دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره چهل و نهم، مرداد و شهریور ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

حدس بردون–شاپیرو

محمدتقی حیدری *

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۲۱   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۳/۰۹

چکیده: برد عددی عملگرهای ترکیبی روی فضای هاردی که نماد آنها بیضوی از مرتبه متناهی باشد گوی نیست. این حدسی است که بردون و شاپیرو در سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات، مطرح نموده‌اند. در این چند سال تلاش‌هایی برای اثبات یا رد آن صورت گرفته ولی هنوز جواب کامل بدست نیامده است. ما در این پژوهش ثابت می‌کنیم این حدس برای خانواده بزرگی از این نوع عملگرها درست است.

واژه‌های کلیدی: فضای هاردی، عملگر ترکیبی، خودریختی بیضوی، برد عددی، فاصله هاسدورف، پایه گایکر

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: heydari @ yu.ac.ir

۱. مقدمه

مطالعه عملگرهای ترکیبی به نظریه‌ی خودریختی‌های گوی واحد، $\mathbb{U} := \{z : |z| < ۱\}$، و رده‌بندی آنها، وابسته است. فرض کنیم φ خودریختی از گوی واحد باشد. تابع φ عملگر ترکیبی C_φ را روی $H(\mathbb{U})$، توابع تحلیلی از $\mathbb{U}$، بوسیله $C_\varphi(f) = fo\varphi$ القا می‌کند. عملگر تعریف شده در $H(\mathbb{U})$، خطی و پیوسته است.

تحدید C_φ به فضاهای باناخ مختلف از توابع تحلیلی روی $\mathbb{U}$ موضوع تحقیقات در چند دهه اخیر بوده است. (مراجعه کنید به [۱۹]، [۱۸]، [۱۱] و [۴]). فرض کنید $H^۲$ *فضای هاردی* از توابع تحلیلی روی گوی واحد با جمع‌پذیری مربعی ضرایب تیلور باشد. در سال‌های اخیر مطالعه عملگرهای ترکیبی روی فضای هاردی مورد توجه زیادی قرار گرفته است.

یکی از نتایج مهم قضیه‌ی معروف لیتلوود[۲] سرچشمه می‌گیرد، بیان می‌کند که تحدید هر عملگر ترکیبی به فضای هاردی، یک عملگر کراندار است و یک روش برای پیوند به آنالیز تابعی را ارائه می‌دهد. تاریخ ریاضی در سه دهه گذشته شاهد پژوهش بسیاری در مورد نظریه‌ی عملگرهای خطی کراندار در فضای هیلبرت بوده است. ([۱۳] را ببینید.)

این مقاله به برد عددی عملگرهای ترکیبی بیضوی روی $H^۲$ می‌پردازد. هدف این است که ویژگی‌های خودریختی φ را به رفتار عملگر C_φ مرتبط کنیم.

برد عددی عملگر خطی کراندار A روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ مجموعه اعداد مختلط به صورت زیر است

$$(A) := \{< Ax, x >: x \in \mathcal{H}, \left||x|\right| = ۱\},$$

جایی که $< . \, , . >$ ضرب داخلی در $\mathcal{H}$ را نشان می‌دهد.

در [۱۴] ماتاچه[۳] شکل $W(C_\varphi)$ وقتی که نماد φ تک‌جمله‌ای باشد یا تابع داخلی، تابع تحلیلی روی گوی واحد که قدرمطلق حد شعاعی آن روی دایره واحد ت.ه. برابر یک است، که صفر را ثابت نگه می‌دارد، تعیین کرد. همچنین او بعضی از خواص برد عددی عملگرهای ترکیبی را ارایه کرد. در [۲] شکل برد عددی عملگرهای ترکیبی القا شده روی فضای هاردی بوسیله خودریختی‌های همدیس از $\mathbb{U}$، بخصوص سهموی و هذلولوی، مورد بررسی قرار گرفتند. در [۲] بردون[۴] و شاپیرو[۵] این سوال را که در چه صورت برد عددی یک عملگر ترکیبی، گوی به مرکز مبدا است را مورد بررسی قرار دادند و ثابت کردند این اتفاق می‌افتد اگر φ خودریختی همدیس بیضوی نباشد. آنها همچنین نشان دادند اگر φ خودریختی بیضوی از مرتبه ۲ باشد آنگاه $W(C_\varphi)$ بیضی با کانون‌های ± ۱ است. در [۱] عبدالهی نتایج آنها را با محاسبه مقدار دقیق قطر اصلی بیضی $W(C_\varphi)$ تکمیل کرد با این وجود هیچکدام از آنها اطلاعاتی در مورد اینکه چه نقاطی در مرز این بیضی متعلق به $W(C_\varphi)$ است، ارایه نکردند. اما مساله برای خودریختی بیضوی مرتبه متناهی از مرتبه بزرگتر از ۲ هنوز باز بود تا اینکه پاتون[۶] و همکاران در [۸]، مساله را وقتی $n = ۳$ برای هر عملگر خطی کراندار T ثابت کردند. بویژه پاتون در [۱۵] نشان داد که برد عددی عملگرهای ترکیبی روی فضای هاردی $H^۲$ با چندجمله‌ای مینیمال $z^۳ - ۱$، گوی نیست. اخیراً، پاتون و شاگردانش حدس بردون و شاپیرو را وقتی $n = ۴$ تأیید کردند [۱۶].

