

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره پنجاه و یکم، آذر و دی ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## نتایجی در مورد خاصیت آرتینی مدول‌های کوهمولوژی موضعی در نقطه ارتفاع ایده‌آل

میریوسف صادقی<sup>۱\*</sup>، خدیجه احمدی آملی<sup>۲</sup>، مریم چقامیرزا<sup>۳</sup>

(<sup>۱</sup>و<sup>۲</sup>) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۳/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۱۰

### چکیده

فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی نوتری،  $I$  یک ایده‌آل غیرصفر از  $R$  و  $M$  یک  $R$ -مدول تولید شده متناهی باشند. ابتدا نشان می‌دهیم در صورتیکه  $IM \neq M$  و  $\text{Min}(I) \setminus \text{Max}(R) \subseteq \text{MinAss}_R(M/IM)$  باشند، آنگاه  $\text{Supp}_R H_I^{\text{ht}M}(M) \not\subseteq \text{Max}(R)$  و بنابراین  $R$ -مدول  $H_I^{\text{ht}M}(M)$  آرتینی نیست. به عنوان نتیجه‌ای از آن و با انتخاب حلقه  $R$  به جای  $M$ ، این مطلب حاصل می‌شود که اگر  $\text{Min}(I) \setminus \text{Max}(R) \neq \emptyset$ ، آنگاه  $R$ -مدول  $H_I^{\text{ht}I}(R)$  آرتینی نیست. سپس در حالتی که  $R$  یک حلقه موضعی باشد، شرایطی را ارائه داده‌ایم که تحت آن‌ها  $R$ -مدول  $H_I^{\dim R - 1}(R)$  می‌تواند آرتینی باشد.

**واژه‌های کلیدی:** مدول‌های کوهمولوژی موضعی، مدول‌های آرتینی، حلقه‌های موضعی، حلقه‌های کوهن-مکالی، حلقه‌های به طور تحلیلی تحویل‌ناپذیر.

## ۱- مقدمه

صفر و دیگری توسط هارتشورن و اسپیزر روی حلقه-های موضعی منظم از مشخصه  $p$  به شرح زیر مورد بررسی قرار گرفته‌اند:

**قضیه ۱.۱.** ([۴] را ببینید) فرض کنید  $(R, \underline{m}, k)$  یک حلقه موضعی منظم و شامل (میدان اعداد گویا) باشد. همچنین فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل از حلقه  $R$  باشد به طوری که برای هر  $i < n$ ، تکیه‌گاه  $H_i^n(R)$  فقط شامل ایده‌آل ماگزیمال  $\underline{m}$  باشد. در این صورت برای هر  $i < n$ ،  $R$ -مدول  $H_i^n(R)$  آرتینی است.

**قضیه ۲.۱.** ([۵] را ببینید) فرض کنید  $(R, \underline{m}, k)$  یک حلقه موضعی منظم از مشخصه  $p > 0$  باشد. همچنین فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل از  $R$  باشد به طوری که برای برخی اعداد طبیعی  $n$ ، تکیه‌گاه  $H_i^n(R)$  فقط شامل ایده‌آل ماگزیمال  $\underline{m}$  باشد. در این صورت  $H_i^n(R)$  آرتینی است.

معمولاً اطلاعات چندان زیادی درباره  $H_i^i(M)$  در نقطه  $i = \dim M - 1$  در دسترس نیست. به عبارت دیگر مدولهای کوهمولوژی موضعی در این نقطه زیاد شناخته شده نیستند. هرچند مارلی در نتیجه ۵.۲ از [۶] نشان داده است که تکیه‌گاه  $H_i^i(M)$  در نقاط  $i = \dim M$  و  $i = \dim R$  یک مجموعه متناهی است.

در این مقاله، ما عمدتاً خواص آرتینی بودن و آرتینی نبودن مدولهای کوهمولوژی موضعی را مورد بحث قرار داده‌ایم. با توجه به اینکه مدولهای آرتینی دارای تکیه‌گاه متناهی هستند و تکیه‌گاه هر مدول شامل مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته آن مدول نیز است، از این رو بررسی آرتینی بودن  $H_i^i(M)$ ، در پاسخ به سؤال دوم هیونکه نیز مفید خواهد بود.

