

خواص مرکز مطلق در گروه‌های آبلی متناهی تولید شده

فرود پروانه

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۹/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۶/۱۹

چکیده

مرکز مطلق گروه G که با $L(G)$ نشان داده می‌شود در واقع تعمیم مفهوم مرکز گروه G یعنی $Z(G)$ است و مورد مطالعه بسیاری از محققین نظریه گروه‌ها قرار گرفته است. در [۶] و [۷] مفاهیم خودحل‌پذیری و خودپوچتوانی گروه‌ها که مرتبط با مرکزهای مطلق گروه است معرفی شده‌اند. و همچنین در [۵] ثابت شده است، اگر $\frac{G}{L(G)}$ متناهی باشد آنگاه $K(G)$ و $Aut(G)$ که به ترتیب زیرگروه خودجابجاگرها و گروه اتومورفیسم‌های G می‌باشند، متناهی هستند. هدف از نوشتن این مقاله شناسایی کامل و بررسی خواص مرکز مطلق گروه برای گروه‌های آبلی متناهی تولید شده می‌باشد. برای اثبات قضیه اصلی دو حالت در نظر می‌گیریم. ابتدا قضیه را برای گروه‌های آبلی متناهی اثبات می‌کنیم. برای اثبات قضیه شدیداً از قضیه اساسی جبر و تجزیه گروه به حاصل ضرب مستقیم زیرگروه‌های دوری استفاده می‌شود. در ادامه فرض می‌کنیم گروه از مرتبه عددی فرد باشد. در این حالت قضیه را ثابت می‌کنیم. همچنین درحالتی که مرتبه گروه زوج باشد نیز قضیه ثابت می‌شود. سپس حالتی را در نظر می‌گیریم که گروه نامتناهی و دارای تعداد مولد متناهی باشد. (گروه‌های آبلی متناهی تولید شده).

واژه‌های کلیدی: مرکز مطلق گروه، یکرختی گروه‌ها، گروه‌های آبلی متناهی تولید شده، ضرب خارجی گروه‌ها

۱. مقدمه

در ۱۹۹۴ پیتز هگارتی در [۵] ثابت می‌کند اگر گروه خارج قسمتی $\frac{G}{L(G)}$ متناهی باشد آنگاه $K(G)$ نیز متناهی است که البته این قضیه خود تعمیم قضیه معروف شور در ۱۹۰۴ بود که بیان می‌کند اگر $\frac{G}{Z(G)}$ متناهی باشد آنگاه G' متناهی است. در ۲۰۱۰ و ۲۰۱۵ بوسيله [۶] و [۷] نیز مفاهیم جدید خودپوچ توان و خودحل‌پذیر که دقیقاً مرتبط با مرکزهای مطلق گروه می‌باشد معرفی شده است. بخصوص در [۷] سری اتومرکزی افزایشی از مرکزهای مطلق یک گروه که تعمیم سری افزایشی مرکزی گروه است، تعریف شده است. همچنین بیان می‌کند نه فقط مرکز مطلق گروه، بلکه مرکزهای مطلق گروه کاربرد و مورد استفاده دارد. برای اطلاعات بیشتر به [۴]، [۳]، [۲] مراجعه شود. مرکز مطلق گروه G از هر مرتبه بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L(G) = L_1(G) \subseteq L_2(G) \subseteq \dots \subseteq L_n(G) \dots, \quad \frac{L_{i+1}(G)}{L_i(G)} = L\left(\frac{G}{L_i(G)}\right), \quad i \geq 1$$

می‌نامیم. G گروه i را مرکز مطلق $L_i(G)$

در اینجا در قالب یک قضیه اصلی و چند قضیه فرعی مرکز مطلق گروه، برای گروه‌های آبلی متناهی تولید شده شناسایی و معرفی می‌شود. به کمک این مقاله و [۷] می‌توانیم مرکزهای مطلق یعنی $(L_i(G), i \text{ دلخواه})$ برای گروه‌های آبلی و متناهی تولید شده بدست آوریم.

برای اثبات قضیه اصلی ابتدا چند قضیه جبر پایه که موارد کاربردی دارند را بیان می‌کنیم. چون قضیه اصلی به روش حالات یا برهان فرسایشی ثابت می‌شود، به شکل چند لم یا قضیه حالات متفاوت و ممکن حکم را در نظر گرفته، بررسی و اثبات می‌کنیم. ابتدا تعمیم تعریف مرکز مطلق گروه ارائه می‌شود.

