیاء مرتبط با ساختار را بتوان در بازنمایی گرافیکی شناسایی کرد. با توجه به دو شاخص درجه انتزاع می‌تواند بالا یا پایین باشد. این دو شاخص به صورت زیر شناسایی شده است:

شاخص ۱: تمرکز بر روی اشیاء مرتبط با ساختار، هیچ شی به جز اشیاء مرتبط با ساختار ترسیم نمی‌شوند. اگر هیچ شی دیگری بجز اشیایی که در متن سوال مورد نظر، رسم نکند، شاخص ۱ بالا است. ولی اگر فراگیر در ترسیم خود از اشیایی اضافه یا غیر از آنچه در مسئله گفته شده استفاده کند شاخص ۱ پایین است.

شکل ۴: ابزار تجزیه و تحلیل تطابق ریاضی براساس مطالعه اوت (۲۰۱۷)

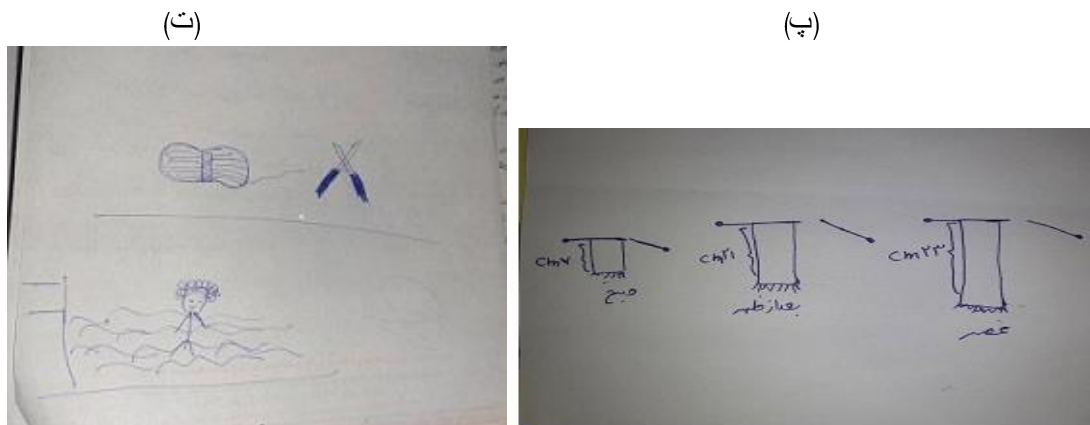
تطابق کامل	تطابق جزئی	بدون انطباق	
مقدار اندازه‌گیری شده	بعضی از مقادیر اندازه‌گیری شده معلومند	هیچ مقدار اندازه‌گیری معلوم نیست	مقدار اندازه‌گیری شده
واحد اندازه‌گیری شده	تعدادی واحد اندازه‌گیری شده معلوم است	هیچ واحد اندازه‌گیری معلوم نیست	واحد اندازه‌گیری شده
عملگرها	همه عملگرهای ریاضی مشخص هستند	برخی از عملیات ریاضی معلومند	عملگرهای دیگر آشکارند یا هیچ عملگر ریاضی قابل مشاهده نیست (بازنمایی‌های مربوط به شی)

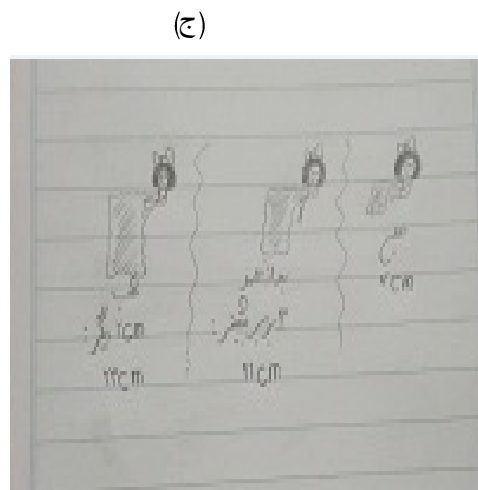
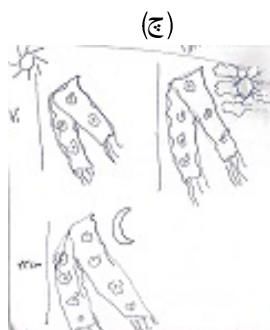
شاخص ۲: تمرکز بر ویژگی‌های مرتبط به علم ریاضی اشیاء مرتبط با ساختار، علائم مربوط به اشیاء ساختاری تزئین نشده‌اند و فقط کیفیت‌های مرتبط ریاضی را نشان می‌دهند.

در بازنمایی‌های (الف، ب، پ، ت و ث) شکل شماره (۱)، شاخص ۱ را می‌توان بالا در نظر گرفت زیرا هیچ جسم دیگری ترسیم نشده است اما در شکل (ج) این شاخص کم است، چون حصار هم کشیده شده است. شاخص ۲ را می‌توان در (ب) بالا و در مثال‌های دیگر پایین در نظر گرفت، زیرا درخت‌ها دقیق ترسیم شده‌اند.

اگر کودک در ترسیم خود از نمادها و علائم ریاضی وار استفاده کند شاخص ۲ بالا در نظر گرفته می‌شود هر دو شاخص درجه انتزاع را می‌توان کم یا زیاد بیان کرد. در نتیجه، می‌توان چهار دسته را برای درجه انتزاع تشخیص داد: اگر هر دو شاخص به ترتیب بالا یا پایین تشخیص داده شود *بالا-بالا* یا *کم-کم* و اگر یک شاخص به عنوان پایین و دیگری به عنوان بالا شناسایی شود *بالا-کم* یا *کم-بالا* در نظر گرفته می‌شود.

بازنمایی‌های گرافیکی که از لحاظ ساختار ریاضی در دسته مرتبط با شی یا دیاگرامی قرار می‌گیرند، می‌توانند از نظر درجه تطابق ریاضی و درجه انتزاع متفاوت باشند. تطابق ریاضی ممکن است از نظر مقادیر اندازه‌گیری شده، واحدهای اندازه‌گیری یا عملکرد، به صورت کامل، جزئی یا ناموجود باشند. درجه انتزاع با توجه به دو شاخص می‌تواند بالا یا پایین باشد.





