دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و دوم، خرداد و تیر ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

معرفی یک ساختار p- عملگری بر روی جبر گروهی p- شبه توابع جهانی، $UPF_p(G)$

محمدعلی احمدپور جاده‌کناری[1]، مرضیه شمس یوسفی[*2]
[1و2] گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۱۰

چکیده : در این مقاله یکی از انواع خاص ساختار p-عملگری بر روی جبر p-شبه توابع جهانی داده می‌شود. همچنین برخی نتایج کاربردی و توسعه‌ای در زمینه p-کاملا کران‌داری نگاشت‌های خاص روی این جبر ارائه خواهد شد.

واژه های کلیدی: p- فضاهای عملگری، p - شبه توابع جهانی، نمایش جهانی، QSL_p- فضاها

[*] عهده دار مکاتبات
Email: m.shams@guilan.ac.ir

۱- مقدمه

فضاهای عملگری توسط آروسون و استینسپرینگ معرفی و توسط افراس در ۱۹۸۶ به جامعه ریاضی ارائه شد[۲]. با توجه به اهمیت و جذابیت جبرهای گروهی فوریه و فوریه اشتیل یس ایمارد [۴]، ساختارهای عملگری آن‌ها از علاقمندی ریاضیدانان معاصر بوده است. جبر فوریه اشتیل یس به عنوان دوگان C^*-جبر گروهی دارای ساختار عملگری است و با این ساختار جبر فوریه، به عنوان ایده‌آل بسته آن، نیز مجهز به ساختار عملگری می‌شود. ایلی در[۱۰،۱۱] نگاشت‌های کاملا کران‌دار در رسته فضاهای عملگری بالا، از جبر فوریه به جبر فوریه اشتیل یس را بررسی و شناسایی کرد در مرحله بعد تعبیر فضاهای p-عملگری در[۱]، بر اساس ایده‌های مطالعاتی پیزیه [۱۳] و لِ مردی [۱۲] گسترش یافت. این راهبرد معرفی شده به شکل وسیعی بر روی جبر فیگا-تالامانکا، هرتس، $A_p(G)$ ، (p-صورت جبر فوریه[۵،۸،۹]) به کار رفت و برخی خواص دیگر آن نیز مطالعه شد.

در این مقاله ما ساختار p-عملگری روی $UPF_p(G)$ ، جبر p-شبه توابع جهانی را معرفی می‌کنیم. برای این هدف، این مطالب را به بخش‌های زیر تقسیم می‌کنیم:

در بخش ۲ نظریه‌ی پایه‌ای QSL_p- فضاها را معرفی می‌کنیم، تعاریف و مقدمات مورد نیاز اولیه برای نمایش‌ها و صورت ماتریسی آن را بیان می‌کنیم. سپس در بخش ۳ برخی خواص جذاب نمایش‌ها را بیان کرده و به عنوان نتیجه‌ای از آن ساختار p-عملگری مورد نظر را معرفی می‌کنیم.

۲- پیش نیازها

نظریه نمایش گروه‌های فشرده موضعی روی فضاهای هیلبرت به شکل وسیعی مطالعه شده است. برای مطالعه بیشتر در این زمینه مرجع [۶] و همچنین برای مطالبی در مورد ارتباط بین نمایش‌ها و ساختارهای عملگری مرجع [۳] را مطالعه کنید. در این مقاله به دنبال طراحی p-صورت مفاهیم بالا هستیم و در تعریف‌ها و نمادگذاری‌ها از مرجع [۱۴] بهره می‌بریم.

در ابتدا تعریف رده خاصی از فضاهای باناخ را عرضه و مفاهیم مورد نیاز برای نزدیکی به مقوله مورد نیازمان در مورد p-نمایش‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱. الف. یک نمایش از گروه فشرده موضعیG، زوج (π,E) است که در آن E فضای باناخ و π یک همریختی از G به فضای عملگرهای طولپای وارون‌پذیر روی E است که نسبت به توپولوژی اولیه G و توپولوژی عملگری قوی روی $B(E)$ پیوسته است. به طور دقیق $\pi: G \to B(E)$ یک همریختی پیوسته است که $\pi(x)$ وارون‌پذیر و طولپا با وارون $\pi(x^{-1})$ است.

ب. یک ترفیع از یک نمایش $\pi: G \to B(E)$ از گروه فشرده موضعیG به جبر گروهی $L^1(G)$ ، همریختی انقباضی $\tilde{\pi}: L^1(G) \to B(E)$ است که به صورت

$$\langle \tilde{\pi}(f)\xi,\eta\rangle = \int_G f(x)\langle \pi(x)\xi,\eta\rangle dx$$

$$\xi \in E ,\eta \in E^*$$

تعریف می‌شود که نسبت به توپولوژی اولیه G و توپولوژی عملگری قوی روی $B(E)$ پیوسته است.