اگر بخواهیم با جزئیات بیشتری توضیح دهیم، به عنوان اولین و یکی از نتایج مهم در این مقاله، نشان می‌دهیم در صورتی که  $R$  یک حلقه نوتری دلخواه،

در سرتاسر این مقاله،  $R$  بیانگر یک حلقه جابجایی نوتری با عضو همانی غیر صفر،  $I$  بیانگر یک ایده‌آل غیر صفر از  $R$  و  $M$  یک  $R$ -مدول تولید شده متناهی می‌باشند. بطور معمول، از نمادهای  $\mathbb{N}^0$  برای نمایش مجموعه اعداد صحیح نامنفی، از  $\text{Min}(I)$  برای نمایش مجموعه ایده‌آل‌های اول مینیمال  $I$  و از  $\text{Max}(R)$  برای نمایش مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماگزیمال حلقه  $R$  استفاده خواهیم کرد. برای  $R$ -مدول  $M$ ، مقصود از نماد  $\text{Supp}_R(M)$ ، تکیه‌گاه  $M$  نسبت به حلقه  $R$  می‌باشد که عبارت است از مجموعه:

$$\text{Supp}_R(M) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid M_P \neq 0\}$$

$\hat{I}$ -آمین مدول کوهمولوژی موضعی  $M$  نسبت به ایده-آل  $I$  به صورت

$$H_i^i(M) := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \in \mathbb{N}}} \text{Ext}_R^i(R/I^n, M),$$

تعریف می‌شود. برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینه این مدول‌ها و هر نمادی که در مورد آن توضیح کافی داده نشده است، به [۱] و [۲] مراجعه شود.

هیونکه در [۳] سؤالات زیر را مطرح کرده است:

- در چه مواقعی  $R$ -مدول  $H_i^i(M)$  آرتینی است؟
  - در چه مواقعی مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته  $H_i^i(M)$  متناهی است؟
- آرتینی بودن مدول  $H_i^i(M)$  در مرجع [۱] و در قضیه‌های ۱.۷، ۳.۱، ۶.۱، ۷.۱ و همچنین در تمرینات ۱.۷، ۴.۱، ۷.۱، ۷.۱ مطالعه شده است.

علاوه بر این، همان‌طور که هونکه [۳] در قضیه‌های ۱.۴ و ۲.۴ نیز به آن‌ها اشاره کرده است، دو نتیجه مهم در دهه هفتاد و طی سال‌های ۱۹۷۳ و ۱۹۷۷ در مورد آرتینی بودن  $H_i^i(R)$  روی حلقه‌های موضعی منظم اثبات شده‌اند. یکی از این نتایج توسط اوگوس و روی حلقه‌های موضعی منظم از مشخصه

## ۲- نتایج اصلی

مطالب این بخش را با یک گزاره شروع می‌کنیم که نقاطی را مشخص می‌کند که در آن‌ها مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی نیستند. در ادامه، منظور ما از  $\text{ht } I$  یعنی ارتفاع ایده‌آل  $I$  نسبت به حلقه  $R$  می‌باشد، که عبارت است از:

$$\text{ht } I = \min\{\text{ht } P \mid P \in \text{Min}(I)\}.$$

همچنین منظور ما از  $\text{ht}_M I$ ، یعنی ارتفاع  $I$  نسبت به  $R$ -مدول  $M$  که عبارت است از:

$$\text{ht}_M I = \min\{\text{ht}_M P \mid P \in \text{Supp}_R(M), P \supseteq I\},$$

که در آن  $\text{ht}_M P = \dim_{R_P}(M_P)$  (تعریف ۶.۱۵ و تمرین ۱۵.۱۷ از [۲] را ملاحظه کنید).

**گزاره ۱.۲.** فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری دلخواه،  $M$  یک  $R$ -مدول تولید شده متناهی و  $I$  ایده‌آلی از  $R$  باشند به طوری که  $IM \neq M$  و

$$\text{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \text{Min}(I) \setminus \text{Max}(R).$$

در این صورت:

$$\text{Supp}_R H_I^{\text{ht}_M I}(M) \not\subseteq \text{Max}(R)$$

و در نتیجه  $R$ -مدول  $H_I^{\text{ht}_M I}(M)$  آرتینی نیست.