[۲] J. E. Littlewood
[۳] Valentin Matache
[۴] Paul S. Bourdon
[۵] Joel H. Shapiro
[۶] Linda J. Patton

این مقاله بدین صورت تنظیم شده است. بخش دوم شامل معرفی بعضی از نمادها و مقدماتی است که در سراسر مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بخش سوم رفتار مجانبی دنباله‌ای از برد عددی عملگرهای ترکیبی نسبت به توپولوژی القا شده بوسیله متریک هاوسدورف، ارایه شده است. در بخش چهارم پیوستگی نگاشت $\varphi \to \overline{W(C_\varphi)}$ را در نظر می‌گیریم. و نهایتا در بخش پنجم ثابت می‌کنیم برد عددی خانواده بزرگی از عملگرهای ترکیبی روی فضای هاردی که نماد آنها بیضوی از مرتبه متناهی باشد گوی نیست.

۲. نمادها و مقدمات

فرض کنیم $\mathbb{U}$ نشان دهنده گوی واحد در صفحه مختلط و فضای هاردی $H^۲$ شامل توابع

$$f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$$

تحلیلی روی $\mathbb{U}$ به گونه‌ای که

$$\sum_{n=۰}^{\infty} |\hat{f}(n)|^۲ < \infty$$

باشد که در آن $\hat{f}(n)$، n امین ضریب تیلور تابع f است. ضرب داخلی که نرم را القا می‌کند با

$$< f, g >= \sum_{n=۰}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$$

تعریف می‌شود. ضرب داخلی دو تابع f و g در $H^۲$ همچنین با انتگرال زیر محاسبه می‌شود

$$< f, g >= \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\partial\mathbb{U}} f(z) \overline{g(z)} dz$$

جایی که $\partial\mathbb{U}$ در جهت مثبت گرفته شده و f و g ت.ه. روی $\partial\mathbb{U}$ با حد شعاعی تعریف شده‌اند.

برای هر همریختی خودنگاشت φ از گوی واحد، عملگر ترکیبی C_φ روی $H^۲$ القا می‌شود که با ضابطه $C_\varphi(f) =$ $fo\varphi \ (f \in H^۲)$ تعریف می‌شود. بنابر یک نتیجه از قضیه معروف لیتلوود [۱۲]، C_φ کراندار است. ([۴] را ببینید.)

$$\sqrt{\frac{۱}{۱ - |\varphi(۰)|^۲}} \leq \|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{۱ + |\varphi(۰)|}{۱ - |\varphi(۰)|}}$$

در حالتی که $\varphi(۰) \neq ۰$ شاپیرو[۷] نشان داده است که نامساوی دوم به تساوی تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر φ یک تابع داخلی باشد.

به هر $\lambda \in \mathbb{U}$ هسته مولد

$$\mathrm{K}_\lambda(\mathrm{z}) = \frac{۱}{۱ - \bar{\lambda}\mathrm{z}} = \sum_{n=۰}^{\infty} \bar{\lambda}^n z^n \quad (\mathrm{z} \in \mathbb{U})$$

را متناظر می‌کنیم.

[۷] Joel H. Shapiro

هر تابع K_λ روی همسایگی از گوی واحد بسته تحلیلی است و بنابراین عضوی از H^2 است. علاوه بر آن برای هر $\lambda \in \mathbb{U}$ و $f \in H^2$ داریم $< f, K_\lambda > = f(\lambda)$.

یک خودریختی همدیس نگاشت تحلیلی از $\mathbb{U}$ بروی خودش است. چنین نگاشتی، خطی کسری است و به صورت حاصلضرب $\omega.\alpha_p$ نمایش داده می‌شود جایی که

$$\alpha_p(z) := \frac{p - z}{1 - \bar{p}z}\ , \left(z \in \ \mathbb{U}\right),$$

برای ثابت‌های $p \in \ \mathbb{U}$ و $\omega \in \partial\mathbb{U}$ ([۱۶] را ببینید).

نگاشت α_p نقاط p و مبدا را به هم تبدیل می‌کند و یک خودریختی از $\mathbb{U}$ است که با معکوس خودش برابر است. هر خودریختی همدیس یک نگاشت دوسویی از صفحه مختلط توسعه یافته به خودش است که دو نقطه ثابت دارد (با احتساب تکرار). چنین خودریختی:

- بیضوی است اگر یک نقطه ثابت درون گوی واحد و یکی خارج گوی بسته واحد داشته باشد،
- هذلولوی است اگر دو نقطه ثابت مجزا روی مرز گوی واحد داشته باشد و
- سهموی است اگر یک نقطه ثابت با تکرار دو روی مرز گوی واحد داشته باشد

اگر $r \in \mathbb{U}$، یک r-اتساع نگاشتی است به شکل $\delta_r(z) = rz$. ما r را عامل اتساع δ_r می‌نامیم.
اگر $r > 0$، δ_r را اتساع مثبت می‌گوییم. r-اتساع همدیس نگاشتی است که مزدوج همدیس یک r-اتساع باشد یعنی یک نگاشت $\varphi = \alpha^{-1} o \delta_r o \alpha$ جایی که $r \in \mathbb{U}$ و α یک خودریختی همدیس از $\mathbb{U}$ است.
اگر $\omega \in \partial\mathbb{U}$، یک ω-چرخش نگاشتی است به شکل $\rho_\omega(z) = \omega z$. ما ω را عامل چرخش ρ_ω می‌نامیم.
یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که هر خودریختی بیضوی φ از $\mathbb{U}$ باید به صورت

$$\varphi = \alpha_p o \rho_\omega o \alpha_p$$

باشد برای بعضی $p \in \mathbb{U}$ و $\omega \in \partial\mathbb{U}$.

فرض کنیم A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ باشد. برد عددی A مجموعه

$$W(A) = \{< Ax, x >: x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}$$

در صفحه مختلط است، جایی که $< \ldots >$ نماد ضرب داخلی در $\mathcal{H}$ می باشد. به عبارت دیگر، $W(A)$ تصویر دایره واحد $\{x \in \mathcal{H}: \|x\| = 1\}$ از $\mathcal{H}$ تحت فرم درجه دوم $x \to < Ax, x >$ است.