ج. نمایش (π, E) دوری با بردار دوری ξ نامیده می‌شود هرگاه $\overline{\tilde{\pi}(L^1(G))\xi}$ در E چگال باشد. در این حالت ممکن است (π, E) را با (π_ξ, E_ξ) نمایش دهیم. در این حالت E_ξ را فضای دوری می‌نامیم.

یکی از مهمترین فضاها (جبرها)ی متناظر با نمایش‌های گروهی، فضای توابع ضریب آن‌هاست.

در سرتاسر این مقاله p یک اسکالر حقیقی متعلق به بازه $(1, \infty)$ است.

تعریف ۲. الف. فضای باناخ E را یک L_p-فضا می‌نامیم، هرگاه برای یک فضای اندازه (X, μ) به شکل $L_p(X, \mu)$ باشد.

ب. فضای باناخ E را یک QSL_p-فضا می‌نامیم، هرگاه زیرفضایی از یک خارج قسمت از یک L_p-فضا باشد.

تعریف ۳. فرض کنیم (π, E) و (ρ, F) دو نمایش از گروه فشرده موضعی G باشند. در این صورت

الف. نمایش (π, E) و (ρ, F) را هم‌ارز می‌نامیم، هرگاه طولپایی $T : E \to F$ چنان موجود باشد که برای هر $f \in L^1(G)$ داشته باشیم $\tilde{\rho}(f) \circ T = T \circ \tilde{\pi}(f)$. در این حالت می‌نویسیم $(\pi, E) \sim (\rho, F)$.

ب. نمایش (ρ, F) یک زیر نمایش از نمایش (π, E) نامیده می‌شود، هرگاه $F \subseteq E$ یک زیرفضای بسته باشد و برای هر $f \in L^1(G)$ داشته باشیم $\rho(f) = \pi(f)|_F$.

ج. نمایش (ρ, F) مشمول در (π, E) نامیده می‌شود، هرگاه (ρ, F) با یک زیر نمایش از (π, E) هم‌ارز باشد. در این حالت می‌نویسیم $(\rho, F) \subset (\pi, E)$.

نمادگذاری. مجموعه همه (کلاس‌های هم‌ارزی) نمایش‌های یک گروه فشرده موضعی G روی یک QSL_p-فضا با $Rep_p(G)$ نمایش داده می‌شود و به هر عضو ان یک p-نمایش اطلاق می‌شود. همچنین مجموعه همه p-نمایش‌های دوری را با $Cyc_p(G)$ نمایش می‌دهیم. برای $(\pi, E) \in Rep_p(G)$، مجموعه همه زیر نمایش‌های دوری آن را با $Cyc_{p,\pi}(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴. یک p-نمایش $(\pi, E) \in Rep_p(G)$ را یک p-نمایش جهانی می‌نامیم، هرگاه شامل همه نمایش‌های دوری در $Cyc_p(G)$ باشد.

در ادامه جبرهای p-شبه توابع را معرفی می‌کنیم که نقش اساسی را در این مقاله ایفا می‌کنند.

تعریف ۵. فرض کنیم $(\pi, E) \in Rep_p(G)$

الف. در این صورت قرار می‌دهیم

$$\|f\|_\pi = \|\pi(f)\|$$

در این حالت $\|.\|_\pi$ یک نیم-نرم جبری روی $L^1(G)$ تعریف می‌کند.

ب. جبر p-شبه توابع متناظر با (π, E) به صورت بستار در نرم $B(E)$ در $\pi(L^1(G))$ تعریف می‌شود و با $PF_{p,\pi}(G)$ نمایش داده می‌شود. همچنین، اگر (π, E) یک p-نمایش جهانی باشد، آنگاه $PF_{p,\pi}(G)$ جبر p-شبه توابع جهانی نامیده می‌شود و با $UPF_p(G)$ نمایش داده می‌شود.

تذکر ۱. فرض کنیم $(\pi, E) \in Rep_p(G)$ و قرار می‌دهیم

$$N_\pi = \{f \in L^1(G) |\ \|\pi(f)\| = 0\}$$

در این صورت، N_π یک ایده‌آل بسته $L^1(G)$ است و با خارج قسمت گرفتن به فضای نرم دار $\frac{L^1(G)}{N_\pi}$ منجر می‌شود. کامل سازی $\frac{L^1(G)}{N_\pi}$ با این نرم همان $PF_{p,\pi}(G)$ معرفی شده بالا است. مشاهده می‌شود که نرم $UPF_p(G)$ مستقل از انتخاب p-نمایش جهانی است.