**برهان:** قرار می‌دهیم  $t = \text{ht}_M I$ . در این صورت  $P \in \text{MinAss}_R(M/IM) \setminus \text{Max}(R)$ ، چنان موجود است به طوری که

$$t = \text{ht}_M P = \dim_{R_P}(M_P)$$

چون  $P \in \text{Min}(I)$ ، بنابراین  $\sqrt{IR_P} = PR_P$  و لذا قضیه صفر نشدن گروتندیک نتیجه می‌دهد که

$$(H_I^t(M))_P \cong H_{IR_P}^t(M_P) \\ \cong H_{PR_P}^t(M_P) \neq 0.$$

بنابراین  $P \in \text{Supp}_R H_I^{\text{ht}_M I}(M) \setminus \text{Max}(R)$

و از این رو خواهیم داشت:

$$\text{Supp}_R H_I^{\text{ht}_M I}(M) \not\subseteq \text{Max}(R).$$

به عنوان چند نتیجه فوری از گزاره ۱.۲، نتایج بعدی حاصل می‌شوند.

$M$  یک  $R$ -مدول تولید شده متناهی و  $I$  یک ایده‌آل از  $R$  باشند به طوری که  $IM \neq M$  و

$$\text{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \text{Min}(I) \setminus \text{Max}(R).$$

آن‌گاه  $R$ -مدول  $H_I^{\text{ht}_M I}(M)$  آرتینی نیست (گزاره ۱.۲ را ببینید).

حال با به کار بردن مطلب فوق برای خود حلقه  $R$ ، نتیجه می‌شود که اگر  $\text{Min}(I) \setminus \text{Max}(R) \neq \emptyset$ .

آن‌گاه  $R$ -مدول  $H_I^{\text{ht}_M I}(R)$  آرتینی نیست (نتیجه ۲.۲ را ببینید). به عنوان یک نتیجه مهم از این

مطلب، نتیجه ۴.۲ حاصل می‌شود که بیان می‌کند:

اگر  $(R, \underline{m})$  یک حلقه موضعی و  $I$  ایده‌آلی از  $R$  باشند به طوری که  $0 < \dim R/I$ ، آن‌گاه  $R$ -مدول  $H_I^{\text{ht}_M I}(R)$  آرتینی نیست.

این بدان معنی است که روی یک حلقه موضعی

دلخواه مانند  $(R, \underline{m})$ ،  $H_I^{\text{ht}_M I}(R)$  آرتینی است اگر و تنها

اگر  $\dim R/I = 0$  و اگر و تنها اگر به ازای هر

$R$ -مدول تولید شده متناهی  $M$  و هر  $i \in \mathbb{N}_0$ ،

$R$ -مدول  $H_I^i(M)$  آرتینی باشد (نتیجه ۷.۲ را ببینید).

علاوه بر این، در این مقاله نتایج جالبی را روی حلقه-

های موضعی به طور تحلیلی تحویل‌ناپذیر<sup>۲</sup> و

همچنین روی حلقه‌های کوهن-مکالی (نه لزوماً

موضعی) ارائه می‌دهیم (نتیجه ۸.۲ و گزاره ۹.۲ را

ببینید). لازم به یادآوری است که حلقه موضعی

$(R, \underline{m})$  یک حلقه به طور تحلیلی تحویل‌ناپذیر نامیده

می‌شود، هرگاه  $\hat{R}$  (یعنی حلقه کامل شده  $R$  نسبت

به ایده‌آل ماگزیمال  $\underline{m}$ ) یک حوزه صحیح باشد.

در نهایت و به عنوان آخرین و یکی از مهم‌ترین نتایج

در این مقاله، در گزاره ۱۱.۲ شرایطی را ارائه می‌دهیم

که تحت آن‌ها  $R$ -مدول  $H_I^{\dim R-1}(R)$  می‌تواند

آرتینی باشد.

و حکم به راحتی از نتیجه ۲.۲ به دست می‌آید.

در نتایج قبلی شرایطی بررسی شد که مدول‌های کوهمولوژی موضعی در نقطه ارتفاع ایده‌آل  $I$ ، آرتینی نبودند. گزاره بعدی به عنوان نتیجه دیگری از گزاره ۱.۲، شرایطی را بررسی می‌کند که تحت آن‌ها مدول کوهمولوژی موضعی می‌تواند در نقطه ارتفاع ایده‌آل، آرتینی باشد. در حقیقت گزاره ۵.۲ بیانگر آن است که اگر آرتینی  $H_i^t(M)$  در نقطه  $i = \text{ht}_M I$  آرتینی باشد، آن‌گاه این مدول به ازای هر  $i \in \mathbb{N}_0$  نیز آرتینی است. این مطلب نشان می‌دهد عکس تمرین ۴.۱.۷ از [۱] تحت شرایطی برقرار است.