بعضی از خواص برد عددی به سادگی از تعریف بدست می‌آیند. اولین ویژگی این است که برد عددی تحت هم ارزی یکانی تغییر نمی‌کند یعنی برای هر یکانی U، $W(A) = W(U^*AU)$. برد عددی رفتار خوبی تحت الحاق عملگرها دارد: $W(A^*) = W(A)^* := \{\bar{z}: z \in W(A)\}$. یکی از مهمترین ویژگی های برد عددی محدب بودن آن است که به قضیه توپلیتز-هاسدورف[۸] معروف است ([۵] و [۸] *را ببینید*). ویژگی مهم دیگر $W(A)$ این است که بستار آن شامل طیف است. $W(A)$ همبند است و در حالتی که فضا متناهی‌البعد باشد، فشرده است.

[۸] Toeplitz-Hausdorff Theorem

یکی از ویژگی‌های خیلی مهم نگاشت برد عددی، $A \to \overline{W(A)}$، که در این مقاله نیاز داریم، پیوستگی آن است. نماد $\overline{W(A)} \to$ به معنی بستار $W(A)$ در صفحه مختلط است. برای همگرایی زیرمجموعه‌های فشرده صفحه مختلط، از توپولوژی القا شده توسط متریک هاسدورف[۹] استفاده می‌کنیم [۷].

فرض کنید $K_۱$ و $K_۲$ دو زیر مجموعه فشرده صفحه مختلط باشند. فاصله هاوسدورف $\Delta(K_۱, K_۲)$ برابر کوچکترین عدد r است بطوری که r-همسایگی بسته هر x در $K_۱$ شامل حداقل یک نقطه y از $K_۲$ باشد و برعکس. به عبارت دیگر،

$$\Delta(K_۱, K_۲) = \max\{\sup_{x\in K_۱} \inf_{y\in K_۲} |x-y|,\ \sup_{y\in K_۲} \inf_{x\in K_۱} |x-y|\}.$$

قضیه بعد می‌گوید که بستار برد عددی، یک نگاشت پیوسته روی عملگرها القا می‌کند.

قضیه. اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\{A_n\}$ یک دنباله از عملگرهای خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ باشد که به عملگر خطی کراندار A در نرم همگرا است، آنگاه $\overline{W(A_n)}$ در متریک هاوسدورف به $\overline{W(A)}$ همگرا است.

در [۱۴] ماتاچه شکل $W(C_\varphi)$ در حالتی که φ تک جمله‌ای یا تابع داخلی که صفر را ثابت نگه می‌دارد باشد را مشخص کرده است. همچنین او برخی از خواص برد عددی عملگرهای ترکیبی بیان کرده است. او همچنین نشان داده که اگر $\varphi = a$، $۰ < |a| < ۱$ آنگاه $W(C_\varphi)$ یک گوی بسته که مرز آن یک بیضی با کانون های ۱ و۰ است و طول قطر افقی آن برابر است با $\frac{۱}{\sqrt{۱-|a|^۲}}$. برد عددی بعضی از عملگرهای ترکیبی فشرده مشخص گردیده است.

در [۲] شکل برد عددی عملگرهای ترکیبی القا شده روی فضای هاردی $H^۲$ بوسیله بعضی از خودریختی‌های همدیس گوی واحد خصوصا سهموی و هذلولوی مشخص شده است. نویسندگان نتایج زیر را ثابت کرده‌اند:

- اگر φ خودریختی همدیس سهموی یا هذلولوی $\mathbb{U}$ باشد آنگاه $W(C_\varphi)$ گویی به مرکز مبدا مختصات است.
- اگر φ خودریختی هذلولوی $\mathbb{U}$ باشد که مزدوج همدیس با اتساع مثبت $z \to rz$ ، $(۰ < r < ۱)$ باشد آنگاه $W(C_\varphi)$ گوی باز به مرکز مبدا و شعاع $\frac{۱}{\sqrt{r}}$ است.
- اگر φ بیضیوی و مزدوج همدیس با چرخش $z \to \omega z$ ، $(|\omega| = ۱)$و ω ریشه واحد نباشد آنگاه $\overline{W(C_\varphi)}$ گوی به مرکز مبدا است.
- اگر φ یک خودریختی بیضوی $\mathbb{U}$ با پارامتر چرخشی -۱ باشد، آنگاه $\overline{W(C_\varphi)}$ بیضی با کانون‌های ±۱ است.

در [۳] نویسندگان ثابت کردند که بستار برد عددی هر عملگر ترکیبی، بجز همانی، شامل صفر است. آنها بر شمول صفر تمرکز کردند.

[۹] Hausdorff metric

۳. رفتار مجانبی

یک خودریختی بیضوی φ از $\mathbb{U}$ که مبدا را ثابت نگه نمی‌دارد به شکل $\varphi = \alpha_p o \rho_\omega o \alpha_p$ است برای ثابت‌های $p \in \mathbb{U} - \{0\}$ و $\omega \in \partial\mathbb{U}$. اگر بخواهیم وابستگی φ به p و ω نشان بدهیم خودریختی بیضوی $\alpha_p o \rho_\omega o \alpha_p$ را $\varphi_{p,\omega}$ نمایش می‌دهیم.