در ادامه بر اساس [۷]، QSL_p-جبرهای عملگری را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد.

الف. یک نمایش از A (روی QSL_p-فضای E) یک همریختی انقباضی مانند $\pi : A \to B(E)$ است.

ب. نمایش $\pi : A \to B(E)$ را ناتبهگون (اساسی) می‌نامیم هرگاه $\{\pi(a)\xi \,|\, a \in A, \xi \in E\}$ در E چگال باشد.

ج. نمایش اساسی $\pi : A \to B(E)$ از A (روی یک QSL_p-فضای E) وفادار نامیده می‌شود، هرگاه یک به یک باشد.

د. جبر باناخ A یک QSL_p-جبر عملگری نامیده می‌شود هرگاه QSL_p-فضای E و همریختی طولپای $\pi : A \to B(E)$ موجود باشد. در این حالت به طور معادل می‌توان گفت یک نمایش طولپای وفادار از A بر، QSL_p-فضای E موجود است.

در این قسمت به تعریف p-فضای عملگری می‌پردازیم. مرجع ما در این بخش [۳] و [۱۶] است.

برای $p \in (1, +\infty)$، اندازه μ و فضای باناخ E، با متناظر کردن طبیعی ضرب تانسوری جبری $L_p(\mu) \otimes E$ با یک زیرفضای $L_p(\mu, E)$، می‌توان نرم طبیعی بر آن القا کرد. در این حالت با کامل‌سازی $L_p(\mu) \otimes E$ فضای باناخ حاصل را با $L_p(\mu) \widetilde{\underset{p}{\otimes}} E$ نمایش می‌دهیم. همچنین داریم $L_p(\mu) \widetilde{\underset{p}{\otimes}} E \cong L_p(\mu, E)$ (به صورت طولپا). اگر $\mathbb{C}^n$ مجهز به l^p-نرم را با l_p^n نمایش دهیم $E^{(n)}$ به طور طبیعی با $l_p^n \widetilde{\underset{p}{\otimes}} E$ یکریخت است.

تعریف ۷ . الف. فضای باناخ X را p-فضای عملگری ملموس می‌نامیم، هرگاه برای یک QSL_p-فضای E، یک زیرفضای بسته $B(E)$ باشد.

در این حالت برای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌توان با یکسان‌سازی $M_n(X)$ با زیرفضای $B(l_p^n \widetilde{\underset{p}{\otimes}} E)$ نرم $\|\cdot\|_n$ را روی $M_n(X) = M_n \otimes X$ القا کرد.

بنابراین می‌توان خانواده $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را یافت که در شرایط ذیل صادق است

$$\mathcal{D}_\infty: \|u\oplus v\|_{n+m} := max\{\|u\|_n, \|v\|_m\}$$

$u\in M_n(x)\,, v\in M_m(x)$ در این حالت $u\oplus v\in M_{n+m}(X)$ دارای نمایش ماتریس بلوکی به فرم $\begin{bmatrix} u & ۰ \\ ۰ & v\end{bmatrix}$ است.

و برای $u\in M_n(X)$، $\alpha\in M_{m,n}$ و $\beta\in M_{n,m}$ داریم

$$\mathcal{M}_p: \|\alpha u\beta\|_n \le \|\alpha\|_{B(l_p^m,l_p^n)}\|u\|_n\|\beta\|_{B(l_p^n,l_p^m)}$$

ب. p-فضای عملگری مجرد، یک فضای باناخ X مجهز به خانواده ای از نرم‌های $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ روی $M_n(X)$ است که در دو شرط $\mathcal{D}_\infty$ و $\mathcal{M}_p$ صادق هستند.

تذکر۲. *مفاهیم p-فضای عملگری ملموس و p-فضای عملگری مجرد بر هم منطبق هستند.* [۳]

یکی از مهمترین کاربردهای چنین p-فضاهای عملگری به وسیله داوس[۲] روی جبر فیگا-تالامانکا-هرتس $A_p(G)$ به کار رفت. او در [۴] دو ساختار p-فضای عملگری برای $A_p(G)$ معرفی کرد که برای گروه فشرده موضعی میانگین‌پذیر G بر هم منطبق هستند.

تعریف ۸. فرض کنیم X و Y دو p-فضای عملگری باشند و $\Phi : X\to Y$ یک نگاشت خطی باشد. n-تاب نگاشت Φ به شکل طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود

$\Phi^n: M_n(X)\to M_n(X)\,, \Phi^n([x_{ij}]) = [\Phi(x_{ij})]$.