تعریف: فرض کنید G یک گروه و S زیر مجموعه یا زیرگروهی از G باشد در این صورت

$$L^S(G) = \{s \in S : [s, \alpha] = s^{-1}\alpha(s) = 1, \forall \alpha \in \text{Aut}(G)\}$$

$L^S(G)$ یک زیرگروه مشخصه از G می‌باشد اگر $G = S$ آنگاه $L^S(G)$ را مرکز مطلق گروه G می‌نامیم و با $L(G)$

نشان می‌دهیم یعنی

$$L(G) = \{g \in G : [g, \alpha] = g^{-1}\alpha(g) = 1, \forall \alpha \in \text{Aut}(G)\}$$

در هر حالت ممکن برای S ، $L^S(G)$ همواره مشمول در $L(G)$ است. و البته از تعریف مرکز مطلق گروه، نتیجه می‌شود اگر H زیرگروه مشخصه گروه G باشد آنگاه $L(H) \subseteq L(G)$.

علائم معمول و استاندارد جبر، و قضیه‌ها جبر پایه از [۱] اقتباس شده است.

قضیه ۱: فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی باشد در این صورت می‌توان G را به صورت حاصل ضرب مستقیم زیر گروه‌های سیلوی خود نمایش داد.

اثبات: [۱] قضیه ۱۲-۱

قضیه ۲: فرض کنید G یک گروه آبلی و $|G| = p^n$ که در آن p عددی اول باشد. در این صورت G برابر با حاصل ضرب مستقیم زیر گروه‌های دوری خود است و این تجزیه G یکتا است مگر در ترتیب قرار گرفتن زیر گروه‌های دوری موجود در حاصل ضرب.

اثبات: [۱] قضیه ۱۲-۲

قضیه ۳: فرض کنید G یک گروه و $G_1, G_2, \dots, G_n$ زیر گروه‌های نرمال گروه G باشند بطوریکه

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \text{ و } |G_i| = g_i, i \neq j, (g_i, g_j) = 1$$

$$Aut(G) = Aut(G_1) \times Aut(G_2) \times \dots \times Aut(G_n)$$

اثبات: [۱] لم ۱۲-۴

قضیه ۴: فرض کنید G یک گروه و $G_1, G_2, \dots, G_n$ زیر گروه‌های نرمال گروه G باشند بطوریکه

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \text{ و } |G_i| = g_i, i \neq j, (g_i, g_j) = 1$$

$$L(G) = L(G_1) \times L(G_2) \dots \times L(G_n)$$

اثبات: از قضیه ۳ داریم

$$\tau: Aut(G) \rightarrow Aut(G_1) \times Aut(G_2) \times \dots \times Aut(G_n), \tau(\varphi) = (\varphi|_{G_1}, \varphi|_{G_2}, \dots, \varphi|_{G_n})$$

$$\gamma: Aut(G_1) \times Aut(G_2) \times \dots \times Aut(G_n) \rightarrow Aut(G), \gamma((\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)) = \overline{\theta_1 o \theta_2 o \dots o \theta_n}$$

که در آن $\bar{\theta}_i(g_1 g_2 \dots g_i \dots g_n) = g_1 g_2 \dots \theta_i(g_i) \dots g_n$ می‌توان دید که τ و γ دو یکرختی معکوس هم هستند. حال فرض کنید $x \in L(G)$ و $\alpha_i \in Aut(G_i)$ و دلخواه، لذا $\exists x_i \in G_i : x = x_1 x_2 \dots x_n$

$$e = \overline{\alpha_1 o \alpha_2 o \dots o \alpha_n}(x_1 x_2 \dots x_n) = \alpha_1(x_1) \alpha_2(x_2) \dots \alpha_n(x_n) \Rightarrow \alpha_i(x_i) = e$$

$$\Rightarrow x_i \in L(G_i) \Rightarrow x = x_1 x_2 \dots x_n \in L(G_1) \times L(G_2) \dots \times L(G_n)$$

$$\Rightarrow L(G) \subseteq L(G_1) \times L(G_2) \dots \times L(G_n)$$

به طریق مشابه عکس جزئیت نیز برقرار است لذا

$$L(G) = L(G_1) \times L(G_2) \dots \times L(G_n)$$

با محاسبات نسبتاً ساده و به کمک تعریف مرکز مطلق می‌توان دید

$$L(Z_2) = L(Z_4) = L(Z_8) = L(Z_4 \times Z_2) \cong Z_2, \quad L(Z_2 \times Z_2) = \{e\}$$