شکل شماره (۵) شش نمونه از بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط دانش‌آموزان در مطالعه حاضر را نشان می‌دهد

"سارا در حال بافتن یک شال گردن است. صبح او ۷ سانتی متر بافت، بعد از ظهر سه برابر بیشتر می‌بافت. در شب او ۲ سانتی متر دیگر نیز می‌بافت. در پایان روز او چقدر شال گردن بافته است؟"

در ترسیم‌های (الف)، (پ)، (ج) و (چ) شال گردن‌ها نشانه‌های مربوط به اشیای مطرح شده در مسئله هستند ولی در ترسیم (ب) از مستطیل‌ها به عنوان نشانه استفاده شده است. مورد (ت) فقط اشیای مربوط به ساختار را نشان می‌دهد. در موارد (الف)، (ب)، (ج) و (چ) یک تطابق کامل در مورد مقادیر اندازه‌گیری شده وجود دارد. در این مثال‌ها تمام مقادیر اندازه‌گیری شده در مسئله (۷ سانتی متر و ۲۱ سانتی متر و ۲۳ سانتی متر) را می‌توان در بازنمایی گرافیکی مشاهده کرد. در مورد (پ) این تطابق جزئی است زیرا ۲ سانتی متر قابل مشاهده نیست. در (ت) هیچ تطابقی در مورد مقادیر اندازه‌گیری شده وجود ندارد. در (الف) و (ت) واحد اندازه‌گیری مشخص نشده پس از لحاظ واحد اندازه‌گیری (الف) و (ت) تطابق وجود ندارد. در (چ) فقط یکی از واحدها مشخص شده پس تطابق جزئی است. در حالی که در بقیه نمونه‌ها واحد اندازه‌گیری مشخص شده است و تطابق کامل وجود دارد. در مورد عملگر در (الف، ب، پ، ج) تطابق کامل، در (چ) تطابق جزئی و در (ت) تطابق وجود ندارد. در (ب) و (پ) شاخص ۱ درجه انتزاع را می‌توان بالا در نظر گرفت چون هیچ شی دیگری رسم نشده است. در موارد (الف)، (ج) و (چ) شاخص ۱ پایین است چون ماه و خورشید و کودک رسم شده است. شاخص ۲ درجه انتزاع را می‌توان در (ب) بالا و در بقیه موارد پایین در نظر گرفت زیرا از هیچ نماد تزئینی استفاده نشده و فقط کیفیت‌های ریاضی مرتبط را نشان می‌دهد.

۳- سوال تحقیق

در این مطالعه سوال تحقیق زیر مورد بررسی قرار گرفت:

مداخله‌ای که در کلاس چهارم بر اساس بحث‌های بازتابی در مورد بازنمایی‌های گرافیکی کودکان برای مسائل کلامی انجام شد: چه تاثیری بر ویژگی‌های بازنمایی‌های گرافیکی (ساختار ریاضی، تطابق ریاضی و درجه انتزاع) مورد نظر در بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط فراگیران، دارد؟

سوال بر روی تغییرات قابل اندازه‌گیری بر اساس مستندات^۱ کودکان تمرکز دارند. مطالعات نشان می‌دهد که تولید بازنمایی‌های گرافیکی در ترسیم‌ها منجر به واقع‌گرایی کمتر و موجب تمرکز بیشتر بر ریاضی‌وار کردن بازنمایی‌های گرافیکی کودکان می‌شود (ون دیک و همکاران ۲۰۰۳). در مقوله حل مسئله، برخی مطالعات اثرات مثبت مداخلاتی را نشان می‌دهند که تفکر در رویکردهای مختلف در حل مسئله را تشویق می‌کند (استارم، ۲۰۱۸) [35] از آنجایی که مداخله در این تحقیق ترکیبی از تولید

^۱ منظور از مستندات، دست‌نوشته‌ها و ترسیم‌هایی است که در فرایند پژوهش از دانش‌آموزان جمع‌آوری شده است.

بازنمایی گرافیکی شخص با بازتاب بازنمایی‌های گرافیکی است، استنباط می‌شود که مداخله ارزیابی شده در اینجا تأثیر مثبتی بر توجه کردن به ویژگی‌های کلیدی بازنمایی‌های گرافیکی توسط دانش‌آموزان کلاس چهارم دارد. بنابراین فرض می‌شود که دانش‌آموزان بازنمایی‌های گرافیکی صحیح و ریاضی وار مناسب برای مسئله را تولید می‌کنند. فرضیه پژوهش: دانش‌آموزان در گروه مداخله، توجه بیشتری به ویژگی‌های کلیدی بازنمایی‌های گرافیکی (ساختار ریاضی، تطابق ریاضی، درجه انتزاع^۱) می‌کنند.

۴- روش

۴-۱ طرح تحقیق

این مطالعه با سه گروه (گروه مداخله و دو گروه کنترل) و سه موج اندازه‌گیری (پیش‌آزمون، پس‌آزمون، آزمون پیگیری) طراحی شده است. در مجموع ۹ واحد آزمون گرفته شد. تدریس در گروه مداخله توسط نویسنده اول انجام شد. در گروه کنترل، کلاس‌های ریاضی به صورت معمولی توسط معلمان کلاس اجرا شد. همچنین به معلمان گروه کنترل ۱ مسائل کلامی بیشتری از گروه مداخله نسبت به گروه کنترل ۲ داده شد تا در فعالیت‌های کلاسی خود از آنها استفاده کنند. لازم به ذکر است که آنها آموزش بیشتری دریافت نکردند.

۴-۲ شرکت کنندگان

این مطالعه در کلاس چهارم دوره ابتدایی انجام شد. سه مدرسه از مدارس منطقه ۱۰ تهران به صورت تصادفی انتخاب شد. که در این مطالعه یک کلاس از هر مدرسه در این مطالعه شرکت کردند. و یکی از سه گروه را تشکیل دادند. شرکت‌کنندگان از گروه مداخله شامل ۳۶ دانش‌آموز بودند. میانگین سنی در موج اول اندازه‌گیری ۹ سال و ۴ ماه بود. گروه کنترل ۱ شامل ۳۴ کودک بود. میانگین سنی ۹ سال و ۴ ماه بود. گروه کنترل ۲ شامل ۳۵ کودک بود. میانگین سنی ۹ سال و ۴ ماه بود. در مجموع ۳۱ کودک در هر گروه در تمام شش روز آزمون شرکت کردند.

۴-۳ ابزار تحقیق

مسائل کلامی که در مداخله و آزمون‌ها انتخاب و طراحی گردید بر اساس فعالیت‌ها و مسائل کتاب درسی بود. معیار اصلی برای تدوین طراحی مسایل این بود که تا چه حد صورت‌بندی متن به بازنمایی گرافیکی ساختار ریاضی اشاره دارد. سه نوع را می‌توان متمایز کرد (جدول شماره ۶ را ببینید): مسائل کلامی از نوع A با این واقعیت مشخص می‌شود که اشیاء مرتبط به ساختار می‌توانند مستقیماً ترسیم شوند و به ترتیب آنها در متن شرح داده شده است. در مقابل، در مسائل کلامی نوع C، اشیاء مربوط به ساختار مستقیماً با ویژگی‌های فیزیکی قابل ترسیم نیستند. برای بازنمایی گرافیکی باید نشانه‌هایی برای این اشیاء و چیدمان آنها ابداع شود. برای تکالیف نوع B، فقط برخی از اشیاء که مربوط به ساختار هستند را می‌توان مستقیماً ترسیم کرد. معیار دیگر تدوین تکالیف چالش‌برانگیز برای یادگیرندگان از طریق ساختارهای حسابی یا معنایی تکالیف بود. به عنوان مثال، تکالیف برای موقعیت‌های مقایسه یا معادلات خطی طراحی شد. یک نمای کلی از آیتم‌های مورد استفاده در مداخله و آزمون کتبی را می‌توان در جدول شماره ۶ در پیوست یافت.