و p-نرم کامل آن با

$$\|\Phi\|_{p-cb} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\Phi^{(n)}\|$$

داده می‌شود. در این حالت اگر $\|\Phi\|_{p-cb}<\infty$ گوییم Φ، p-کاملاً کراندار است و هرگاه $\|\Phi\|_{p-cb}<۱$ آن را p-کاملاً انقباضی می‌نامیم. همچنین در حالتی که برای هر n ، $\Phi^{(n)}$ طولپایی است، Φ را یک نگاشت p-کاملاً طولپایی می‌خوانیم.

۳- نرم ماتریسی روی جبر p-شبه توابع در این بخش خانواده $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از نرم‌های ماتریسی روی جبر p-شبه توابع، $PF_{p,\pi}(G)$ برای نمایش $(\pi,E)\in Rep_p(G)$ را ارائه می‌دهیم. در ابتدا برای شفاف شدن هر چه بیشتر ساختار، خوش تعریفی آن را بررسی می‌کنیم. در گام نخست گزاره سرراست زیر ارائه می‌کنیم و در ادامه به مفهوم l_p-جمع مستقیم نمایش‌ها خواهیم پرداخت.

گزاره ۱. فرض کنیم $(T_i)_{i\in\Lambda}$ خانواده‌ای از نگاشت‌های خطی کراندار $T_i : E_i\to E_i$ ، $i\in\Lambda$ باشد. در این صورت $\ell_p-\bigoplus_{i\in\Lambda} T_i : \ell_p-\bigoplus_{i\in\Lambda}E_i \to \ell_p-\bigoplus_{i\in\Lambda}E_i$ برای $p\in(۱,+\infty)$ خوش تعریف است و داریم:

$$\|T\|^p = sup\left\{\sum_{k=۱}^\infty \|T_k(x_k)\|^p : (T_k)_{k=۱}^\infty \subseteq (T_i)_{i\in\Lambda}\,, \bigoplus_k x_k\in\bigoplus_k E_k\,, \sum|x_k|^p\le ۱\right\}.$$

[۲] M. Daws

لم ۱. فرض کنیم $(\pi, E) \in Rep_p(G)$. در این صورت داریم:

$$\overline{\pi^{(n)}\left(M_n\left(L^1(G)\right)\right)}^{\|.\|_{B(E^{(n)})}} = M_n\left(PF_{p,\pi}(G)\right).$$

برهان. فرض کنیم $T = [T_{ij}]$ به $M_n\left(PF_{p,\pi}(G)\right)$ متعلق باشد. در این صورت برای هر زوج (i,j)، تور $\left(\pi\left(f_{\alpha_{ij}}\right)\right)_{\alpha_{ij}\in\Lambda_{ij}}$ موجود است که در آن Λ_{ij} یک مجموعه اندیس-گذار است و

$$T_{ij} = \|.\| - \lim_{\alpha_{ij}\in\Lambda_{ij}} \pi\left(f_{\alpha_{ij}}\right).$$

حال قرار می‌دهیم $\Lambda = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\Lambda_{ij}$

در این صورت Λ با ترتیب طبیعی یک مجموعه اندیس گذار است. برای $\alpha = [\alpha_{ij}] \in \Lambda$ ، فرض کنیم $\left[\pi^{(n)}(F_\alpha)\right] = \left[\pi\left(f_{\alpha_{ij}}\right)\right]$. در نتیجه $T_{ij} = \|.\| - \lim_{\alpha\in\Lambda}\left[\pi^{(n)}(F_\alpha)\right]$

در این حکم از این واقعیت که

$$\left\|\left[x_{ij}\right]\right\|^p \leq \sum_{i,j}\left\|x_{ij}\right\|^p$$

استفاده شده است. به طور دقیق تر برای هر $\varepsilon > 0$ فرض کنیم $\alpha_{ij}^{\circ} \in \Lambda_{ij}$ به گونه‌ای باشد که برای هر $\alpha_{ij} \geq \alpha_{ij}^{\circ}$

$$\left\|T_{ij} - \pi\left(f_{\alpha_{ij}}\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{n^2}.$$

در این صورت

$$\left\|\left[T_{ij} - \pi\left(f_{\alpha_{ij}}\right)\right]\right\|^p \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left\|T_{ij} - \pi\left(f_{\alpha_{ij}}\right)\right\|^p < \varepsilon^p$$