حال چند قضیه ارائه می‌دهیم که در اثبات قضیه اصلی کاربرد دارند. قضیه اصلی مقاله که به وسیله آن وضعیت مرکز مطلق یک گروه آبلی متناهی تولید شده کاملاً مشخص می‌شود را بصورت زیر بیان می‌کنیم.

۲. مبانی نظری و پیشینه تحقیق

نظریه گروه‌ها یکی از گرایش‌های ریاضیات محض می‌باشد که البته کاربردهای در رشته‌های شیمی و سایر علوم دارد و مقاله حاضر در زمینه جبر، گروه‌ها می‌باشد. در خصوص پیشینه مطالب مورد مطالعه می‌توان بیان کرد که در سال ۱۹۰۴ شخصی به نام شور ثابت می‌کند که اگر برای گروه خارج قسمتی $\frac{G}{Z(G)}$ متناهی باشد آنگاه G' متناهی است. همچنین در ۱۹۹۴ پیتر هگارتی در [۵] ثابت می‌کند اگر گروه خارج قسمتی $\frac{G}{L(G)}$ متناهی باشد آنگاه $K(G)$ نیز متناهی است. این قضیه خود تعمیمی از قضیه معروف شور به حساب می‌آید. در سال ۲۰۱۰ و ۲۰۱۵ بوسیله

[۶] و [۷] نیز مفاهیم جدید خودپوچ توان و خودحل‌پذیر که دقیقاً مرتبط با مرکزهای مطلق گروه می‌باشد معرفی شده است. بخصوص در [۷] سری اتومرکزی افزایشی از مرکزهای مطلق یک گروه که تعمیم سری افزایشی مرکزی گروه است، تعریف شده است. همچنین بیان می‌کند نه فقط مرکز مطلق گروه، بلکه به موارد استفاده مرکزهای مطلق پرداخته شده است.

۳. روش پژوهش

با توجه به اینکه مبحث مورد نظر بیشتر در زمینه ریاضیات محض می‌باشد روش تحقیق و پژوهش بیشتر به صورت کتابخانه‌ای و جستجوی اینترنتی بوده است.

۴. قضیه اصلی

قضیه اصلی: اگر X یک گروه آبلی متناهی تولید شده باشد آنگاه $L(X) = \{e\}$ یا $L(X) \cong Z_2$

با دقت، حالات ممکن گروه آبلی و متناهی تولید شده X را بررسی و هر حالت را در قالب یک قضیه بیان و ثابت می‌کنیم.

ابتدا گروه‌های آبلی و متناهی را در نظر گرفته و بررسی می‌کنیم. برای این منظور حالات متفاوت گروه متناهی و آبلی G در قضیه‌های جداگانه که هر کدام حالتی خاص از قضیه اصلی می‌باشد را بیان و ثابت می‌کنیم. گروه‌های آبلی متناهی را از نظر مرتبه، به دو دسته، گروه‌های آبلی با مرتبه فرد و گروه‌های آبلی با مرتبه زوج تقسیم می‌شوند. هر دسته را مستقلاً مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در قضیه‌ی ساده زیر وضعیت گروه‌های آبلی از مرتبه فرد کاملاً مشخص می‌شود.

قضیه ۵: اگر G یک گروه آبلی و از مرتبه عددی فرد باشد آنگاه $L(G) = \{e\}$

اثبات: چون G یک گروه آبلی است $\theta: G \rightarrow G$ با ضابطه‌ی $\theta(x) = x^{-1}$ $\forall x \in G$ یک اتومورفیزم از G است اگر $g \in L(G)$ و $g \neq e$ آنگاه

$$\theta(g) = g^{-1} = g \Rightarrow g^2 = e \Rightarrow 2|o(G)$$

که در آن $o(G)$ مرتبه گروه G است. در نتیجه مرتبه G باید عددی زوج باشد که تناقض با فرض قضیه می‌باشد لذا $L(G) = \{e\}$