جدول شماره (۶): مثال‌هایی برای سه نوع مسئله

نوع A	نوع B	نوع C
یک تصویر ۲۰ سانتی متر عرض و ۳۰ سانتی متر ارتفاع دارد. روی یک کاغذ بزرگ به گونه‌ای چسبانده می‌شود که یک حاشیه به عرض ۱۵ سانتی متر از هر طرف باقی بماند. عرض و ارتفاع کاغذ بزرگ چقدر باید باشد؟	یک صنوبر در سال حدود ۱۵ سانتی متر رشد می‌کند. در باغ یک صنوبر به ارتفاع ۸۳ سانتی متر وجود دارد. چند ساله است؟	در یک مسابقه، تینا ۷۴ ثانیه طول می‌کشد. آلا ۱۲ ثانیه کمتر از تینا نیاز دارد. مونا ۸۴ ثانیه طول می‌کشد. آلا به چند ثانیه زمان نیاز دارد؟ مونا چند ثانیه بیشتر از آلا طول می‌کشد؟

^۱. درجه بالایی از انتزاع در مستندات دانش‌آموزان نسبت به آزمودنی‌های گروه‌های کنترل وجود دارد.

۴-۴ مداخله تحقیق

در این مطالعه مداخله به دو مرحله تقسیم شد که هر مرحله به صورت هفتگی انجام گردید (أت ۲۰۱۸) [36]. در مرحله اول، کلاس گروه مداخله از پژوهشگر^۱ مساله کلامی هفته را دریافت کردند. از هر دانش‌آموز خواسته شد تا برای این مسئله کلامی داده شده یک بازنمایی گرافیکی تولید کند که شامل همه چیزهایی است که برای درک و حل این مسئله برای او مهم است. به منظور این که دانش‌آموزان بازنمایی گرافیکی خود را تا حد امکان به طور کامل ایجاد کنند بر اساس مطالعه کُکس (۱۹۹۹) مقرر گردید که دانش‌آموزان یک بازنمایی گرافیکی تولید کنند که برای دیگران قابل درک باشد. در صورتی که دانش‌آموزان می‌توانستند مسئله را حل کنند، باید راه حل را نیز یادداشت می‌کردند. به دانش‌آموزان فرصت داده می‌شد هر روز صبح در ابتدای کلاس‌ها، بازنمایی گرافیکی خود را تولید کنند. هر دانش‌آموز نوشته را با بازنمایی گرافیکی خود به معلم تحویل می‌داد. از بین این بازنمایی‌های گرافیکی ایجاد شده توسط یادگیرنده، حداکثر سه بازنمایی گرافیکی توسط نویسندگان برای مرحله دوم مداخله انتخاب شد. انتخاب‌ها به گونه‌ای انجام شد که مثال‌ها تا حد ممکن در نحوه انجام طراحی متفاوت بودند. بسته به اینکه کدام بازنمایی گرافیکی در مستندات کودکان یافت می‌شد، در مطالعه حاضر سعی شد نمونه‌هایی با ساختار ریاضی، تطابق ریاضی یا درجه انتزاع متفاوت انتخاب شوند. فرودنتال بازتاب‌ها را این‌گونه تعریف کرد که بازتاب یادگیرندگان را قادر می‌سازد تا توانایی‌های خود را در بازنمایی گرافیکی توسعه دهند. در مرحله دوم، این بازنمایی‌های گرافیکی انتخاب شده اساس بحث‌های بازتابی با سایر دانش‌آموزان کلاس را تشکیل دادند. نسخه‌های بزرگ شده از مستندات منتخب دانش‌آموزان یکی پس از دیگری روی تخته سیاه نصب شد. هدف از بازتاب تشریح نمایش گرافیکی نشان داده شده و در نتیجه تلاش برای فهمیدن نقطه نظر دانش‌آموز از بازنمایی گرافیکی بود. در مرحله دوم مداخله از دانش‌آموزی که تولیدکننده بازنمایی گرافیکی بود، خواسته شد در صورت تمایل در پایان بحث کلاسی (بازتاب) در مورد بازنمایی گرافیکی خود اظهار نظر کند. از آنجایی که تفسیر بازنمایی‌های گرافیکی برای کودکان یک چالش است، ابتدا هر یک از بازنمایی‌های گرافیکی به صورت جداگانه مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت. فرآیند بازتاب توسط پژوهشگر بر اساس چارچوب اسپاک (۲۰۱۳) با این سوالات انجام گردید:

«دانش‌آموز هنگام تولید کردن ترسیم ریاضی به چه چیزی فکر می‌کرد؟ شما به طور ویژه در مورد ترسیم ریاضی چه چیزی را دوست دارید؟ چرا؟ شما چه فکر می‌کنید؟ چرا دانش‌آموز اشیا و روابط بین آنها را این‌گونه ترسیم کرد؟ اگر بازنمایی‌های گرافیکی از نظر ریاضی ناقص بود در هنگام بازتاب، دانش‌آموزان سعی می‌کردند بازنمایی‌های گرافیکی را بهبود بخشند و در مورد احتمالات مختلف بحث کنند. هنگامی که تمام بازنمایی‌های گرافیکی روی تخته سیاه به صورت جداگانه یکی پس از دیگری بازتاب شد، از دانش‌آموزان خواسته شد تا آنها را با یکدیگر مقایسه کنند و شباهت‌ها و تفاوت‌ها را بررسی کنند. این مقایسه به نوبه خود می‌تواند به نحوه انجام ترسیم، نحوه ترسیم ساختار ریاضی، تطابق ریاضی یا درجه انتزاع مرتبط شود. این مقایسه‌ها منجر به تغییر دیدگاه گردید (فرودنتال ۱۹۹۱ و اسپاک ۲۰۱۳) [37,38]. دانش‌آموزان همچنین بحث می‌کردند که چرا یک بازنمایی گرافیکی یا دیگری به خوبی با مسئله کلامی داده شده متناسب است. در بحث‌ها به دو جنبه ریاضی و محتوایی مسئله کلامی اشاره داشتند. برخی از کودکان بازنمایی‌های گرافیکی انتزاعی‌تری را ترجیح می‌دادند و بر جنبه‌های ریاضی تمرکز می‌کردند. برخی دیگر بازنمایی‌های گرافیکی واقعی‌تری را ترجیح می‌دادند زیرا محتوای مسئله کلامی برای آنها مهم بود.

۴-۵ ابزار تحقیق

در مطالعه حاضر از آزمون تشریحی محقق ساخته استفاده شد. این آزمون شامل هشت مسئله کلامی بود. سه مورد از آنها در جدول شماره (۱) نشان داده شده است. ساختارهای ریاضی شش مساله آزمون، شبیه به ساختارهای مسایل دوره مداخله بود. دو مساله ساختار ریاضی دیگری را نشان می‌دهد. چهار مساله آزمون مشابه مساله‌های مداخله طراحی شده‌اند و فقط از نظر

^۱ . نویسنده اول مقاله به عنوان معلم، مجری تحقیق بود.

محتوا با هم تفاوت دارند و چهار مساله دیگر از هر دو جنبه متفاوت هستند (جدول شماره ۶ پیوست). دستورالعمل همانند مداخله بود. آزمایش در دو روز متوالی با چهار آیتم آزمایشی در هر روز انجام شد.