حال کافی است قرار دهیم

$$.\alpha = [\alpha_{ij}] \geq [\alpha_{ij}^{\circ}] = \alpha^{\circ}$$

تذکر ۳. برای $(\pi, E) \in Rep_p(G)$، لم قبل بیانگر تناظر ذیل است:

$$\overline{\pi^{(n)}\left(M_n\left(L^1(G)\right)\right)}^{\|.\|_{B(E^{(n)})}} = M_n\left(PF_{p,\pi}(G)\right) = M_n\left(\overline{\pi\left(L^1(G)\right)}^{\|.\|_{B(E)}}\right).$$

در گزاره بعد ساختار p-فضای عملگری $PF_{p,\pi}(G)$ را ارائه می‌کنیم:

گزاره ۲. فرض کنیم (π, E) یک p-نمایش گروهی باشد. در این صورت جبر باناخ $PF_{p,\pi}(G)$ از p-شبه توابع متناظر با (π, E) یک QSL_p-جبر عملگری است.

برهان. برای اثبات باید یک نمایش طولپا از $PF_{p,\pi}(G)$ ارائه کنیم. فرض کنیم $g \in L^1(G)$ و $r \in \mathbb{N}$ در این صورت نمایش دوری $\left(\pi_{g,r}, E_{g,r}\right)$ از (π, E) با بردار دوری $\xi_{g,r}$ چنان موجود است که

$$\left\|\pi_{g,r}(g)\xi_{g,r}\right\| > \|\pi(g)\| - \frac{1}{r}\ ,\ \left\|\xi_{g,r}\right\| \leq 1$$

حال l_p-جمع مستقیم فضاهای متناظر آن‌ها را در نظر می‌گیریم

$$\Pi := \bigoplus_{g\in L^1(G)} \bigoplus_{r=1}^{\infty} \pi_{g,r}$$

$$\varepsilon := \bigoplus_{g\in L^{1}(G)} \bigoplus_{r=1}^{\infty} E_{g,r}$$

هر عضو $x\in\varepsilon$ دارای نمایش یکتا به شکل زیر است

$$x := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bigoplus_{r=1}^{\infty} x_{g_k,r}$$

همچنین داریم

$$\|x\|^p = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\left\|x_{g_k,r}\right\|^p.$$

حال برای یک عضو دلخواه $f\in L^{1}(G)$،مقدار $\|\Pi(f)\|$ را محاسبه می‌کنیم. عملگر $\Pi(f)$ به صورت زیر است

$$\Pi(f) := \bigoplus_{g\in L_1(G)} \bigoplus_{r=1}^{\infty} \pi_{g,r}(f)$$

و با توجه به گزاره ۱ داریم

$$\|\Pi(f)\|^p = sup\{\textstyle\sum_{k,r}^{\infty}\left\|\pi_{g,r}(f)x_{g_k,r}\right\|^p : x := \bigoplus_{k,r=1}^{\infty} x_{g_k,r}\in\varepsilon ,\sum_{k,r}^{\infty}\left\|x_{g_k,r}\right\|^p\le 1\}.$$

همچنین برای $f\in L^{1}(G)$ و $\varepsilon>0$ عضو $x=\bigoplus_{k,r} x_{g_k,r}$ در ε چنان موجود است که

$$\|\Pi(f)\|^p-\varepsilon < \textstyle\sum_{k,r}\left\|\pi_{g_k,r}(f)x_{g_k,r}\right\|^p,\ \sum_{k,r}\left\|x_{g_k,r}\right\|^p\le 1.$$

از سوی دیگر چون $\Pi_{g_k,r}$ تحدید π بر زیر فضای بسته $E_{g_k,r}$ است، داریم

$$\pi_{g_k,r}(f)x_{g_k,r}=\pi(f)x_{g_k,r}$$ و

$\left\|\Pi_{g_k,r}(f)\right\|\le\|\pi(f)\|$. لذا داریم

$$\|\Pi(f)\|^p-\varepsilon<\textstyle\sum_{k,r}\left\|\pi_{g_k,r}(f)x_{g_k,r}\right\|^p\le \|\pi(f)\|^p.$$

از سوی دیگر برای $m\in\mathbb{N}$، عضو

$$x_m=\bigoplus_{k,r} x_{g_k,r}^{(m)}\in\varepsilon$$

را به فرم زیر انتخاب می‌کنیم:

$$x_{g_k,r}^{(m)}=\begin{cases} x_{g_1,m}^{(m)}=\xi_{f,m} & \text{اگر } r=m\,,k=1 \\ 0 & \text{درغیر این صورت}\end{cases}$$

در این صورت $\|x_m\|\le 1$

و

$$\|\Pi(f)\|\ge\|\Pi(f)x_m\|=\left\|\pi_{f,m}(f)\xi_{f,m}\right\|>\|\pi(f)\|-\frac{1}{m}$$

بنابراین $\Pi:\pi\big(L^{1}(G)\big)\to B(\varepsilon)$ یک نمایش طولپا است که می‌تواند به $PF_{p,\pi}(G)$ گسترش پیدا کند.