در این بخش ما رفتار مجانبی دنباله $\left\{\overline{W\left(C_{\varphi_{p,\omega_k}}\right)}\right\}_{k=۱}^{\infty}$ را زمانی که $\omega_k = e^{\frac{۲\pi i}{k}}$ و $p \in \mathbb{U}$ است نسبت به توپولوژی القا شده بوسیله متر هاسدورف بررسی می‌کنیم، و ثابت می‌کنیم این دنباله مستقل از انتخاب p، به گوی واحد بسته، $\overline{\mathbb{U}}$، همگرا است.

گزاره مفید بعدی نشان می‌دهد که برد عددی $C_{\varphi_{p,\omega}}$ فقط به مقدار ω و قدرمطلق p بستگی دارد و بنابراین در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم که p حقیقی است و $۰ < p < ۱$.

گزاره۳,۱ فرض کنیم $p \in \mathbb{U}$ و $C_{\varphi_{p,\omega}}$ عملگر ترکیبی بیضوی القا شده بوسیله $\varphi_{p,\omega}$ باشد آنگاه

$$W(\varphi_{p,\omega}) = W(\varphi_{|p|,\omega})$$

برهان. فرض کنیم $p = \eta|p|$ برای بعضی $\eta \in \partial\mathbb{U}$. به سادگی به دست می‌آید که

$$\varphi_{p,\omega} = \rho_\eta o \varphi_{|p|,\omega} o \rho_{\eta^{-۱}}$$

و بنابراین

$$C_{\varphi_{p,\omega}} = C_{\rho_{\eta^{-۱}}} o C_{\varphi_{|p|,\omega}} o C_{\rho_\eta}$$

چون $V = C_{\rho_\eta}$ عملگر ترکیبی یکانی القا شده روی $H^۲$ بوسیله ρ_η است لذا

$$W\left(C_{\varphi_{p,\omega}}\right) = W\left(C_{\rho_{\eta^{-۱}}} o C_{\varphi_{|p|,\omega}} o C_{\rho_\eta}\right) = W(C_{\varphi_{|p|,\omega}}) \quad ■$$

فرض کنیم φ یک خودریختی بیضوی از مرتبه k باشد. برای مرتبه $k = ۲$، همانطور که در مقدمه گفته شد، $W(C_\varphi)$ بیضی با کانون های ± ۱ است، ولی برای مرتبه $k > ۲$، شکل $W(C_\varphi)$ هنوز مشخص نشده است. در قضیه بعد رفتار مجانبی بعضی از دنباله‌های چنین مجموعه‌هایی تبیین شده است.

قضیه ۳,۲. فرض کنیم $\omega_k = e^{\frac{۲\pi i}{k}}$، $۰ < p < ۱$ و $\varphi = \alpha_p o \rho_{\omega_k} o \alpha_p$ آنگاه $\overline{W\left(C_{\varphi_k}\right)}$ وقتی $k \to \infty$، همگرا به گوی بسته واحد، $\overline{\mathbb{U}}$، **است.**

برهان. قرار دهید $e_j(z) = \left(\alpha_p(z)\right)^j$ برای $j = ۰, ۱, ۲, \ldots k - ۱$. با محاسبات سرراست داریم $C_{\varphi_k} e_j(z) = \omega_k^j e_j(z)$، یعنی e_j تابع ویژه از C_{φ_k} متناظر با مقدار ویژه ω_k^j است. در نتیجه $\omega_k^j \in W\left(C_{\varphi_k}\right)$. فرض کنیم T_k پوسته محدب از $\{۱, \omega_k, \omega_k^۲, \ldots, \omega_k^{k-۱}\}$ باشد. چون $W\left(C_{\varphi_k}\right)$ محدب، کراندار و شعاع عددی آن کمتر یا مساوی $\|C_{\varphi_k}\|$ است لذا

$$T_k \subseteq \overline{W\left(C_{\varphi_k}\right)} \subseteq \overline{B(۰, \|C_{\varphi_k}\|)}.$$

بنابراین

$$\Delta(\overline{W\left(C_{\varphi_k}\right)}, T_k) = \sup_{x \in W\left(C_{\varphi_k}\right)} \inf_{y \in T_k} |x - y| \le \left\|C_{\varphi_k}\right\| - \cos\frac{\pi}{k}.$$

از طرف دیگر

$$\Delta(T_k, \overline{\mathbb{U}}) \to ۰ \quad \text{اگر} \quad k \to \infty$$

همچنین، چون φ_k تابع داخلی است،

$$\left\|C_{\varphi_k}\right\| = \sqrt{\frac{|1-p^2\omega_k|+p|1-\omega_k|}{|1-p^2\omega_k|-p|1-\omega_k|}} \to 1 \quad \text{اگر} \quad k\to\infty$$

اثبات با ترکیب سه رابطه فوق بدست می‌آید.

۴. پیوستگی نسبت به نماد φ

یادآوری می‌کنیم که دنباله ی $\{A_n\}$ از عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را همگرا به A در توپولوژی عملگر قوی، SOT، می نامیم اگر $||(A_n-A)x||\to 0$ برای هر بردار $x\in\mathcal{H}$.

در این بخش ما ثابت می‌کنیم که عملگرهای ترکیبی به عنوان تابعی از نماد φ پیوسته است. در واقع ما قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴,۱ فرض کنیم $\{\varphi_n\}$ دنباله ای از خودریختی‌های همدیس گوی واحد باشد. اگر $\varphi_n\to\varphi$ وقتی $n\to\infty$، روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{U}$، آنگاه برای هر $f\in H^2$

$C_{\varphi_n}f\to C_\varphi f$ وقتی $n\to\infty$.

در واقع

$C_{\varphi_n}\to C_\varphi$ در SOT.