۴-۶ کدگذاری داده‌ها

برای تجزیه و تحلیل بازنمایی‌های گرافیکی از کدگذاری نظری استراوس و کوربین (۱۹۹۶) استفاده شد. بررسی ساختار ریاضی به دو دسته تقسیم می‌شود: ۱) اگر هم‌اشیای بیان شده در مسئله و هم‌روابط بین آنها در ترسیم قابل مشاهده باشد نمره ۱ و در غیر این صورت نمره صفر ۲) اگر فقط روابط بین اشیا مشهود باشد نمره ۱ و در غیر این صورت صفر منظور می‌گردد. در بخش اول ساختار ریاضی ترسیم‌های (الف، ب، پ، ج، و چ) نمره یک و (ت) نمره صفر داده می‌شود و در بخش دوم ساختار ریاضی در ترسیم (ت) نمره یک و در بقیه نمره یک داده می‌شود.

برای تعیین تطابق ریاضی ترسیم چه از لحاظ مقادیر یا واحد اندازه‌گیری و یا عملگر، اگر تطابق کامل بود نمره ۱، اگر تطابق جزئی بود نمره ۰/۵ و اگر تطابقی وجود نداشت نمره صفر منظور گردید. دارد در (الف، ب، پ، ج، چ) شکل ۵، یک تطابق کامل در مورد مقادیر اندازه‌گیری شده وجود دارد. پس نمره یک داده می‌شود در (ت)، هیچ تطابقی وجود ندارد، و نمره صفر می‌گیرد. در ترسیم‌های (الف و ت) واحد اندازه‌گیری مشخص نشده و نمره صفر منظور می‌شود در ترسیم (چ) فقط یکی از واحدها مشاهده می‌شود. پس تطابق جزئی است و نمره نیم داده می‌شود. در بقیه ترسیم‌ها تطابق کامل است و نمره یک داده می‌شود. در مورد عملگر در (الف، ب، پ، ج) تطابق کامل وجود دارد نمره یک و در (چ) تطابق جزئی وجود دارد نمره نیم و در (ت) تطابقی وجود ندارد بنابراین نمره صفر تعلق می‌گیرد.

برای تعیین هر دو شاخص درجه انتزاع، اگر درجه پایین بود نمره صفر و اگر درجه بالا بود نمره ۱ در نظر گرفته شد. در بازنمایی‌های (ب، پ) شکل شماره (۵)، شاخص ۱ را می‌توان بالا در نظر گرفت زیرا هیچ جسم دیگری ترسیم نشده است پس به شاخص ۱ درجه انتزاع، نمره یک داده می‌شود اما در شکل (الف، ت، ج و چ) این شاخص کم است و نمره صفر داده می‌شود. شاخص ۲ را می‌توان در (ب) بالا و در مثال‌های دیگر پایین در نظر گرفت، پس شاخص ۲ درجه انتزاع فقط در (ب) نمره یک می‌گیرد.

۵- نتایج

در مطالعه حاضر ۲۴۳۰ مستندات تولید شده توسط کودکان، توسط دو معلم با مدرک کارشناسی ارشد به عنوان ارزیاب کدگذاری گردید. پایایی بین ارزیاب‌ها در سه زمان آزمون بین دو مقدار $K = 0.95$ و $K = 0.98$ متغیر بود و بنابراین بسیار خوب در نظر گرفته شد. سه بازنمایی گرافیکی در شکل شماره ۲ توسعه بازنمایی‌های گرافیکی یک دانش‌آموز خاص را از پیش آزمون (ث) از طریق پس آزمون (ت) تا آزمون پیگیری (الف) نشان می‌دهد (اُت ۲۰۱۶ و ۲۰۲۰). فرضیه‌های آماری در سطح آلفای ۵ درصد مورد آزمایش قرار گرفتند. بنابراین، از نمونه کاهش یافته $N=31$ در هر گروه استفاده شد. بنابراین، معیار حجم نمونه بیشتر از ۳۰ نفر در هر گروه، به عنوان پیش نیاز برای انجام تحلیل واریانس دو طرفه (ANOVA)، برآورده شد (بورتز و چستر، ۲۰۱۰) [39].

یک ANOVA عاملی برای هر یک از سه ویژگی کلیدی بازنمایی‌های گرافیکی و برای میزان راه حل برای مقایسه اثرات اصلی زمان آزمایش و گروه و اثر تعامل بین زمان آزمایش و گروه انجام شد. مقادیر کل برای هر هشت آیتم در یک زمان آزمایشی تشکیل شد. جدول شماره ۷ اثرات اصلی و تعامل بین آنها را نشان می‌دهد.

جدول ۷- اثرات اصلی زمان انجام آزمایش (SMA)^۱ و گروه (G) و اثرات تعامل (SMA × G)

ویژگی های کلیدی	عامل	F-value	Df	p value	مجذور اتای جزئی (η ² p)
ساختار ریاضی	اشیاء مرتبط با ساختار و روابط آنها	SMA	30.123	1.845 < .001	.238
		G	6.148	2 .003	.112
		SMA × G	11.398	3.690 < .001	.189
	فقط روابط	SMA	93.906	2 < .001	.487
		G	12.009	2 < .001	.189
		SMA × G	15.123	4 < .001	.229
تطابق ریاضی	مقدار اندازه گیری شده	SMA	56.901	2 < .001	.382
		G	2.535	2 .089	.054
		SMA × G	12.344	4 < .001	.198
	واحد اندازه گیری	SMA	80.124	2 < .001	.448
		G	4.571	2 .015	.079
		SMA × G	23.789	4 < .001	.298
	عملگرها	SMA	82.231	2 < .001	.470
		G	10.899	2 < .001	.201
		SMA × G	14.663	4 < .001	.228
	شاخص ۱	SMA	27.908	1.779 < .001	.233
		G	1.798	2 .160	.040
		SMA × G	3.058	3.559 .021	.058
درجه انتزاع	شاخص ۲	SMA	13.108	2 < .001	.118
		G	0.388	2 .677	.007
		SMA × G	0.297	4 .872	.008

۵-۱ ساختار ریاضی

برای بررسی ساختار ریاضی مستندات، در مرحله اول، بازنمایی علائم برای اشیاء مرتبط با ساختار و چیدمان آنها مورد واکاوی قرار گرفت. سپس مرحله دوم، تنها بازنمایی روابط به طور خاص بررسی شد. جدول شماره ۸ میانگین مقادیر و انحراف معیار گروه‌ها را در پیش آزمون، پس آزمون و آزمون پیگیری نشان می‌دهد.

جدول ۸- مقادیر میانگین و انحراف معیار با توجه به ساختار ریاضی (N=۳۱ در هر گروه)

آزمون پیگیری	پس آزمون	پیش آزمون
گروه مداخله	(SD ۱.15)۷,۰۵M	(SD 1.83)۴,۷۲M
گروه کنترل ۱	(SD 2.16)۵,۱۶M	(SD 2.03)۵,۵۸M
گروه کنترل ۲	(SD 2.24)۵,۷۷M	(SD 2.11)۵,۸۵M
فقط روابط	(SD 1.29)۷,۵۶M	(SD 1.45)۳,۸۵M
گروه مداخله	(SD 1.71)۴,۷۱M	(SD 1.69)۳,۶۹M
گروه کنترل ۱	(SD 2.18)۴,۲۲M	(SD ۲,۱۶) ۳,۱۸3.18 M
گروه کنترل ۲	(SD 2.03)۵,۸۱M	

^۱ منظور از SMA حروف اول کلمات ساختار، تطبیق و انتزاع می باشد.