گزاره ۳. فرض کنیم (π,E) یک p-نمایش گروهی در $Rep_p(G)$ باشد در این صورت $PF_{p,\pi}(G)$ یک p-فضای عملگری است.

برهان. فرض کنیم (Π,ε) نمایش متناظر معرفی شده در گزاره قبل باشد. نشان می‌دهیم $\left(\Pi^{(n)},\varepsilon^{(n)}\right)$ یک نگاشت طولپا $M_n\left(PF_p(G)\right)$ به روی زیر فضای بسته‌ای از $M_n\big(B(\varepsilon)\big)$ است.

برای $n\in\mathbb{N}$ تاب n-ام نگاشت Π را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Pi^{(n)}: \pi^{(n)}\left(M_n\left(PF_p(G)\right)\right) \to M_n\big(B(\varepsilon)\big) = B(\varepsilon^n)$$

$$\Pi^{(n)}\left(\pi(f_{ij})\right) = \left[\Pi(f_{ij})\right]$$

نشان می‌دهیم $\Pi^{(n)}$ طولپایی است. داریم

$$\left\|\left[\Pi(f_{ij})\right]\right\|^p = sup\left\{\sum_{k,r}\sum_{i=۱}^{n}\left\|\sum_{j=۱}^{n}\pi_{g_k,r}\,(f_{ij})x_{g_k,r}^{j}\right\|^p : \sum_{j=۱}^{n}\sum_{k,r}\left\|x_{g_k,r}^{j}\right\|^p \le ۱\right\}.$$

برای $\varepsilon > ۰$ می‌توانیم $x \in \varepsilon^{(n)}$ بیابیم به طوری که

$$\|x\|^p = \sum_{j=1}^{n}\left\|x_j\right\|^p < \sum_{j=1}^{n}\sum_{k,r}\left\|x_{g_k,r}^{j}\right\|^p + \varepsilon$$

و $\|x\| \le ۱$ و لذا

$$\left\|\left[\Pi(f_{ij})\right]\right\|^p - \varepsilon < \sum_{k,r}\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\pi_{g_k,r}\,(f_{ij})x_{g_k,r}^{j}\right\|^p.$$

از سوی دیگر از آنجایی که برای هر k ، r ، f_{ij} ، عملگر $\pi_{g_k,r}(f_{ij})$ تحدید $\pi(f_{ij})$ به زیر فضای $E_{g_k,r}$ است. بنابراین داریم

$$\pi_{g_k,r}(f_{ij})x_{g_k,r}^{j} = \pi(f_{ij})x_{g_k,r}^{j}$$

و اگر برای $j = ۱, \dots, n$ قرار دهیم $Y_j = \bigoplus_{k,r} x_{k,r}^{j}$ و $Y = (y_۱, \dots, y_n)$ ، در این حالت

$\|Y\|^p \le ۱$ و

$$\left\|\left[\Pi(f_{ij})\right]\right\|^p - \varepsilon < \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\pi_{g_k,r}^{j}\,(f_{ij})x_{g_k,r}^{j}\right\|^p\right) = \sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\pi\,(f_{ij})y_j\right\|^p = \left\|\pi(f_{ij})Y\right\|^p.$$

و لذا

$$\left\|\Pi(f_{ij})\right\| \le \left\|\pi(f_{ij})\right\|.$$

برعکس بنا به تعریف نرم $\left[\pi(f_{ij})\right]$ برای $m \in \mathbb{N}$ ، بردار

$$y^m = (y_j^m)_{j=۱}^{n} = (y_۱^m, \dots, y_n^m) \in E^{(n)}$$

موجود است به طوری که

$$\|y^m\|^p = \|(y_۱^m, \dots, y_n^m)\|^p = \sum\left\|y_j^m\right\|^p \le ۱$$

و

$$\left\|\left[\Pi(f_{ij})\right]\right\|^p - \frac{۱}{m} < \sum_{i=۱}^{n}\left\|\sum_{j=۱}^{n}\pi\,(f_{ij})y_j^m\right\|^p.$$

حال به سادگی دیده می‌شود

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\pi\,(f_{ij})y_j^m\right\|^p \le \left\|\left[\Pi(f_{ij})\right]\right\|^p.$$

بنابراین نگاشت

$$\Pi^{(n)}: M_n\left(\pi\big(L^۱(G)\big)\right) \to B(\varepsilon^n)$$

یک نمایش طولپاست که می‌تواند به $M_n\left(PF_{p,\pi}(G)\right)$ گسترش پیدا کند.