**گزاره ۵.۲.** فرض کنید  $(R, \underline{m})$  یک حلقه موضعی و  $M$  یک  $R$ -مدول تولید شده متناهی باشند. همچنین فرض کنید  $I$  ایده‌آلی از  $R$  باشد به طوری که  $IM \neq M$

$$\text{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \text{Min}(I)$$

قرار دهید  $t = \text{ht}_M I$ . در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادل هستند:

$$\text{Supp}_R H_i^t(M) \subseteq \{ \underline{m} \} \quad (۱)$$

$$\text{Min}(I) \subseteq \{ \underline{m} \} \quad (۲)$$

$$(۳) \text{ به ازای هر } i \in \mathbb{N}_0, H_i^t(M) \text{ آرتینی است؛}$$

$$(۴) H_i^t(M) \text{ آرتینی است.}$$

**برهان:** (۲)  $\rightarrow$  (۱): به برهان خلف، فرض کنیم حکم برقرار نباشد و  $\text{Min}(I) \not\subseteq \{ \underline{m} \}$ . بنابراین با توجه به فرض خواهیم داشت:

$$\text{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \text{Min}(I) \setminus \{ \underline{m} \}$$

حال بنابر گزاره ۱.۲، نتیجه می‌شود:

$$\text{Supp}_R H_i^t(M) \not\subseteq \{ \underline{m} \}$$

و این متناقض با فرض است. لذا باید داشته باشیم:

$$\text{Min}(I) \subseteq \{ \underline{m} \}$$

**نتیجه ۲.۲.** فرض کنید  $I$  ایده‌آلی از  $R$  باشد به طوری که  $\text{Min}(I) \setminus \text{Max}(R) \neq \emptyset$ . قرار دهید  $s = \text{ht } I$ . در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{Supp}_R H_i^s(R) \not\subseteq \text{Max}(R)$$

و بنابراین  $R$ -مدول  $H_i^s(R)$  آرتینی نیست. بویژه در حالتی که  $(R, \underline{m})$  یک حلقه موضعی بوده و  $\sqrt{I} \neq \underline{m}$  (یا به طور معادل  $s < \dim R$ ) باشد، آن‌گاه  $H_i^s(R)$  آرتینی نیست.

**برهان:** از اینکه  $\text{Ass}_R(R/I) = \text{ass}(I)$ ، لذا شرایط گزاره ۱.۲ برقرار هستند.

**نتیجه ۳.۲.** فرض کنید  $(R, \underline{m})$  یک حلقه موضعی از بعد  $n$  و  $M$  یک  $R$ -مدول تولید شده متناهی باشند. همچنین فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل با بعد یک از  $R$  (یعنی  $\dim R/I = ۱$ ) باشد به طوری که:

$$\text{MinAss}_R(M/IM) \not\subseteq \{ \underline{m} \}.$$

قرار دهید  $t = \text{ht}_M I$  در این صورت

$$\text{Supp}_R H_i^t(M) \not\subseteq \{ \underline{m} \}$$

و در نتیجه  $H_i^t(M)$  آرتینی نیست.

**برهان:** از اینکه  $\dim R/I = ۱$  و

$$\text{MinSupp}_R(M/IM) = \text{MinAss}_R(M/IM) \not\subseteq \{ \underline{m} \},$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{MinAss}_R(M/IM) \subseteq \text{Min}(I).$$

حال حکم با توجه به گزاره ۱.۲ به راحتی حاصل می‌شود.

**نتیجه ۴.۲.** فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری دلخواه (نه لزوماً موضعی) و  $I$  یک ایده‌آل از  $R$  با شرط  $0 < \dim R/I$  باشند. قرار دهید  $s = \text{ht } I$ . در این صورت  $R$ -مدول  $H_i^s(R)$  آرتینی نیست.

**برهان:** با توجه به این که  $0 < \dim R/I$ ، لذا

خواهیم داشت:

$$\text{Min}(I) \setminus \text{Max}(R) \neq \emptyset$$

دقیق است و به ازای هر  $i \in \mathbb{N}_0$ ،  $H_i^i(-)$  یک تابعگن جمعی است، لذا  $H_i^n(F)$  آرتینی است و در نتیجه  $H_i^n(M)$  نیز آرتینی خواهد بود. حال حکم به استقراء نزولی روی  $i$ ‌هایی که  $t \leq i \leq n$  و با توجه به رشته دقیق بلند:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_i^{i-1}(M) \rightarrow H_i^i(K) \rightarrow H_i^i(F) \\ \rightarrow H_i^i(M) \rightarrow H_i^{i+1}(K) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

حاصل می‌شود.  
( $\Rightarrow$ ) این قسمت بدیهی است.