۱-۱-۵ بازنمایی اشیاء مرتبط با ساختار و روابط آنها

یافته‌های جدول شماره (۷) نشان داد که زمان انجام آزمایش با گروه‌ها از نظر آماری در سطح معنی‌داری ۰,۰۵ اثربخشی دارد. از طرفی اثر متقابل آنها $\eta^2 = 0.189$ نیز معنی‌دار است ($p < 0.001$) (کوهن ۱۹۸۸). در زمان اجرای پس‌آزمون، بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ ($p < 0.001$) و گروه مداخله و گروه کنترل ۲ ($p = 0.002$) تفاوت معنی‌داری وجود داشت. لذا تفاوت معنی‌داری بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ ($p < 0.001$) و همچنین بین گروه مداخله و گروه کنترل ۲ ($p = 0.007$) در آزمون پیگیری نیز مشاهده شد. اما مقایسه جفت‌های باقی‌مانده تفاوت معنی‌داری را نشان نمی‌دهند ($p > 0.05$). بنابراین پس از مداخله، گروه آزمایش بیشتر از گروه‌های کنترل، اشیاء و روابط مرتبط با ساختار را در مستندات نشان می‌دهند.

۲-۱-۵ بازنمایی فقط روابط

بر اساس جدول شماره ۷ از نظر آماری هر دو اثر در سطح معنی‌داری ۰,۰۵ هستند. از طرفی اثر تعامل $\eta^2 = 0.229$ نیز معنی‌دار است ($p < 0.001$). در زمان پس‌آزمون، بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ ($p = 0.001$) و گروه مداخله و گروه کنترل ۲ ($p < 0.001$) تفاوت معناداری وجود دارد. تفاوت معنی‌داری بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ ($p < 0.001$) و همچنین گروه مداخله و گروه کنترل ۲ ($p = 0.002$) در آزمون پیگیری نیز مشاهده شد. در زمان آزمون پیگیری، تفاوت معنی‌داری بین گروه کنترل ۲ و گروه کنترل ۱ رخ می‌دهد ($p = 0.001$). اما مقایسه‌های جفت‌های باقی‌مانده تفاوت معنی‌داری را نشان نمی‌دهند بنابراین پس از مداخله، گروه آزمایش بیشتر از گروه‌های کنترل، روابط را در مستندات نشان می‌دهد.

۲-۵ تطابق ریاضی

تطابق ریاضی به طور جداگانه برای مقادیر اندازه‌گیری شده، واحدهای اندازه‌گیری و عملگرها مورد بررسی قرار گرفت. جدول شماره ۹ میانگین و انحراف معیار گروه‌ها را نشان می‌دهد.

۲-۱-۵ مقادیر اندازه‌گیری شده

بر اساس جدول شماره ۷ اثر اصلی زمان انجام آزمایش معنی‌دار است ($p < 0.001$) اما اثر اصلی گروه معنی‌دار نیست ($p = 0.089$). اثر تعامل معنی‌دار است ($p < 0.001$) (کوهن ۱۹۸۸). آزمون پیگیری تفاوت معنی‌داری را بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ ($p < 0.001$) و بین گروه مداخله و گروه کنترل ۲ ($p = 0.009$) نشان می‌دهد. تفاوت معنی‌داری بین دو گروه کنترل وجود ندارد ($p > 0.05$) بدین معناست که سه ماه پس از مداخله، گروه آزمایش مقادیر اندازه‌گیری شده در مستندات را بیشتر از گروه‌های کنترل مشاهده می‌کنند.

جدول ۹- مقادیر میانگین و انحراف معیار با توجه به تطابق ریاضی (N=۳۱ در هر گروه)

		پیش آزمون	پس آزمون	آزمون پیگیری
مقادیر اندازه‌گیری شده	گروه مداخله	M 2.27 (SD .69)	M 4.20 (SD 1.52)	M 4.58 (SD 1.41)
	گروه کنترل ۱	M 2.16 (SD 1.39)	M 2.36 (SD 1.91)	M 2.64 (SD 1.77)
	گروه کنترل ۲	M 2.86 (SD 1.31)	M 3.03 (SD 1.53)	M 3.41 (SD 1.57)
واحدهای اندازه‌گیری	گروه مداخله	M 2.02 (SD 1.34)	M 4.75 (SD 2.02)	M 7.02 (SD 1.63)
	گروه کنترل ۱	M 2.15 (SD 2.10)	M 2.88 (SD 2.07)	M 2.93 (SD 2.36)
	گروه کنترل ۲	M 2.10 (SD 1.21)	M 2.91 (SD 1.84)	M 3.24 (SD 2.07)
عملگرها	گروه مداخله	M 2.55 (SD 1.29)	M 4.61 (SD 1.08)	M 5.03 (SD 1.52)
	گروه کنترل ۱	M 2.17 (SD 1.34)	M 2.42 (SD 1.14)	M 2.56 (SD 1.39)
	گروه کنترل ۲	M 1.70 (SD 1.39)	M 2.18 (SD 1.66)	M 2.96 (SD 1.73)

۲-۲-۵ واحدهای اندازه‌گیری

بر اساس جدول شماره ۲ هر دو اثر اصلی از نظر آماری در سطح معنی‌داری ۰,۰۵ معنی‌دار هستند. اثر تعامل نیز معنی‌دار است ($p < 0/001$) (کوهن ۱۹۸۸). از طرفی مقایسه دو به دو تفاوت معنی‌داری را بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ در زمان پیش‌آزمون نشان داد ($p = 0/006$). مستندات دانش‌آموزان گروه مداخله کمترین مقدار را برای تطابق واحدهای اندازه‌گیری دارد. همچنین بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ در زمان پس‌آزمون تفاوت معناداری وجود دارد ($p = 0/049$). نقطه ضعف گروه مداخله مشاهده شده در پیش‌آزمون در زمان پس‌آزمون به یک مزیت تبدیل می‌شود. آزمون پیگیری تفاوت معنی‌داری را بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ ($p < 0/001$) و بین گروه مداخله و گروه کنترل ۲ ($p < 0/001$) نشان داد. اما مقایسه‌های جفت باقی‌مانده تفاوت معنی‌داری را نشان نمی‌دهند بدین معناست که سه ماه پس از مداخله، گروه آزمایش واحدهای اندازه‌گیری در مستندات را بیشتر از گروه‌های کنترل مشاهده می‌کنند.