برهان. بنابر مساله $9(a)$ صفحه ۳۴ از [۱۸]، $\varphi_n\to\varphi$، به‌طور ضعیف، وقتی $n\to\infty$. از طرفی

$$0\le\|\varphi_n-\varphi\|^2=\|\varphi_n\|^2-2Re<\varphi_n,\varphi>+\|\varphi\|^2$$
$$\le 2(1-Re<\varphi_n,\varphi>)\to 0$$

چون $\|\varphi\|=1$، بنابراین $\|\varphi_n-\varphi\|\to 0$.

فرض کنیم $p_k(z)=z^k$ برای $k=0,1,2,\ldots$ آنگاه

$$||(C_{\varphi_n}-C_\varphi)p_k||=\int_{\partial\mathbb{U}}\left|(\varphi_n(z))^k-(\varphi(z))^k\right|^2dmz$$
$$\le k^2\int_{\partial\mathbb{U}}\left|(\varphi_n(z))-(\varphi(z))\right|^2dmz$$
$$=k^2\left||\varphi_n-\varphi|\right|,$$

که به صفر میل می‌کند وقتی $n\to\infty$. بنابراین $||(C_{\varphi_n}-C_\varphi)P||\to 0$ برای هر چندجمله‌ای P. فرض کنیم $f\in H^2$ و $\{P_k\}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها که در H^2 به f همگرا باشد. چون φ_n و φ توابع داخلی هستند و $\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(0)|=|\varphi(0)|$، برای هر عدد صحیح مثبت n، داریم

$$||(C_{\varphi_n}-C_\varphi)||\le\sqrt{\frac{|1+\varphi_n(0)|}{|1-\varphi_n(0)|}}+\sqrt{\frac{|1+\varphi(0)|}{|1-\varphi(0)|}}\le M$$

جایی که M یک عدد حقیقی مثبت است. حال فرض کنید $\epsilon>0$ انتخاب شده باشد. عدد صحیح و مثبت k_0 وجود دارد بطوری که $\left||f-P_{k_0}|\right|\le\frac{\epsilon}{2M}$. همچنین عدد صحیح و مثبت N هست بطوری که $n\ge N$ ایجاب می‌کند $||(C_{\varphi_n}-C_\varphi)P_{k_0}||\le\frac{\epsilon}{2}$، و لذا داریم

$$||(C_{\varphi_n}-C_\varphi)f||=||(C_{\varphi_n}-C_\varphi)(f\pm P_{k_0})||\le$$

$$||(C_{\varphi_n}-C_\varphi)(f-P_{k.})||+||(C_{\varphi_n}-C_\varphi)P_{k.}||\leq \epsilon$$

و در نتیجه $||(C_{\varphi_n}-C_\varphi)f||\to ۰$ وقتی $n\to\infty$، و این اثبات را کامل می‌کند.

نتیجه ۴٫۲ فرض کنید φ_k تابعی باشد که در قضیه ۳٫۲ تعریف شده است. آنگاه

$C_{\varphi_k}\to C_\varphi$ وقتی $k\to\infty$ در SOT

برهان. با یک محاسبات ساده، برای $z\in\partial\mathbb{U}$ ، داریم

$$|\varphi_k(z)-z|=\frac{|۱-\omega_k||p-z||۱-pz|}{|۱-p^۲\omega_k-p(۱-\omega_k)z|}\leq\frac{|۱-\omega_k|(۱+p)^۲}{|۱-p^۲\omega_k|-|p(۱-\omega_k)|}$$

چون طرف راست نامساوی بالا مستقل از z است و وقتی $k\to\infty$ به صفر میل می‌کند لذا $\varphi_k(z)\to z$ بطور یکنواخت روی $\partial\mathbb{U}$. بنابر قضیه ماکزیمم قدرمطلق $\varphi_k(z)\to z$، بطور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{U}$. نتیجه از قضیه ۴٫۱ بدست می‌آید.

نتیجه ۴٫۲ فرض کنید φ_k تابعی باشد که در قضیه ۳٫۲ تعریف شده است. آنگاه برای هر $f\in H^۲$ با $||f||=۱$ داریم $<C_{\varphi_k}f,f>\to ۱$ وقتی که $k\to\infty$.

اثبات. بنابر نتیجه ۴٫۱ داریم

$$|<C_{\varphi_k}f,f>-||f||^۲|=|<C_{\varphi_k}f-f,f>|\leq||C_{\varphi_k}f-f||\,||f||\to ۰$$

بنابراین اگر $||f||=۱$ آنگاه $<C_{\varphi_k}f,f>\to ۱$ وقتی که $k\to\infty$.

نتیجه ۴٫۳ فرض کنید $\varphi_k=\alpha_p o \rho_{\omega_k} o \alpha_p$، آنگاه دنباله $\{C_{\varphi_k}\}$ در توپولوژی نرم عملگرها واگرا است.

اثبات. بنابر قضیه ۳٫۲، $\lim_{k\to\infty}\overline{W(C_{\varphi_k})}=\overline{\mathbb{U}}$. اثبات به سادگی از قضیه ۲٫۱ و نتیجه ۴٫۲ و این واقعیت که $W(C_z)=\{۱\}\neq\overline{\mathbb{U}}$ حاصل می‌شود.

۵. خودریختی‌های بیضوی

فرض کنیم φ یک خودریختی بیضوی از $\mathbb{U}$ باشد که مبدا را ثابت نگه نمی‌دارد. با اینکه برد عددی C_φ به طور کامل مشخص نشده، در این بخش بعضی از خواص آن مطرح می‌شود.

در این بخش ما به طور خاص به سوالی درباره شکل برد عددی عملگرهای ترکیبی خودریختی‌های بیضوی از مرتبه متناهی روی فضای هاردی پاسخ می‌دهیم که بردون و شاپیرو در [۲] بحث کرده‌اند. در واقع اگر $\omega=e^{\frac{۲\pi i}{k}}$، $k\geq۲$ و $\varphi_p(z)=\alpha_p(\omega\alpha_p(z))$، آنگاه ما ثابت می‌کنیم برای بعضی p ها $W(C_{\varphi_p})$ گوی نیست.