نتیجه: اگر G یک گروه دوری از مرتبه عددی اول غیر از ۲ باشد آنگاه $L(G) = \{e\}$. به عبارت دیگر

$$L(Z_p) = \{e\}, p \neq 2 \text{ و عدد اول است.}$$

قضیه ۶: اگر $G = Z_{2^n}$ گروهی دوری از مرتبه 2^n باشد آنگاه $L(G) \cong Z_2$

اثبات: فرض کنید $G = \langle a : a^{2^n} = 1 \rangle$. چون G گروهی دوری از مرتبه 2^n است، لذا تمام اتومورفیزم-های G به صورت زیر تعریف می‌شوند. روشن است که $|Aut(G)| = \varphi(2^n)$

$$\varphi_i: G \rightarrow G, \varphi_i(a) = a^i, i < 2^n \text{ فرد } i$$

فرض کنید $a^s \in L(G)$ آنگاه (بنا به تعریف $L(G)$) لازم است $\forall i, \varphi_i(a^s) = a^s$ و با توجه به ضابطه φ_i

$$a^{is} = a^s \Rightarrow a^{s(i-1)} = e \Rightarrow 2^n | s(i-1).$$

شرایط و محدودیت‌های i ایجاب می‌کند عدد S باید ۰ یا 2^{n-1} باشد و در نتیجه

$$L(G) = \{e, a^{2^{n-1}}\} \cong Z_2$$

لم ۱: فرض کنید A یک p -گروه متناهی و آبلی و $A = C_{p^{m_1}} \times \dots \times C_{p^{m_r}}$ که در این حاصل ضرب $|A| = p^{m_1 + \dots + m_r}$ فرض کنید $C_{p^{m_i}} = \langle a_i \rangle, m_1 \leq \dots \leq m_r$. $\gamma: A \rightarrow A$ یک اتومورفیزم از A باشد واضح است که γ باید روی مولدهای A به صورت زیر عمل کند

$$\gamma(a_i) = \prod_{j=1}^r a_j^{\gamma_{ij}}, 1 \leq i \leq r, 0 \leq \gamma_{ij} \leq p^{m_i}, o(\gamma(a_i)) = o(a_i)$$

γ یک اتومورفیزم A است اگر و فقط اگر درترمینان ماتریس $r \times r$, (γ_{ij}) ، همنهشت با صفر به هنگ p نباشد.

اثبات: [۸] لم ۱۹-۳

قضیه ۷: $L\left(\overbrace{Z_{p^k} \times \dots \times Z_{p^k}}^r\right) = \{e\}$ که در آن p یک عدد اول k عدد طبیعی و $r \geq 2$ است.

اثبات: اگر $p \neq 2$ آنگاه گروه $G = \overbrace{Z_{p^k} \times \dots \times Z_{p^k}}^r$ از مرتبه عددی فرد است. و بنا به قضیه ۱ حکم برقرار است. فرض می‌کنیم $p = 2$

$$G = Z_{2^k} \times Z_{2^k} \times \dots \times Z_{2^k} = \langle a_1: a_1^{2^k} = 1 \rangle \times \langle a_2: a_2^{2^k} = 1 \rangle \times \dots \times \langle a_r: a_r^{2^k} = 1 \rangle$$

اتومورفیزم‌های زیر که بخشی از اتومورفیزم‌های گروه G است را در نظر می‌گیریم

$$\varphi_j = \begin{cases} a_1 \rightarrow a_2^j \\ a_2 \rightarrow a_1^j a_2^j \\ \vdots \\ a_r \rightarrow a_1^j a_2^j \dots a_r^j \end{cases}, 1 < j < 2^k$$

اگر $k=1$ آنگاه $j=1$ در نظر می‌گیریم به آسانی می‌توان دید که $\det(\gamma_{ij}) \equiv 1 \pmod{2}$ و بنا به لم فوق (۱)

φ_j یک اتومورفیزم G است.