۳-۲-۵ عملگرها

با توجه جدول شماره ۷ هر دو اثر اصلی از نظر آماری در سطح معنی‌داری ۰,۰۵ معنی‌دار هستند. اثر تعامل نیز معنی‌دار است ($p < 0/001$) (کوهن ۱۹۸۸) [40]. از طرفی مقایسه زوجی تفاوت معنی‌داری را برای زمان پس‌آزمون بین گروه مداخله و هر دو گروه کنترل نشان داد ($p < 0/001$). همچنین بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ ($p < 0/001$) و گروه مداخله و گروه کنترل ۲ ($p = 0/001$) در زمان آزمون پیگیری تفاوت معناداری وجود دارد. مقایسه‌های جفت باقی‌مانده تفاوت معنی‌داری را نشان نمی‌دهند. پس از مداخله، گروه آزمایش تطابق ریاضی عملگرها در مستندات را بیشتر از گروه‌های کنترل مشاهده می‌کند.

۳-۵ درجه انتزاع

دو شاخص درجه انتزاع به صورت جداگانه بررسی شد. در جدول شماره (۱۰) میانگین گروه‌ها و انحراف معیار نشان داده شده است.

۱-۳-۵ شاخص ۱

بر اساس جدول شماره ۷ اثر اصلی زمان انجام آزمون معنی‌دار است ($p < 0/001$) اما اثر اصلی گروه معنی‌دار نبوده است ($p = 0/157$). اثر تعامل ($\eta^2 = 0.058$) معنی‌دار است ($p = 0/023$) (کوهن ۱۹۸۸). مقایسه‌های زوجی تفاوت معنی‌داری ($ps > 0/05$) را در پیش‌آزمون و پس‌آزمون نشان نمی‌دهد. زمان انجام آزمون پیگیری، تفاوت معنی‌داری را بین گروه مداخله و گروه کنترل ۱ نشان می‌دهد ($p = 0/036$). اما مقایسه‌های جفت باقی‌مانده در نقطه پیگیری، تفاوت معنی‌داری را نشان نمی‌دهند. لذا فرضیه تحقیق باید تا حدی برای شاخص ۱ رد شود. پس از مداخله، گروه آزمایش در مقایسه با گروه‌های $ps > 0/05$ کنترل، به استثنای گروه کنترل ۱ در آزمون پیگیری، بیشتر بر روی اشیاء ساختاری در بازنمایی‌های گرافیکی تمرکز نمی‌کند.

جدول ۱۰- مقادیر میانگین و انحراف معیار با توجه به درجه انتزاع ($N = 31$ در گروه)

		Pretest	Posttest	Follow-up test
شاخص ۱ (تمرکز بر روی اشیاء مرتبط با ساختار)	گروه مداخله	(SD 1.59)۳,۸۵M	(SD 1.29)۵,۰۹M	(SD 1.16)۵,۲۸M
	گروه کنترل ۱	(SD 1.69)۴,۰۵M	(SD 1.88)۴,۲۸M	(SD 1.85)۳,۸۵M
	گروه کنترل ۲	(SD 1.57)۴,۳۲M	(SD 1.77)۴,۸۵M	(SD 1.79)۵,۰۸M
شاخص ۲ (تمرکز بر روی کیفیت‌های مرتبط ریاضی آنها)	گروه مداخله	(SD 1.42)۳,۰۰M	(SD 1.40)۳,۳۷M	M ۳,۴۹ (SD ۱,۲۱)
	گروه کنترل ۱	(SD 1.63)۲,۸۱M	(SD 1.57)۳,۰۳M	M ۳,۸۴ (SD ۱,۴۵)
	گروه کنترل ۲	(SD 1.46)۲,۵۸M	(SD 1.84)۳,۷۶M	M ۳,۸۸ (SD ۱,۷۹)

۲-۳-۵ شاخص ۲

بر اساس جدول شماره ۷ همه اثرات از نظر آماری در سطح معنی‌داری ۰.۰۵ نیستند، به جز اثر اصلی زمان انجام آزمایش. پس از مداخله، گروه آزمایش در مقایسه با گروه‌های کنترل بیشتر بر کیفیت‌های ریاضی اشیاء مرتبط با ساختار تمرکز نمی‌کنند.

۶- بحث

۱-۶ خلاصه نتایج

نتایج یک تصویر متمایز را با توجه به ویژگی‌های کلیدی بازنمایی‌های گرافیکی ارائه می‌دهد. در این بخش به صورت جداگانه به بحث در خصوص یافته‌ها بر اساس انواع ویژگی‌ها پرداخته شد.

۱-۱-۶ ساختار و تطابق ریاضی

در زمان پیش‌آزمون، میانگین مقادیر برای بازنمایی روابط ریاضی در هر سه گروه پایین است. این یافته مشاهدات قبلی را تأیید می‌کند (هسمن ۲۰۰۶، اُت ۲۰۱۶). پس از مداخله، در گروه آزمایش اغلب بازنمایی‌های گرافیکی مرتبط با شی و خصوصاً بازنمایی‌های گرافیکی بیشتر به صورت دیاگرامی تولید شدند.

یافته‌های مربوط به تطابق ریاضی با توجه به عملگرها نشان داد که در گروه آزمایش پس از مداخله نه تنها به میزان قابل توجهی روابط ریاضی را نسبت به گروه‌های کنترل نشان داده شد، بلکه به طور قابل توجهی به تطابق ریاضی در مورد عملگرهای داده شده توجه بیشتری شد. همچنین یادگیرندگان به نمایش مقادیر اندازه‌گیری شده و واحدهای اندازه‌گیری توجه بیشتری دارند. در اینجا نیز تفاوت قابل توجهی با گروه‌های کنترل دارند. از آنجایی که اثر تعامل قابل توجه است، این تحولات را می‌توان به مداخله نسبت داد. سطح اثر تعامل نشان می‌دهد که تفاوت بین گروه‌ها نیز عملاً معنی‌دار است. از آنجایی که توجه به ویژگی‌ها پس از مداخله متوقف نمی‌شود، می‌توان آن را پایدار تلقی کرد. این یافته‌ها با یافته‌های همکر و ون اسن (۱۹۹۰) مطابقت دارند، که حاکی از آن است که ترسیم‌های تولید شده توسط یادگیرنده پس از یک دوره کوتاه آموزشی، غنی‌تر و جهت‌گیری بیشتری به سمت روابط ریاضی دارند. در مطالعه ارائه شده در اینجا، افزایش بازنمایی مقادیر اندازه‌گیری و واحدهای اندازه‌گیری منعکس شده است. این نتایج همچنین یافته‌های ون دیک و همکاران (۲۰۰۳) را تأیید و تکمیل می‌کند، آنها معتقدند که ترکیبی از بازنمایی‌های گرافیکی خود تولید شده و فرآیندهای بازتاب بر روی مستندات ممکن است بازنمایی گرافیکی ساختارهای ریاضی را با تطابق ریاضی مسئله کلامی داده شده ارتقا بخشد.