بر این اعتقاد هستیم که این نتایج دیدگاه جذابی از مسائل مختلفی پیرامون مقوله ساختار ماتریسی جبرهای از نوع فوریه به دست می‌دهد. در ادامه برخی خواص افکنشی از جبر معرفی شده $PF_{p,\pi}(G)$ را بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $G_\circ \subseteq G$ یک زیرمجموعه و $u: G_\circ \to G$ یک تابع باشد. منظور از u° تابع به فرم

$$u^{\circ} = \begin{cases} u & G. \text{ روی} \\ \cdot & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

است.

گزاره ۴. فرض کنیم که G یک گروه فشرده موضعیو $G.$ زیرگروه باز آن باشد و فرض کنیم $(\pi, E) \in Rep_p(G)$. در این صورت نگاشت

$$S_{\pi_{G.}}: PF_{p,\pi_{G.}}(G.) \to PF_{p,\pi}(\mathrm{G})$$

که به صورت

$$S_{\Pi_{G.}}\left(\pi_{G.}(f)\right) = \pi\left(f\chi_{G.}\right), \quad f \in L^{۱}(G)$$

تعریف می‌شود یک همریختی p-کاملاً انقباضی است. در واقع رابطه زیر برقرار است

$$PF_{p,\pi_{G.}}(G.) = \overline{\{\pi(f): f \in L^{۱}(G), supp(f) \subseteq G.\}}^{\|\cdot\|_{B(E)}} \subseteq UPF_p(G)$$

برهان. به وضوح $(\pi_{G.}, E) \in Rep_p(G)$. همچنین برای هر $f \in L^{۱}(G)$ و هر $g \in L^{۱}(G)$ داریم $\pi_{G.}(f) =$

$$\pi(f^{\circ}) \quad , \quad \pi_{G.}\left(g\,\middle|_{G.}\right) = \pi(g\chi_{G.})$$

همچنین برای هر $E \ni \xi$ و $\eta \in E^*$ و اگر $f \in L^{۱}(G)$ و $g \in L^{۱}(G)$ داریم

$$\langle \pi_{G.}(f)\xi, \eta\rangle = \int_{G.} f(x)\langle \pi_{G.}(f)\xi, \eta\rangle$$

$$= \int_{G_0} f(x)\langle \pi(f)\xi, \eta\rangle$$

$$= \int_{G_0} f^{\circ}(x)\langle \pi(f)\xi, \eta\rangle$$

$$= \langle \pi(f^{\circ})\xi, \eta\rangle$$

و

$$\langle \pi_{G.}\left(g\,\middle|_{G.}\right)\xi, \eta\rangle = \int_{G.} g\,\middle|_{G.}(x)\langle \pi_{G.}(x)\xi, \eta\rangle\, dx$$

$$= \int_{G.} g\,\middle|_{G.}(x)\langle \pi(x)\xi, \eta\rangle\, dx$$

$$. = \langle \pi\left(g\chi_{G.}\right)\xi, \eta\rangle$$

بنابراین حکم واضح است.

با توجه به اینکه ساختار p-عملگری معرفی شده برای $UPF_p(G)$ بر مبنای انتخاب نمایش جهانی است، گزاره ذیل عدم وابستگی ساختار p-عملگری معرفی شده برای $UPF_p(G)$ را به انتخاب نمایش جهانی محرز می‌سازد.

گزاره ۵. فرض کنیم (ρ, F) یک زیر نمایش از (π, E) در این صورت نگاشت

$$\Psi: PF_{p,\pi}(G) \to PF_{p,\rho}(G),$$

$$\pi(f) \to \rho(f) \quad , \quad f \in L^{۱}(G)$$

p-کاملاً کراندار است.

برهان. واضح است که نگاشت فوق انقباضی است. از سوی دیگر از آنجا که (π, E) شامل تمام زیرنمایش‌های دوری (ρ, F) است، حکم کلی نتیجه می‌شود.