اگر یک عضو دلخواه از G مانند $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}$, $0 \leq m_1, m_2, \dots, m_r < 2^n$ در

$L(G)$ قرار داشته باشد باید تحت تمام اتومورفیزم‌های G از جمله φ_j پایا باشد. در نتیجه لازم است

$$\varphi_j(a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}) = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}$$

با توجه به ضابطه φ_j تساوی زیر حاصل می‌شود

$$a_2^{jm_1} a_1^{jm_2} a_2^{jm_2} \dots a_1^{jm_r} a_2^{jm_r} \dots a_r^{jm_r} = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}$$

با حذف عامل‌های مشترک از طرفین و توجه به مرتبه a_i ها و انتخاب m_i ها نتیجه می‌شود

$$m_1 = m_2 = \dots = m_{r=0}$$

و لذا حکم ثابت است.

قضیه ۸: فرض کنید $X = G \times H = \langle a: a^{2^n} = 1 \rangle \times \langle b: b^{2^m} \rangle$ که در آن $m < n$ در این صورت $L(X) \cong Z_2$

اثبات: با توجه به دوری بودن دو گروه G و H و لم ۱ کافی است، اتومورفیسم‌ها را روی مولدها تعریف کنیم. از طرفی چون مرتبه اعضا تحت اتومورفیسم‌ها حفظ می‌شود لذا شکل کلی اتومورفیسم‌های X عبارت است از

$$\gamma_{i,j,s,k} = \begin{cases} a \rightarrow a^i b^k, & 0 < i \text{ فرد} < 2^n, 0 \leq k < 2^m \\ b \rightarrow a^s b^j, & s = 0, 2^{n-m}, \dots, 2^{n-1}, 0 < j \text{ فرد} < 2^m \end{cases}$$

با توجه انتخاب $\begin{pmatrix} i & k \\ s & j \end{pmatrix} \equiv 1 \pmod{2}$ ، i, j, s, k بنا به لم ۱، $\gamma_{i,j,s,k}$ اتومورفیسم X می‌باشد.

اگر توانی از a مانند a^r و یا توانی از b مانند b^f متعلق به $L(X)$ باشد باید تحت تمام اتومورفیسم‌ها پایا باشند به این معنی که $\gamma_{i,j,s,k}(b^f) = b^f$ و $\gamma_{i,j,s,k}(a^r) = a^r$

$$a^{ri} b^{rk} = a^r \Rightarrow a^{r(i-1)} b^{rk} = e \Rightarrow \forall i, 2^n | r(i-1) \Rightarrow r = 2^{n-1}, 0$$

و معادله $b^{rk} = e$ نیز همواره برقرار است. از طرفی باید

$$\forall s, \forall j, \quad a^{sf} b^{jf} = b^f \Rightarrow a^{sf} b^{f(j-1)} = e \Rightarrow 2^n | sf \Rightarrow \exists t: f = 2^m t \Rightarrow b^f = e$$

یعنی $L(X)$ شامل هیچ توانی از b نمی‌باشد. چون

$$o(a^{2^{n-1}}) = 2 \Rightarrow \forall f \neq 0, \quad b^f a^{2^{n-1}} \notin L(X)$$

در غیر این صورت $b^f \in L(X)$. فرض کنید $r \neq 2^{n-1}$ و $a^r b^f \in L(X)$ لذا

$$\forall \varphi \in \text{Aut}(X), \quad \varphi(a^r b^f) = a^r b^f \Rightarrow \varphi(a^r) \varphi(b^f) = a^r b^f$$

فرض کنید $\varphi: x \rightarrow x^{-1}$ نتیجه می‌شود $0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow 2^n | 2r \Rightarrow r = 0$

از این استدلال و محاسبات ارائه شده درمی‌یابیم که $L(X)$ فقط شامل $a^{2^{n-1}}$ است، و این نتیجه‌گیری اثبات را تمام می‌کند.

قضیه بیان شده حالت خاصی از قضیه زیر است که اثبات آن برای الگو گرفتن حالت کلی‌تر ارائه شده است.

قضیه ۹: فرض کنید

$$G = \langle a_1: a_1^{2^{n_1}} = e \rangle \times \langle a_2: a_2^{2^{n_2}} = e \rangle \times \dots \times \langle a_k: a_k^{2^{n_k}} = e \rangle$$

$$L(G) \cong Z_2 \text{ در این صورت } n_1 > n_2 \geq \dots \geq n_k$$

اثبات: با توجه به دوری بودن تمام مولفه‌های G و لم ۱ لازم است که اثرات اتومورفیسم‌های G روی مولدهای آن کاملاً معلوم باشد تا محاسبه و دستیابی به $L(G)$ روشن‌تر و آسان‌تر صورت پذیرد.