**نتیجه ۷.۲.** فرض کنید  $(R, \underline{m})$  یک حلقه نوتری موضعی و  $I$  یک ایده‌آل از  $R$  باشند. قرار دهید  $S = \text{ht } I$  در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادل هستند:

$$\text{Supp}_R H_i^S(R) \subseteq \{ \underline{m} \} \quad (۱)$$

$$\text{Min}(I) \subseteq \{ \underline{m} \} \quad (۲)$$

$$(۳) \text{ به ازای هر } i \in \mathbb{N}_0, H_i^i(R) \text{ آرتینی است؛}$$

$$(۴) \text{ به ازای هر } i \in \mathbb{N}_0 \text{ و هر } R\text{-مدول تولید}$$

شده متناهی  $M$ ،  $H_i^i(M)$  آرتینی است.

**برهان:** حکم به راحتی از گزاره‌های ۵.۲ و ۶.۲ حاصل می‌شود.

**نتیجه ۸.۲.** فرض کنید  $(R, \underline{m})$  یک حلقه نوتری موضعی به‌طور تحلیلی تحویل‌ناپذیر از بعد  $n$  و  $I$  یک ایده‌آل سره از  $R$  باشند. قرار دهید  $S = \text{ht } I$  در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

$$(۱) \text{ اگر } H_i^n(R) = 0, \text{ آنگاه } H_i^S(R)$$

آرتینی نیست.

$$(۲) \text{ اگر } H_i^n(R) \neq 0, \text{ آنگاه برای هر } R$$

مدول تولید شده متناهی مانند  $M$  و هر

$$i \in \mathbb{N}_0, H_i^i(M) \text{ آرتینی است.}$$

(۳)  $\rightarrow$  (۲): از این که  $\text{Min}(I) \subseteq \{ \underline{m} \}$ ، لذا  $\sqrt{I} = \underline{m}$  و در نتیجه به ازای هر  $i \in \mathbb{N}_0$ ، خواهیم داشت  $H_i^i(M) \cong H_{\underline{m}}^i(M)$  و بنابراین به ازای هر  $i \in \mathbb{N}_0$ ،  $H_i^i(M)$  آرتینی خواهد بود.

$$(۱) \rightarrow (۴) \rightarrow (۳): \text{ بدیهی هستند.}$$

به عنوان یک نتیجه از گزاره ۵.۲، نتیجه ۷.۲ حاصل می‌شود. برای دست‌یابی به این نتیجه، به گزاره ۶.۲ نیازمندیم.

**گزاره ۶.۲.** فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری دلخواه (نه لزوماً موضعی) و  $t \in \mathbb{N}_0$  در این صورت به ازای هر  $t \leq i$ ،  $H_i^i(R)$  آرتینی است اگر و تنها اگر به ازای هر  $R$ -مدول تولید شده متناهی  $M$  و هر  $t \leq i$ ،  $H_i^i(M)$  آرتینی باشد.

**برهان:** ( $\Leftarrow$ ) فرض کنیم به ازای هر  $t \leq i$ ،  $H_i^i(R)$  آرتینی و  $M$  یک  $R$ -مدول تولید شده متناهی دلخواه باشند. در این صورت رشته دقیق کوتاهی به صورت:

$$0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$$

موجود است که در آن  $F$  یک  $R$ -مدول آزاد تولید شده متناهی است. قرار می‌دهیم  $n = \text{ara}(I)$  بنابراین با توجه به نتیجه ۳.۳.۳ از [۱]، برای هر  $n < i$  خواهیم داشت:

$$H_i^i(K) = H_i^i(F) = H_i^i(M) = 0$$

حال بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم  $t \leq n$  و از این رو کافی است حکم را برای تمام مقادیر  $i$  که  $t \leq i \leq n$  اثبات کنیم. به استقراء نزولی حکم را ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض کنید  $n = i$ . از اینکه رشته