۲-۱-۶ درجه انتزاع

در مورد میزان انتزاع، یافته‌ها انتظارات را برآورده نمی‌کند به طوریکه گروه مداخله پس از مداخله به سطح بالاتری از انتزاع نسبت به گروه کنترل نرسید. درجه پایین انتزاع یک روش معمولی برای ترسیم در بین کودکان است (شرین ۲۰۰۰). با این حال، نتیجه در تضاد با یافته‌های مطالعات دیگر است که در آنها بازنمایی‌های گرافیکی بصورت طرحواره‌ای و صورت‌بندی می‌باشد. نتایج باید بر اساس پس‌زمینه مداخله تفسیر شود: از بچه‌ها خواسته شد تا هر چیزی را که برای حل مسئله کلامی برایشان مهم است، ثبت کنند. بازنمایی گرافیکی باید برای شخص دیگری قابل درک باشد. وقتی بازنمایی‌ها برای دیگران ساخته می‌شود، آنها غنی‌تر می‌شوند (کُکس ۱۹۹۹). به نظر می‌رسد که کودکان نقاشی‌های واقع‌گرایانه را برای دیگران قابل درک‌تر می‌دانند. این مکمل یافته‌های حق وردی و گویا (۱۳۹۸) و پانتزیارا و همکاران (۲۰۰۹) است که دریافتند یادگیرندگان سعی می‌کنند بازنمایی‌های طرحواره‌ای را به بازنمایی‌های تصویری تبدیل کنند تا آنها را بهتر تفسیر کنند. اگر بازنمایی‌های گرافیکی به صورت ره یافت تولید شده باشند، نمی‌توان در مورد درجه انتزاع آنها اظهار نظر کرد.

با این حال، با درجه انتزاع نسبتاً ثابت، دانش‌آموزان گروه آزمایش بعد از مداخله به ساختار ریاضی و تطابق بیشتر توجه کردند. به طوریکه می‌توان آن را به گونه‌ای تفسیر کرد که دانش‌آموزان از محتوای یک مسئله کلامی غافل نشوند بلکه روابط ریاضی انعطاف‌پذیرتری برقرار کنند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش درجه انتزاع مستقل از بازنمایی ساختار ریاضی و تطابق است. این

موضوع باید در تحقیقات بیشتر مورد بررسی قرار گیرد. با این وجود، باید در نظر گرفت که اطلاعات ریاضی نامربوط می‌تواند تشخیص ساختارهای ریاضی را دشوار کند و در نتیجه مانعی برای حل مسئله دانش‌آموزان ایجاد کند.

۷- نتیجه گیری

در مطالعه حاضر، ابتدا دانش‌آموزان پایه چهارم بازنمایی‌های گرافیکی خود را برای یک مسئله کلامی معین به عنوان مستندات برای دیگران تولید کردند و سپس برخی از این بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط دانش‌آموزان را در کلاس منعکس کردند. هدف از بازتاب، توضیح جمعی بازنمایی گرافیکی نشان داده شده و در نتیجه تلاش برای درک دیدگاه نویسنده بازنمایی گرافیکی بود. نتایج نشان داد که با استفاده از مداخله انجام شده، فراگیران قادر خواهند بود تا در بازنمایی‌های گرافیکی خود برای مسائل کلامی، بیشتر به یک ساختار ریاضی مناسب توجه کنند. نتایج نشان می‌دهد که این اثر نیز پایدار است. حتی اگر میزان‌های راه‌حل از نظر آماری به میزان قابل توجهی بهبود نیافته باشد باز هم می‌توان اساس استفاده از بازنمایی‌های گرافیکی را به عنوان ابزاری برای حل مسئله ایجاد کرد. در مجموع به نظر می‌رسد تدریس ترکیبی از تولید خود بازنمایی‌های گرافیکی و فرایندهای بازتاب روی آن‌ها در کلاس برای پیشرفت شایستگی‌های بازنمایی‌های گرافیکی مثبت باشند.

۸- پیشنهاداتی برای پژوهش‌های آینده

جهت تحقیقات آتی، محققین می‌توانند این مداخله را در پایه‌های دیگر دبستان و دوره اول متوسطه انجام دهند. همچنین تحقیقات بیشتر با دستورالعمل اصلاح شده، که شامل توجه بیشتر به حل مسئله است، مورد نیاز است.

سوالات مداخله

نوع A

- ۱- یک باغچه گل ۴۰ سانتی متر عرض و ۶۰ سانتی متر طول دارد. سنگ‌های کوچکی در اطراف باغچه پراکنده شده و مسیری به عرض ۲۰ سانتی متر ایجاد می‌کند. عرض و طول تپه با مسیر چقدر است؟ (تصویر دو بعدی)
- ۲- در اصطبل ۲۲ پا می‌شمارم. آنها متعلق به خوک‌ها و مرغ‌ها هستند. چه تعداد خوک و مرغ می‌تواند در اصطبل باشد؟ (معادله خطی با دو مجهول)
- ۳- طول ضلع یک چمنزار مربع شکل ۵۰ متر است. توسط حصار به چهار مربع با اندازه مساوی تقسیم می‌شود. اضلاع مربع‌های کوچک چقدر طول دارند؟ چند متر برای حصارکشی در همه مربع‌های کوچک لازم است؟
- ۴- مریم ۲۴ ماهی دارد. او ۸ ماهی بیشتر از زهرا دارد. توماس چند ماهی دارد؟ (مقایسه)

نوع B

- ۵- کارگران یک ساختمان بلند می‌سازند. هر هفته ۳ متر می‌سازند. این ساختمان مرتفع اکنون ۲۳ متر ارتفاع دارد. چه مدت طول کشیده تا این به این ارتفاع برسند؟
- ۶- الهه ۷ گردو شکست ستایش دو برابر الهه گردو شکست ستایش ۴ برابر الهه گردو شکست آنها با هم چند گردو شکستند؟
- ۷- غزل در حال بافتن روسری است. صبح او ۷ سانتی متر بافندگی می‌کند. بعد از ظهر سه برابر بیشتر می‌بافد. در شب او ۲ سانتی متر دیگر می‌بافد. آخر روز روسری او چه مدت است؟

نوع C

- ۸- سارا برای انجام تکالیف خود به ۵۷ دقیقه زمان نیاز دارد. لایلا ۲۶ دقیقه کمتر از سارا نیاز دارد. ندا به ۶۹ دقیقه زمان نیاز دارد. لایلا به چند دقیقه نیاز دارد؟ ندا چند دقیقه بیشتر از سارا طول می‌کشد؟
- ۹- آرش در حال تمرین شنا است. روز اول او ۶ دقیقه شنا می‌کند. سپس هر روز ۵ دقیقه بیشتر از روز قبل شنا می‌کند. روز چهارم چقدر شنا می‌کند.