قضیه ۵٫۱ فرض کنیم φ خودریختی بیضوی از $\mathbb{U}$ باشد. آنگاه $W(C_\varphi)=W(C_\varphi^{-۱})^*$.

برهان. فرض کنیم $f\in H^۲$ و $||f||=۱$ و تعریف می‌کنیم $\tilde{f}(z)=\overline{f(\bar{z})}$. واضح است که

$$<C_\varphi\tilde{f},\tilde{f}>=<f,C_\varphi^{-۱}f>=\overline{<C_\varphi^{-۱}f,f>}\,,$$

و این ایجاب می‌کند که $W(C_\varphi^{-۱})^*\subset W(C_\varphi)$. طرف دیگر به سادگی، با روش مشابه و این واقعیت که $\tilde{\tilde{f}}=f$ بدست می‌آید.

برای نقطه ثابت $p\in\mathbb{U}$ و عدد صحیح و غیرمنفی n، فرض کنیم

$$b_n(z):=\frac{\sqrt{۱-|p|^۲}}{۱-\bar{p}z}\left(\alpha_p(z)\right)^n\qquad(z\in\mathbb{U})$$

در این صورت $\{b_n; n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای برای فضای هاردی $H^۲$ است که به پایه گایکر[۱۰] شهرت دارد (برای جزییات بیشتر مرجع [۸] را ببینید).

عملگر انتقال رو به جلو $M_{\alpha_p(z)}$ (نسبت به پایه گایکر) را روی فضای هاردی $H^۲$ را با

$$M_{\alpha_p(z)} f(z) := \alpha_p(z) f(z)$$

تعریف می‌کنیم. برای $f, g \in H^۲$ داریم

$$< M^*_{\alpha_p(z)} M_{\alpha_p(z)} f(z), g(z) >=< M_{\alpha_p(z)} f(z), M_{\alpha_p(z)} g(z) >$$

$$= \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\partial\mathbb{U}} \alpha_p(z) f(z) \overline{\alpha_p(z) g(z)} \frac{dz}{z} =< f, g >$$

بنابراین $M_{\alpha_p(z)}$ یکمتری است و $M^*_{\alpha_p(z)} M_{\alpha_p(z)} = I$. در واقع

$$M^*_{\alpha_p(z)} f(z) = \frac{f(z) - f(p)}{\alpha_p(z)}$$

همچنین، اگر φ یک خودریختی بیضوی از $\mathbb{U}$ باشد که $p \in \mathbb{U}$ را ثابت نگه می‌دارد و پارامتر چرخش آن ω باشد آنگاه

$C_\varphi M_{\alpha_p(z)} = \omega M_{\alpha_p(z)} C_\varphi$،

و این قضیه زیر را ایجاب می‌کند:

قضیه ۵,۲ فرض کنیم φ خودریختی بیضوی از $\mathbb{U}$ با پارامتر چرخش ω باشد. آنگاه

$$\omega W(C_\varphi) \subset W(C_\varphi)$$

برهان. فرض کنیم $f \in H^۲$ و $||f|| = ۱$. آنگاه

$$\omega < C_\varphi f, f > = \omega < C_\varphi f, M^*_{\alpha_p(z)} M_{\alpha_p(z)} f > = \omega < M_{\alpha_p(z)} C_\varphi f, M_{\alpha_p(z)} f >$$
$$=< C_\varphi M_{\alpha_p(z)} f, M_{\alpha_p(z)} f >$$

جایی که $p \in \mathbb{U}$ نقطه ثابت φ است. چون $M_{\alpha_p(z)}$ یکمتری است، ایجاب می‌کند که $\omega W(C_\varphi) \subset W(C_\varphi)$.

به عنوان یک نتیجه از قضیه ۵,۲، داریم که:

نتیجه ۵,۳ فرض کنیم φ خودریختی بیضوی از $\mathbb{U}$ با پارامتر چرخش ω باشد. اگر ω ریشه واحد نباشد آنگاه $\overline{W(C_\varphi)}$ گویی به مرکز مبدا است.

اثبات. بنابر قضیه ۵,۲ برای هر عدد صحیح غیرمنفی j داریم $\omega^j W(C_\varphi) \subset W(C_\varphi)$. چون ω ریشه واحد نیست لذا $\{\omega^j\}$ در دایره واحد چگال است و بنابراین برای هر عدد حقیقی و مثبت θ، $e^{i\theta}\overline{W(C_\varphi)} \subset \overline{W(C_\varphi)}$. بنابراین $\overline{W(C_\varphi)}$ گویی به مرکز مبدا است.

نتیجه ۵,۴ فرض کنیم φ خودریختی بیضوی $\mathbb{U}$ از مرتبه k و پارامتر چرخش ω باشد. آنگاه شرایط زیر برقرار است:

۱) $\omega W(C_\varphi) = W(C_\varphi)$

۲) اگر $k > ۲$ آنگاه $W(C_\varphi)$ بیضی نیست.

---

[۱۰] Guyker

برهان. از قضیه ۵٫۲ داریم

$$\omega^{k} W(C_\varphi) \subset \omega^{k-۱} W(C_\varphi) \subset \cdots \subset W(C_\varphi)$$

قسمت (۱) از $\omega^k = ۱$ نتیجه می‌شود. حال اگر $k > ۲$ آنگاه

$$\omega^{۲} W(C_\varphi) = \omega W(C_\varphi) = W(C_\varphi)$$

بنابراین $W(C_\varphi)$ بیضی نیست.