$$H_i^n(K) \rightarrow H_i^n(F) \rightarrow H_i^n(M) \rightarrow 0,$$

همچنین به طور مشابه در تعریف ۱.۲ از [۸]، مؤلفین به ازای عدد صحیح  $n \leq 0$ ، کلاس  $R$ -مدول‌های در بعد کمتر از  $n$  را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین یادآوری می‌شود  $X$  یک  $R$ -مدول در بعد کمتر از  $n$  نامیده می‌شود، هرگاه  $R$ -زیرمدول تولید شده متناهی  $N$  از  $X$  چنان موجود باشد که:

$$\dim \text{Supp } X/N \leq n$$

به راحتی قابل بررسی است که به ازای  $n$  های مناسب، کلاس  $R$ -مدول‌های  $\text{FD}_{\leq n}$  و همچنین کلاس  $R$ -مدول‌های در بعد کمتر از  $n$ ، تعمیمی از کلاس  $R$ -مدول‌های تولید شده متناهی، کلاس  $R$ -مدول‌های آرتینی و کلاس  $R$ -مدول‌های مینی‌ماکس هستند. برای بررسی این موضوع به لم ۳.۲ از [۷] و تبصره ۲.۲ از [۸] مراجعه شود.

از طرف دیگر ملکرسون در گزاره ۱۱.۳ از [۹] نشان داده که اگر  $X$  یک  $R$ -مدول باشد به طوری که به ازای هر  $i \leq 0$ ،  $R$ -مدول  $\text{Ext}_R^i(R/I, X)$  تولید شده متناهی باشد و به ازای هر  $i \neq s$ ،  $H_i^s(X)$  یک  $R$ -مدول  $I$ -هم‌متناهی باشد، آنگاه  $H_i^s(X)$  نیز  $I$ -هم‌متناهی است. یادآوری می‌شود که کلاس  $R$ -مدول‌های  $I$ -هم‌متناهی توسط هارتشورن در [۱۰] به این صورت معرفی شده است که: یک  $R$ -مدول مانند  $X$ ،  $I$ -هم‌متناهی نامیده می‌شود هرگاه  $\text{Supp}_R X \subseteq V(I)$  و همچنین به ازای هر  $i \leq 0$ ،  $R$ -مدول  $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ ، تولید شده متناهی باشد.

نتیجه بعدی نشان می‌دهد که گزاره ۱۱.۳ ملکرسون [۹] در مورد کلاس  $R$ -مدول‌های  $\text{FD}_{\leq}$  لزوماً برقرار نیست.

**نتیجه ۱.۰.۲.** فرض کنید  $R$  یک حلقه کوهن-مکالی از بعد  $n$  و  $I$  ایده‌آلی از آن باشد  $\dim R/I = 1$  باشند. در این صورت  $H_i^{n-1}(R)$  یک  $R$ -مدول

**برهان:** از این که  $R$  یک حلقه به‌طور تحلیلی تحویل-ناپذیر است، لذا  $\hat{R}$  یک حوزه صحیح است. از این رو بنابر قضیه صفر شدن لیختن-بام-هارتشورن (قضیه ۱.۲.۸ از [۱]) داریم  $H_i^n(R) = 0$  اگر و تنها اگر  $0 < \dim R/I$ . حال هر دو قسمت حکم از نتایج ۴.۲ و ۷.۲ حاصل می‌شوند.

گزاره بعدی به عنوان کاربرد دیگری از نتیجه ۲.۲، برای  $R$ -رشته‌ها و حلقه‌های کوهن-مکالی مفید است.

**نتیجه ۹.۲.** فرض کنید  $I$  ایده‌آلی از  $R$  باشد به طوری که  $\text{Min}(I) \setminus \text{Max}(R) \neq \emptyset$ . در این صورت احکام زیر برقرار هستند:

(۱) اگر  $I$  توسط یک  $R$ -رشته منظم به طول

$s$  تولید شود، آنگاه

$$\text{Supp}_R H_i^s(R) \not\subseteq \text{Max}(R)$$

و بنابراین  $H_i^s(R)$  آرتینی نیست.

(۲) اگر  $R$  یک حلقه کوهن-مکالی باشد، آنگاه

$g :=$

$$\text{grade}(I, R)$$

$$= \inf \{i \geq 0 \mid H_i^i(R) \text{ آرتینی نیست}\}.$$

بویژه  $R$ -مدول  $H_i^g(R)$  آرتینی نیست.