سوالات آزمون

نوع A

- ۱- یک تصویر ۲۰ سانتی متر عرض و ۳۰ سانتی متر ارتفاع دارد. روی یک کاغذ بزرگ به گونه‌ای چسبانده می‌شود که از هر طرف یک حاشیه به عرض ۱۵ سانتی متر باقی بماند. عرض و ارتفاع کاغذ بزرگ چقدر باید باشد؟ (تصویر دو بعدی)
- ۲- علی ۲۴ چرخ دارد. با اینها قرار است ماشین و سه چرخه بسازد. چند ماشین و سه چرخه می‌تواند بسازد تا چرخ‌های باقی‌مانده؟ (معادله خطی با دو مجهول)
- ۳- مامان در حال دوختن روی ژاکت از پایین به بالا دکم‌های جدید برای بستن است. او به نه دکمه نیاز دارد. بین مکان‌هایی که دکمه‌ها را روی آن می‌دوزد، او همیشه ۵ سانتی متر فاصله دارد. طول زیپ روی ژاکت چقدر است؟ (مسئله (a-1) b)
- ۴- بچه‌ها پوشه‌های مطالعه خود را در قفسه می‌گذارند. ۵ پوشه کنار هم ۳۵ سانتی متر عرض دارند. عرض ۸ پوشه چقدر است؟ (سیستم معادلات خطی)

نوع B

- ۵- یک صنوبر سالانه حدود ۱۵ سانتی متر رشد می‌کند. در باغ صنوبر به ارتفاع ۸۳ سانتی متر وجود دارد. چند ساله است؟
- ۶- قد نیما ۷۸ سانتی متر است. اگر او روی جعبه‌ای به ارتفاع ۲۰ سانتی متر برود، قد او برابر امیر است. رضا ۱۵ سانتی متر از امیر کوچکتر است. قد رضا چقدر است؟ (مقایسه)

نوع C

- ۷- ژینا در بازار کیک می‌فروشد. او روز شنبه دو برابر بیشتر از یکشنبه درآمد کسب می‌کند. در کل او ۲۱ هزار تومان درآمد دارد. چه مقدار پول در روز یکشنبه به دست می‌آورد؟ (معادله خطی)
 - ۸- در یک مسابقه، تینا ۷۴ ثانیه طول می‌کشد. آلا ۱۲ ثانیه کمتر از تینا نیاز دارد. مونا ۸۴ ثانیه طول می‌کشد. آلا به چند ثانیه زمان نیاز دارد؟ مونا چند ثانیه بیشتر از آلا طول می‌کشد؟
- سوالات ۱ و ۲ و ۵ و ۸ برای آزمون و مداخله فرمول مشابه دارند.

فهرست منابع

- [1] Roth, W.-M., & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Toward a theory of representing as social practice. *Review of Educational Research*, 68(1), 35–59.
- [2] Dörfler, W. (2008). Mathematical reasoning: Mental activity or practice with diagrams. In M. Niss (Ed.), *ICME 10 proceedings, regular lectures*, CD-Rom (p. 17). Roskilde, Denmark: Roskilde University and IMFUFA.
- [3] Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *the roles of representation in school mathematics* (pp. 1–23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [4] Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 41, 535–540.
- [5] NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [6] Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 242–273.
- [3] Bortz, J., & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler [Statistics for human and social scientists]* (7ed.). Berlin, Heidelberg: Springer.
- [4] Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2ed.). USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- [5] Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9, 343–363.
- [6] Diezmann, C. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 7(3), 4–8.
- [7] Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 149–168.
- [8] Lopez Real, F., & Veloo, P. K. (1993). Children's use of diagrams as a problem-solving strategy. In N. Hirabayashi, & L. Shigematsu (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematis Education* (pp. 169–176). Tsukuba, Japan: University of Tsukuba
- [9] Van Essen, G., & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, 83(6), 301–312.
- [۱۰] [حق‌وردی، مجید. (۱۳۹۳) ویژگی‌های مسائل کلامی ریاضی در دوره راهنمایی و راهکارهای فرایند تسهیل حل آنها. دو فصلنامه نظریه و عمل در برنامه درسی. انجمن مطالعات برنامه درسی و دانشگاه خوارزمی. ۲۵، ۲-۴۶.]
- [11] Schnotz, W. (2002). Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review*, 14(1), 101–120.
- [12] Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *the roles of representation in school mathematics* (pp. 1–23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics
- [13] Van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Learning Disabilities & Research*, 18, 246254.
- [14] Munez, D., Orrantia, J., & Rosales, J. (2013). The effect of external representations on compare word problems: Supporting mental model construction. *The Journal of Experimental Education*, 81(3), 337–355.

- [۱۵] حق‌وردی، مجید، گویا، زهرا (۱۳۹۸). تاثیر راهبرد رسم شکل در حل مسایل کلامی ریاضی. دو فصلنامه نظریه و عمل در برنامه درسی. انجمن مطالعات برنامه درسی و دانشگاه خوارزمی. ۷. ۲۶۱-۲۹۴
- [16] Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht a Grundschulen [Manual for the teaching of mathematics in primary schools]. Braunschweig, Germany: Schroedel.
- [17] Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse, the Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.
- [18] Haghverdi, M & Wiest, L. R (2016). The Effect of Contextual and Conceptual Rewording on Mathematical Problem-Solving Performance. *Mathematics Educator*, 25(1), 56-73.
- [19] Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9, 343-363.
- [20] Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65-99.
- [21] Diezmann, C. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 7(3), 4-8.
- [22] Van Dijk, I. M. A. W., Van Oers, B., & Terwel, J. (2003a). Providing or designing? Constructing models in primary maths education. *Learning and Instruction*, 13, 53-72.
- [23] Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tool for the solution of non routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 39-60.
- [24] Van Dijk, I. M. A. W., Van Oers, B., Terwel, J., & Van den Eeden, P. (2003b). Strategic learning in primary mathematics education: Effects of an experimental program in modelling. *Educational Research and Evaluation: An International Journal on Theory and Practice*, 9(2), 161-187.
- [25] Selter, C. (1993). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe [Going one's own way in arithmetic lessons at primary level]. Wiesbaden: DUV.
- [26] Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684-689.
- [27] Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 53-78.
- [28] VanMeter, P., & Garner, J. (2005). The promise and practice of learner-generated drawing: Literature review and synthesis. *Educational Psychology Review*, 17(4), 285-325.
- [29] Sherin, B. L. (2000). How students invent representation of motion: A genetic account. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19(4), 399-441.
- [30] Ott, B. (2016). Textaufgaben grafisch darstellen: Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme [Graphic representations for word problems: Development of an analysis instrument and evaluation of an intervention measure.]. Münster, Germany: Waxmann.
- [31] Ott, B. (2017). Children's drawings for word problems – Design of a theory and an analysis tool. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 3984-3991). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
- [32] Palmer, S. E. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization* (pp. 259-303). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- [33] Kirsch, A. (1997). *Mathematik wirklich verstehen* [Really understand mathematics] (3ed.). Cologne, Germany: Aulis-Verlag Deubner.
- [34] Peschek, W. (1988). Untersuchungen zur Abstraktion und Verallgemeinerung [Studies on abstraction and generalization]. In W. Dörfler (Ed.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung* (pp. 127–190). Vienna, Austria: Hölder-Pichler-Tempsky.
- [35] Sturm, N. (2018). *Problemhaltige Textaufgaben lösen* [Solving problematic word problems]. Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum.
- [36] Ott, B. (2018). 'Mach doch einfach mal 'ne Skizze!' Grafisches Darstellen im Sachrechnen ['Just make a sketch!' Graphic representation for word problems]. In E. Plackner & J. Postupa (Eds.), *MaMut – Veranschaulichen* (pp. 7–30). Hildesheim, Germany: Franzbecker.
- [37] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- [38] Schülke, C. (2013). *Mathematische Reflexion in der Interaktion von Grundschulkindern* [Mathematical reflection in the interaction of primary school children]. Münster, Germany: Waxmann.
- [39] Bortz, J., & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* [Statistics for human and social scientists] (7ed.). Berlin, Heidelberg: Springer.
- [40] Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2ed.). USA: Lawrence Erlbaum Associates.