تذکر ۵٫۵ فرض کنیم φ خودریختی بیضوی $\mathbb{U}$ از مرتبه متناهی باشد. بنا بر نتیجه۵٫۴ اگر $W(C_\varphi)$ گوی باشد آنگاه مرکز آن مبدا مختصات خواهد بود.

نمایش ماتریسی عملگر ترکیبی C_{φ_p} نسبت به پایه گایکر را بدست می‌آوریم. با یک محاسبه ساده بدست می‌آید که:

$$(C_{\varphi_p} b_n)(z) = \frac{\omega^n(۱ - \omega p^{۲} - p(۱-\omega)z)}{۱ - p^{۲}} b_n(z)$$

بنابراین برای اعداد صحیح و مثبت m و n،

$$< C_{\varphi_p} b_n, b_m >= \frac{\omega^n(۱ - \omega p^{۲})}{۱ - p^{۲}} < b_n, b_m > - \frac{p(۱-\omega)\omega^n}{۱ - p^{۲}} < z b_n, b_m >.$$

در [۷] گایکر نشان داده که ماتریس C_{φ_p} در پایه $\{b_n\}$ پایین مثلثی با درایه‌های قطری

$$[۱, \varphi_p'(p), \varphi_p'(p)^{۲}, \ldots]$$

است. بنابراین ما نیاز داریم درایه‌های زیر قطر اصلی را مشخص کنیم. اگر $n = m$،
$< z b_m, b_m > = p$.

حال فرض کنیم $m > n$. داریم

$$< (۱ - pz) b_{n+۱}, b_m > =< (۱ - pz) \frac{\sqrt{۱ - p^{۲}}}{۱ - pz} \left(\alpha_p(z)\right)^{n+۱}, b_m > =$$
$$< (p - z) b_n, b_m >= p < b_n, b_m > - < z b_n, b_m >.$$

بنابراین ما فرمول بازگشتی زیر را داریم:

$$< z b_n, b_m >= p < b_n, b_m > + p < z b_{n+۱}, b_m > - < b_{n+۱}, b_m >.$$

با حل این فرمول بازگشتی داریم

$$< z b_n, b_m >= p^{m-n+۱}(p < z b_m, b_m > -۱) = (p^{۲} - ۱) p^{m-n-۱},$$

و بنابراین

$$< C_{\varphi_p} b_n, b_m >= \begin{cases} ۰, & \text{اگر } m < n \\ \omega^n, & \text{اگر } m = n \\ \omega^n(۱-\omega) p^{m-n}, & \text{اگر } m > n \end{cases}$$

لذا نمایش ماتریسی عملگر ترکیبی C_{φ_p} نسبت به پایه گایکر $\{b_n\}$ از $H^{۲}$ عبارت است از

$$C_{\varphi_p} = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)$$

که

$$a_{i,j}^{(p)} = \begin{cases} \omega^{j-۱}, & \text{اگر } i = j \\ \omega^{j-۱}(۱-\omega)p^{i-j}, & \text{اگر } i > j \\ ۰, & \text{اگر } i < j \end{cases}$$

وقتی که زیرنویس‌های i و j در مجموعه اعداد صحیح مثبت تغییر می‌کنند.

قبل از اینکه به موضوع اصلی این بخش بپردازیم، بعضی از مطالب مربوط به نظریه ماتریس ها از فصل ۵ مرجع [۱۱] یادآوری می‌کنیم.

ماتریس مربعی $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط را در نظر بگیرید. *نرم ماکزیمم مجموع قدرمطلق ستون*، $||A||_۱$، نرم طیفی یا نرم عملگر، $||A||_۲$، و *نرم ماکزیمم مجموع قدرمطلق سطر*، $||A||_\infty$، به ترتیب با

$$||A||_۱ = \max_j \sum_{i=۱}^{n} |a_{i,j}|, \quad ||A||_۲ = \sqrt{r(A^*A)}, \quad ||A||_\infty = \max_i \sum_{j=۱}^{n} |a_{i,j}|$$

تعریف می‌شوند، جایی که A^* ترانهاده مزدوج A و $r(A^*A)$ بزرگترین مقدار ویژه طیفی A^*A است. این سه نرم در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$||A||_۲^۲ \le ||A||_۱ ||A||_\infty$$

لم ۵٫۶ فرض کنیم $۰ < p < ۱$ و $\varphi_{p,\omega}$ خودریختی بیضوی مرتبه k باشد. آنگاه برای هر $n \ge k$،

$$\left|\left|A_{n,p} - A_n\right|\right|_۲ \le |۱-\omega| \frac{p}{۱-p}$$

جایی که $A_n = diag\{۱, \omega, \omega^۲, \ldots, \omega^{k-۱}\}$ و $A_{n,p} = \left[a_{i,j}^{(p)}\right]_{n\times n}$ زیر ماتریس حاصل از n سطر و n ستون اول نمایش ماتریسی عملگر C_{φ_p} می باشد.

برهان. داریم:

$$\left|\left|A_{n,p} - A_n\right|\right|_۱ = \max_j \sum_{i=۱}^{n} \left|a_{i,j}^{(p)} - a_{i,j}\right| = \max_j \sum_{i=j+۱}^{n} |۱-\omega| p^{i-j}$$
$$= \max_j |۱-\omega| p \frac{۱-p^{n-j}}{۱-p} \le |۱-\omega| \frac{p}{۱-p}$$

و

$$\left|\left|A_{n,p} - A_n\right|\right|_\infty = \max_i \sum_{j=۱}^{n} |a_{i,j}^{(p)} - a_{i,j}| = \max_i \sum_{j=۱}^{i-۱} |۱-\omega| p^{i-j}$$
$$= \max_i |۱-\omega| \frac{p-p^n}{۱-p} \le |۱-\omega| \frac{p}{۱-p}$$

بنابراین اثبات به کمک رابطه بین نرم‌ها که قبل از لم یادآوری کردیم کامل می‌شود.