**برهان:** با توجه به اینکه  $I$  توسط یک  $R$ -رشته منظم به طول  $s$  تولید می‌شود، داریم  $s = \text{ht } I$ . بنابراین قسمت (۱) حکم از نتیجه ۲.۲ حاصل می‌شود. برای قسمت (۲)، توجه شود که  $R$  یک حلقه کوهن-مکالی است، لذا  $g = \text{ht } I$  و بنابراین حکم از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

مؤلفین در تعریف ۱.۲ از [۷]، به ازای عدد صحیح دلخواه  $n \leq -1$ ، کلاس  $R$ -مدول‌های  $\text{FD}_{\leq n}$  را معرفی کردند. یادآوری می‌شود  $X$  یک  $R$ -مدول  $\text{FD}_{\leq n}$  نامیده می‌شود، هرگاه  $R$ -زیرمدول تولید شده متناهی  $N$  از  $X$  چنان موجود باشد که:

$$\dim X/N \leq n$$

که  $R$  یک حلقه موضعی با بعد  $n$  باشد،  $R$ -مدول  $H_I^{n-1}(R)$  آرتینی است.

گزاره ۱۱.۲. فرض کنید  $(R, \underline{m})$  یک حلقه موضعی با بعد  $n$  و  $I$  یک ایده‌آل از  $R$  با شرط  $\dim R/I \leq 1$  باشند. در این صورت تحت هر کدام از شرایط زیر  $H_I^{n-1}(R)$  آرتینی است:

$$\text{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \{ \underline{m} \} \quad (۱)$$

(۲) برای هر ایده‌آل اول مینیمال  $P$  از  $I$  داریم:

$$\text{ht } P < n - 1.$$

برهان: در صورتی که  $\dim R/I = 0$ . آن‌گاه حکم از نتیجه ۷.۲ حاصل می‌شود. در حالت  $\dim R/I = 1$  ابتدا فرض کنیم شرط (۱) برقرار باشد و داشته باشیم:

$$\text{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \{ \underline{m} \}$$

بنابراین می‌توان فرض کرد:

$$\text{Supp}_R H_I^{n-1}(R) = \{ \underline{m} \}.$$

از اینکه  $\dim R/I = 1$  لذا  $\underline{m} \setminus I$   $x \in \underline{m}$  موجود است و با توجه به اینکه

$$I \subsetneq I + Rx \subseteq \underline{m}$$

بنابراین داریم:

$$\dim R/(I + Rx) = 0.$$

از طرف دیگر با توجه به گزاره ۸.۱ از [۱]، رشته دقیق به صورت:

$$\begin{aligned} H_{I+Rx}^{n-1}(R) &\rightarrow H_I^{n-1}(R) \rightarrow H_I^{n-1}(R_x) \\ &\rightarrow H_{I+Rx}^n(R), \end{aligned}$$

وجود دارد. حال بانوجه به نتیجه ۷.۲،  $R$ -مدول  $H_{I+Rx}^{n-1}(R)$  آرتینی است و همچنین از اینکه

$\text{FD}_{\leq}$  نیست و بنابراین نمی‌تواند مینی‌ماکس یا آرتینی باشد.

برهان: فرض کنیم حکم برقرار نباشد و  $H_I^{n-1}(R)$  یک  $R$ -مدول  $\text{FD}_{\leq}$  باشد (فرض خلف). در این صورت یک رشته دقیق کوتاه مانند

$$\bullet \rightarrow N \rightarrow H_I^{n-1}(R) \rightarrow L \rightarrow \bullet, \quad (\star)$$

وجود دارد که در آن  $N$  یک  $R$ -مدول تولید شده متناهی است و همچنین  $\text{Supp}_R L \subseteq \text{Max}(R)$ . ابتدا نشان می‌دهیم که:

$$\text{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \text{Max}(R)$$

برای این منظور فرض کنیم

$P \in \text{Spec}(R) \setminus \text{Max}(R)$  دلخواه باشد. با توجه به رشته دقیق  $(\star)$  و آرتینی بودن مدول  $H_I^n(R)$ ، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر  $n-1 \leq i$  یک  $R_P$ -مدول تولید شده متناهی  $(H_I^i(R))_P$  است. بنابراین گزاره ۱.۳ از [۱۱] ایجاب می‌کند که به‌ازای هر  $n-1 \leq i$   $(H_I^i(M))_P = 0$  است. از این رو خواهیم داشت:

$$\text{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \text{Max}(R)$$

و این با توجه به گزاره ۹.۲، یک تناقض است.