شکل کلی اتومورفیسم‌های G عبارت است از

$$\varphi[i_{lj}]_{k \times k} = \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1^{i_{11}} a_2^{i_{12}} \dots a_k^{i_{1k}}, & 0 < i_{11} < 2^{n_1}, 0 \leq i_{1j} < 2^{n_j}, j \geq 2 \\ a_2 \rightarrow a_1^{i_{21}} a_2^{i_{22}} \dots a_k^{i_{2k}}, & i_{21} = 0, 2^{n_1-n_2}, \dots, 2^{n_1-1}, 0 < i_{22} < 2^{n_2}, 0 \leq i_{2j} < 2^{n_j} \\ \vdots & \\ a_k \rightarrow a_1^{i_{k1}} a_2^{i_{k2}} \dots a_k^{i_{kk}}, & i_{kj} = 0, 2^{n_j-n_k}, \dots, 2^{n_j-1}, j < k, 0 < i_{kk} < 2^{n_k} \end{cases}$$

و $i_{jj}, j = 1, \dots, k$ ها فرد هستند. و ماتریس $[i_{lj}]_{k \times k}$ ماتریس توان‌های a_i ها یا همان ماتریس (γ_{ij}) در لم ۱ است که به خاطر انتخاب خاص درایه‌ها، دترمینان ماتریس $[i_{lj}]_{k \times k}$ همواره عددی فرد است (کافی است دترمینان را نسبت به سطر آخر بسط دهیم). توضیح اینکه درایه‌های روی قطر اصلی اعداد فرد و درایه‌های زیر قطر اصلی همگی اعداد زوج هستند لذا

$\det[i_{lj}]_{k \times k} \equiv 1 \pmod{2}$ و البته اتومورفیسم‌ها، به تمام توان‌های a_i ها وابستگی دارند و توان‌ها طوری انتخاب شده‌اند که مرتبه عناصر تحت اتومورفیسم‌ها حفظ شود.

$$[i_{lj}]_{k \times k} = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \dots & i_{1k} \\ i_{21} & i_{22} & \dots & i_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{k1} & i_{k2} & \dots & i_{kk} \end{pmatrix}_{k \times k}$$

$$\varphi_{[i_{lj}]_{k \times k}}(a_1^{2^{n_1-1}}) = a_1^{2^{n_1-1}} \Rightarrow a_1^{2^{n_1-1}} \in L(G) \Rightarrow Z_2 \leq L(G)$$

به همین ترتیب با محاسبه اثر اتومورفیسم‌ها روی توان‌های $a_i, i \geq 2$ ها نتیجه می‌شود $L(G)$ شامل هیچ توانی از $a_i, i \geq 2$ ها و حاصل ضرب‌های آنها نمی‌باشد و فقط شامل $a_1^{2^{n_1-1}}$ که عضوی از مرتبه ۲ است می‌باشد. لذا حکم قضیه درست است.

حال آخرین حالت ممکن برای تجزیه یک ۲-گروه را در نظر می‌گیریم. حالتی که در آن گروه دوری از بیشترین توان در حاصل ضرب تکرار شود مانند

$$G = \overbrace{Z_{2^n} \times \dots \times Z_{2^n}}^r \times Z_{2^{m_1}} \times \dots \times Z_{2^{m_k}}, \quad r \geq 2, n > m_1 \geq \dots \geq m_k$$

برای محاسبه مرکز مطلق در این شرایط کافی است حالت $r = 2$ را در نظر بگیریم حالت‌های

$r > 2$ تعمیم مستقیم و سر راست آن می‌باشد.

قضیه ۱۰: فرض کنید $G = Z_{2^n} \times Z_{2^n} \times Z_{2^{m_1}} \times \dots \times Z_{2^{m_k}}$ در این صورت $L(G) = \{e\}$.

اثبات: با در نظر گرفتن مولد برای گروه‌های دوری، نمایش زیر برای G را در نظر می‌گیریم

$$G = \langle a: a^{2^n} = e \rangle \times \langle b: b^{2^n} = e \rangle \times H$$

که در آن

$$n > m_1 \geq \dots \geq m_k, H = \langle a_1: a_1^{2^{m_1}} = e \rangle \times \dots \times \langle a_k: a_k^{2^{m_k}} = e \rangle$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $L(G)$ شامل هیچ توانی از a و b نمی‌باشد.