گزاره ۶. فرض کنیم $N \subseteq G$ یک زیرگروه بسته و نرمال باشد. در این صورت اگر $(\rho, F) \in Rep_p\left(\frac{G}{N}\right)$ آنگاه $(\rho \circ q, F) \in Rep_p(G)$

است که در آن q نگاشت طبیعی خارج قسمتی است و داریم

$$PF_{p,\rho}\left(\frac{G}{N}\right) = PF_{p,\rho\circ q}(G).$$

برهان. فرض کنیم $(\rho, F) \in Rep_p\left(\frac{G}{N}\right)$ به وضوح داریم $(\rho \circ q, F) \in Rep_p(G)$ و همچنین نگاشت $P : L^1(G) \to L^1\left(\frac{G}{N}\right)$

با تعریف $Pf(xN) = \int f(xn)\,dx$ برای $\left(xN \in \frac{G}{N}\right)$ را به خاطر می‌آوریم. در این صورت برای $x \in G$ و $\eta \in F$ و $\Psi \in F^*$ داریم $\langle\rho \circ q(x)\eta, \Psi\rangle = \langle\rho(xN)\eta, \Psi\rangle$

و از آنجا که برای هر تابع پیوسته $u : \frac{G}{N} \to \mathbb{C}$ و $f \in L^1(G)$ داریم

$$P\big((u \circ q) \circ f\big) = \langle\rho(Pf)\eta, \Psi\rangle$$

در نتیجه

$$\langle\rho \circ q(f)\eta, \Psi\rangle = \langle\rho(Pf)\eta, \Psi\rangle$$

و بنابراین

$$\rho \circ q(f) = \rho(Pf)$$

و

$$\rho \circ q(x) = \rho(xN)$$

$f \in L^1(G)$ و $x \in G$.

و بنابراین از آنجاکه P پوشاست

$$PF_{p,\rho\circ q}(G) = PF_{p,\rho}\left(\frac{G}{N}\right)$$

و همچنین در این حالت برای $[f_{i,j}] \in M_n\big(L^1(G)\big)$ داریم

$$\big\|[\rho \circ q(f_{i,j})]\big\|_n = \big\|[\rho(Pf_{i,j})]\big\|_n$$

و بنابراین p-کاملاً طولپایی است.

فهرست منابع

[۱] M. Daws, p-Operator spaces and Figa-Talamanca-Herz algebras, J. Operator Theory
۶۳ (۱) ۴۷-۸۳(۲۰۱۰).
[۲] E.G. Effros, Z.-J. Ruan, A new approach to operator spaces, Canad. J. Math. ۳۴ (۱۹۹۱) ۳۲۹-۳۳۷
[۳] E.G. Effros, Z.-J. Ruan, Operator Spaces, London Math. Soc. Monogr. (N.S.) ۲۳ Clarendon Press, Oxford University Press, New York, ۲۰۰۰.
[۴] P. Eymard, L'algebre de Fourier d'un groupe localement compact,, Bull. Soc. Math. France ۹۲ ۱۸۱-۲۳۶ (۱۹۶۴)
[۵] A. Figa-Talamanca, Translation invariant operators in Lp, Duke Math. J. ۳۲ ۴۹۵-۵۰۱ (۱۹۶۵)
[۶] G. B. Folland, A course in abstract harmonic analysis, CRC PRESS, ۱۹۹۵.
[۷] E. Gardella, A modern look at algebras of operators on Lp-spaces,
ArXiv:۱۹۰۹,۱۲۰۹۶v۱.
[۸] C. Herz, Une generalisation de la notion de transformee de Fourier-Stieltjes, Ann.
Inst. Fourier ۲۴ (۱۹۷۴), ۱۴۵۱۵۷.
[۹] C. Herz, The theory of p-spaces with an application to convolution operators, its
second dual, Trans. Amer. Math. Soc. ۱۵۴ ۶۹-۸۲(۱۹۷۱)
[۱۰] M. Ilie, A note on p-completely bounded homomorphisms of the Figa-Talamanca-
Herz algebras, J. Math. Anal. Appl. ۴۱۹ ۲۷۳-۲۸۴(۲۰۱۴)
[۱۱] M. Ilie, N. Spronk, Completely bounded homomorphisms of the Fourier algebra,
J. Funct. Anal. ۲۲۵ ۴۸۰-۴۹۹(۲۰۰۵)
[۱۲] C. Le Merdy, Factorization of p-completely bounded multilinear maps, Pacific J. Math. ۱۷۲, ۱۸۷-۲۱۳(۱۹۹۶)
[۱۳] G. Pisier, Similarity Problems and Completely Bounded Maps, Second, expanded edition, Lecture Notes in Math., vol. ۱۶۱۸, Springer-Verlag, Berlin ۲۰۰۱.
[۱۴] V. Runde, Representations of locally compact groups on QSLp-spaces and a p-analog of the Fourier-Stieltjes algebra, Pacific J. Math. ۲۲۱ (۲) ۳۷۹-۳۹۷(۲۰۰۵)