با توجه به قضیه ۷.۱ از [۱] می‌دانیم که اگر  $R$  یک حلقه جابجایی نوتری،  $M$  یک  $R$ -مدول تولید شده متناهی از بعد  $d$  و  $I$  یک ایده‌آل دلخواه از  $R$  باشند، آنگاه  $H_I^d(M)$  آرتینی است.

علاوه بر این، همان‌طور که در مقدمه نیز به آن اشاره شد، مارلی در نتیجه ۵.۲ از [۶]، نشان داده که روی حلقه موضعی  $R$ ، به‌ازای هر  $R$ -مدول تولید شده متناهی  $M$  با بعد  $d$  و هر ایده‌آل دلخواه  $I$  از  $R$ ، مجموعه‌های  $\text{Supp}_R H_I^{d-1}(M)$  و  $\text{Ass}_R H_I^{d-1}(M)$  متناهی هستند.

به‌عنوان آخرین نتیجه در این مقاله، در گزاره ۱۱.۲، شرایطی را ارائه می‌دهیم که تحت آن‌ها و در حالتی

$H_I^{n-1}(R_x) = 0$  ، لذا  $H_I^{n-1}(R)$  نیز آرتینی خواهد بود.

حال فرض کنیم شرط (۲) برقرار باشد. نشان می‌دهیم:

$$\text{Supp}_R H_I^{n-1}(R) \subseteq \{ \underline{m} \}$$

و بنابراین حکم از قسمت (۱) حاصل می‌شود. برای این منظور فرض کنیم  $P \in \text{Supp}_R H_I^{n-1}(R)$  دلخواه باشد. در این صورت  $(H_I^{n-1}(R))_P \neq 0$  و لذا قضیه صفر شدن گروتندیک ایجاب می‌کند که  $n - 1 \leq \dim R_P$  بنابراین با توجه به فرض (۲)،  $P$  نمی‌تواند یک ایده‌آل اول مینیمال از  $I$  باشد. حال با توجه به این که  $\dim R/I = 1$  و  $I \subseteq P$  بنابراین  $P = \underline{m}$  و این نتیجه می‌دهد که:

$$\text{Supp}_R H_I^{n-1}(R) = \{ \underline{m} \}$$



[۱۰] R. Hartshorne, Affine duality and cofiniteness. *Invent. Math.*, ۹ (۱۹۷۰), ۱۴۵-۱۶۴.

[۱۱] K. I. Yoshida, Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of dimension one. *Nagoya Math. J.*, ۱۴۷ (۱۹۹۷), ۱۷۹-۱۹۱.

## فهرست منابع

[۱] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications. ۲nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press (۲۰۱۳).

[۲] R. Y. Sharp, Steps in commutative Algebra. Second edition. London Mathematical Society Student Text ۱۹, Cambridge University Press (۲۰۰۰).

[۳] C. Huneke, Problems on local cohomology, Free Resolutions in commutative algebra and algebraic geometry (Sundance, Utah, ۱۹۹۰), Research Notes in Mathematics ۲, Boston, Ma, Jones and Bartlett Publisher, (۱۹۹۲), ۹۳-۱۰۸.

[۴] A. Ogus, Local cohomological dimension of algebraic varieties. *Annals of Math.*, ۹۸ (۱۹۷۳), ۳۲۷-۳۶۵.

[۵] R. Hartshorne and R. Speiser, Local cohomological dimension in characteristic  $p$ . *Ann. Math.*, ۱۰۵ (۱۹۷۷), ۴۵-۷۹.

[۶] T. Marley, The associated primes of local cohomology modules over rings of small dimension. *manuscripta math.*, ۱۰۴ (۲۰۰۱), ۵۱۹-۵۲۵.

[۷] M. Aghapournahr and K. Bahmanpour, Cofiniteness of weakly Laskerian local cohomology modules. *Bull. Math. Soc. Math. Romanie*, ۱۰۵ (۲۰۱۴), ۳۴۷-۳۶۵.

[۸] D. Asadollahi and R. Naghipour, Faltings' Local-global Principle for the Finiteness of local cohomology modules. *Commun. Algebra*, ۴۳ (۲۰۱۵), ۹۵۳-۹۵۸.

[۹] L. Melkersson, Modules cofinite whit respect to an ideal. *J. Algebra*, ۲۸۵ (۲۰۰۵), ۶۴۹-۶۶۸.