برای اینکار دسته اتومورفیسم‌های

$$\theta_{i_1, j_1, i_2, j_2} = \begin{cases} a \rightarrow a^{i_1} b^{j_1}, & 0 \leq j_1, i_1 < 2^n \\ b \rightarrow a^{i_2} b^{j_2}, & 0 \leq j_2, i_2 < 2^n \\ h \rightarrow h & h \in H \end{cases}$$

بطوریکه $\det \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix}$ عددی فرد باشد (همواره باید مرتبه اعضا حفظ شود) از G را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $b^s \in L(G)$ لازم است b^s تحت همه اتومورفیسم‌ها از جمله اتومورفیسم زیر پایا باشد یعنی

$$\theta_{3,2,1,3}(b^s) = b^s \Rightarrow a^s b^{3s} = b^s \Rightarrow a^s b^{2s} = e \Rightarrow 2^n | s \Rightarrow s = 0$$

لذا $L(G)$ شامل هیچ توانی از b نمی‌باشد. به همین ترتیب اتومورفیسم $\theta_{3,1,2,3}$ هیچ توانی از a را ثابت نگه نمی‌دارد لذا $L(G)$ شامل هیچ توانی از a هم نمی‌تواند باشد. با محاسبه ساده‌ای می‌توان نشان داد که ترکیب دو اتومورفیسم $\theta_{3,1,2,3}$ و $\theta_{3,2,1,3}$ هیچ عضوی به شکل $a^s b^r$ را ثابت نگه نمی‌دارد لذا $L(G)$ شامل $a^s b^r$ نیز نمی‌تواند باشد. بنا به استدلال قضیه ۹ اتومورفیسم‌های که a و b را ثابت نگه می‌دارند نمی‌توانند روی عضوی از H به صورت همانی عمل کنند لذا $L(G)$ نمی‌تواند شامل عضوی از H باشد با ترکیب این اتومورفیسم‌ها نتیجه می‌شود $L(G)$ شامل عضوی به صورت $a^s b^r h$ نیز نمی‌تواند باشد و لذا $L(G) = \{e\}$ و این اثبات تمام می‌کند. از مطالب بیان شده می‌توان قضیه زیر را استخراج کرد.

قضیه ۱۰: فرض کنید $X = G \times H$ یک گروه آبلی متناهی باشد که در آن $G = Z_2^n$ و H یک ۲-گروه آبلی با شرایط $0 \leq \exp H < 2^n$ باشد در این صورت $L(X) \cong Z_2$ در غیر این صورت (گروه دوری G در حاصل-ضرب تکرار شود) $L(X) = \{e\}$.

با استدلال‌های مشابه می‌توان دید که گروه‌های آبلی و متناهی تولید شده، نیز وضعیتی همانند گروه‌های آبلی متناهی دارند. بنا به قضیه اساسی جبر در مورد گروه‌های آبلی متناهی تولید شده، هر گروه آبلی متناهی تولید شده را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی کپی از گروه دوری نامتناهی Z و گروه‌های دوری متناهی Z_n نوشت. مرکز مطلق گروه آبلی متناهی تولید شده بستگی به بخش متناهی گروه در نمایش ضرب مستقیم آن دارد.

گروه آبلی $Z \times Z = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ را در نظر بگیرید فرض کنید $a^s b^t \in L(Z \times Z)$ بنا به تعریف مرکز مطلق باید $a^s b^t$ تحت تمام اتومورفیسم $Z \times Z$ پایا باشد فرض کنید $\beta: x \rightarrow x^{-1}$ یک اتومورفیسم از $Z \times Z$ باشد لذا $\beta(a^s b^t) = a^s b^t \Rightarrow a^{-s} b^{-t} = a^s b^t \Rightarrow a^{2s} b^{2t} = e$ که تناقض با نامتناهی بودن مرتبه مولدهای a و b . در نتیجه $s = t = 0 \Rightarrow L(Z \times Z) = \{e\}$.

این استدلال ساده را می‌توان به هر تعداد متناهی از ضرب مستقیم گروه‌های دوری و نامتناهی Z یا کپی‌های Z تعمیم داد و لم زیر را نتیجه گرفت.

$$\text{لم ۲: } L\left(\overbrace{Z \times \dots \times Z}^{k \text{ مرتبه}}\right) = \{e\}, \quad k \geq 1$$

با محاسبه نسبتاً ساده می‌توان نشان داد $L(Z \times Z_2) \cong Z_2, L(Z \times Z_3) = \{e\}$

اثبات قضیه اصلی: فرض کنید $F = Z \times \dots \times Z$ و $X = F \times G$ که در آن G یک گروه آبلی متناهی و Z گروه دوری نامتناهی باشد. این تجزیه برای گروه‌های آبلی متناهی تولید شده بنا بر قضیه اساسی جبر ممکن می‌باشد. در واقع X یک گروه آبلی متناهی تولید شده نامتناهی است. روشن است مرتبه تمام اعضای G متناهی و مرتبه تمام اعضای F نامتناهی است فرض کنید $\varphi \in \text{Aut}(X)$ چون اتومورفیسم‌ها مرتبه را حفظ می‌کنند لذا تحدید φ روی G اتومورفیسمی از G است در نتیجه G زیرگروه مشخصه X می‌باشد. فرض کنید $|G|$ فرد باشد بنا به قضیه ۵ هیچ عضوی از G تحت اتومورفیسم‌های G و در نتیجه تحت اتومورفیسم‌های X ثابت نمی‌باشد و لذا $L(X)$ شامل هیچ عضوی از G نمی‌باشد. از طرفی اگر عضوی از F متعلق به $L(X)$ باید تحت تمام اتومورفیسم‌ها پایا باشد. بنا به اثبات لم ۲ لازم است بعضی از مولدهای F دارای مرتبه متناهی باشند که خود تناقض با ساختار گروه F می‌باشد. با همین استدلال نتیجه می‌شود که $L(X)$ شامل هیچ عضوی به شکل $fg, f \in F, g \in G$ نیز نمی‌تواند باشد لذا در این حالت $L(X) = \{e\}$. حال فرض کنید G گروهی متناهی از مرتبه زوج باشد. بنا به قضیه ۱ و قضیه ۲ گروه G به صورت حاصل ضرب مستقیم زیرگروه سیلوها و نهایتاً حاصل ضرب مستقیم زیرگروه‌های دوری خود نوشته می‌شود. چون G گروه آبلی است لذا هر زیرگروه سیلوی G نرمال و نتیجه مشخصه در G است. فرض کنید H ۲-زیرگروه سیلوی G باشد و $G = H \times G'$ که G' زیرگروهی از مرتبه فرد است چون H در G و X مشخصه است لذا ۲-زیرگروه سیلوی H در X مشخصه است در نتیجه اگر عضوی یا زیرگروهی از H تحت اتومورفیسم‌های H پایا باشد تحت تمام اتومورفیسم‌ها G و تحت تمام اتومورفیسم‌های X پایا می‌باشد. این استدلال همراه با تلفیق قضیه‌ی ۶، ۷، ۸ و ۹ حکم قضیه در این حالت نیز نتیجه می‌دهد.

منابع:

[1] مباحثی در جبر نوشته دکتر محمد رضا درفشه

- [2] C. Chis, M. Chis, and G. Silberberg, *Abelian groups as autocommutator groups*, Arch. Math. (Basel) 90 (2008), no. 6, 490-492.
- [3] M. Deaconescu and G. L. Walls, *Cyclic groups as autocommutator groups*, Comm. Algebra **35** (2007), no. 1, 215-219.
- [4] M. R. R. Moghaddam, F. Parvaneh, and M. Naghshineh, On The Lower Autocentral Series of Abelian Groups, Bulletin of Korean Math Soc. **48** (2011), No. 1, pp. 79-83
- [5] P. Hegarty, *The absolute centre of a group*, J. Algebra **169** (1994), no. 3, 929-935.
- [6] F. Parvaneh , M. R. R. Moghaddam, Some properties of Autonilpotent Groups. Italian Journal of Pure And Applied Mathematics - N. 35-2015 (1-8)
- [7] F. Parvaneh, M. R. R. Moghaddam, Some Properties of Autosoluble Groups. Journal of Mathematical Extension Vol. 5, No. 1 (2010), 13-19