قضیه ۵٫۷ اگر $\omega = e^{\frac{۲\pi i}{k}}$، $k \ge ۲$ و $\varphi_{p,\omega}(z) = \alpha_p(\omega\alpha_p(z))$. آنگاه $W(C_{\varphi_{p,\omega}})$ برای بعضی از p ها گوی نیست.

برهان. فرض کنیم (فرض خلف)، $W(C_{\varphi_{p,\omega}})$ یک گوی باشد. چون $W(A_{۲,p}) \subseteq W(C_{\varphi_{p,\omega}})$ و $W(A_{۲,p})$ یک بیضوی با کانون های ۱ $,\omega$ است لذا شعاع عددی $W(C_{\varphi_{p,\omega}})$ یعنی $r(C_{\varphi_{p,\omega}})$ اکیدا از یک بزرگتر است.

بنابر **نتیجه ۵,۴** مرکز این گوی مبدا مختصات است. حال فرض کنیم $n \geq k$ و $x \in \mathbb{C}^n$ با $||x|| = ۱$.
بنابراین

$$| < A_{n,p}x, x > - < A_n x, x > | = \left|\left|A_{n,p} - A_n\right|\right|_۲ \leq |۱ - \omega| \frac{p}{۱ - p}$$

از اینرو

$$\begin{aligned}\Delta\left(W(A_{n,p}), W(A_n)\right) &= \sup_{||x||=۱} \inf_{||y||=۱} | < A_{n,p}x, x > - < A_n y, y > | \\ &\leq \sup_{||x||=۱} \left| < A_{n,p}x, x > - < A_n x, x > \right| \leq \left|\left|A_{n,p} - A_n\right|\right|_۲ \\ &\leq |۱ - \omega| \frac{p}{۱ - p}.\end{aligned}$$

از طرف دیگر $W(C_{\omega z}) = T_k$ جایی که T_k غلاف محدب مجموعه $\{۱, \omega, \ldots, \omega^{k-۱}\}$، یعنی کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل $\{۱, \omega, \ldots, \omega^{k-۱}\}$، است. چون ۱، ω،...و $\omega^{k-۱}$ مقادیر ویژه $C_{\varphi_{p,\omega}}$ هستند، $T_k \subseteq W(C_{\varphi_{p,\omega}})$. از اینرو

$$\Delta\left(\overline{W(C_{\varphi_{p,\omega}})}, \overline{W(T_k)}\right) \geq r(W\left(C_{\varphi_{p,\omega}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) > ۱ - \cos(\frac{\pi}{k})$$

فرض کنیم $۰ < \epsilon < ۱ - \cos(\frac{\pi}{k})$ اختیار شده باشد. بنابراین $۰ < p < ۱$ وجود دارد بطوری که $|۱ - \omega| \frac{p}{۱-p} < \frac{\epsilon}{۲}$. برای چنین p، $n > ۰$ است که $\Delta\left(\overline{W(C_{\varphi_{p,\omega}})}, W(A_{n,p})\right) < \frac{\epsilon}{۲}$ ، لذا $\Delta\left(\overline{W(C_{\varphi_{p,\omega}})}, \overline{W(C_{\omega z})}\right) < \epsilon$ که تناقض است.

تبصره۵,۸. قضیه بالا که نتیجه اصلی است برای تمام $k \geq ۲$ محدوده‌ای را برای p مشخص می‌کند که مرز $W(C_{\varphi_{p,\omega}})$ دایره نیست. با افزایش k مقدار p کاهش پیدا می‌کند اما پاسخی برای مساله وجود دارد. برای مثال اگر $k = ۶$ آنگاه برای $p \in \mathbb{U}$ با شرط $|p| < \frac{۱}{۸}$ مرز $W(C_{\varphi_{p,\omega}})$ دایره نخواهد بود.

۶. نتیجه گیری:

با اینکه قضیه برای خانواده بزرگی از عملگرها ترکیبی، با زیرنویس بیضوی از مرتبه متناهی، ثابت شد ولی همچنان مساله به طور کامل حل نشده و باز است. طراحان این حدسیه و علاقه‌مندان به برد عددی عملگرهای ترکیبی در صدد حل آن هستند و در این مسیر نتایج جالبی را اثبات کرده‌اند که برای مثال به [۶] مراجعه کنید.

مراجع

[۱] A. Abdollahi, The numerical range of a composition operator with conformal automorphism symbol, Linear algebra appl., vol. ٤٠٨ (٢٠٠٥),١٧٧-١٨٨.
[۲] P. S. Bourdon and J. H. Shapiro, The numerical range of automorphic composition operators, J. Math. Anal. Appl., ٢٥١ (٢٠٠٠), ٨٣٩-٨٥٤.
[۳] P. S. Bourdon and J. H. Shapiro, When is zero in the numerical range of a composition operator, Integr. Equ. Oper. Theory ٤٤ (٢٠٠٢), ٤١٠-٤٤١.
[٤] S. L. Burnett, A. Chandler, L. J. Patton, Symmetric numerical ranges of four-by-four matrices, Involve, a Journal of Mathematics, ١١ (٢٠١٨) (٥), ٨٠٣-٨٢٦.
[٥] C. C. Cowen and B. D. Maccluer, Composition operators on spaces of analytic functions, CRC Press, Boca Raton, ١٩٩٥.
[٦] Y-X. Gao, Y. Liang, Y. Wang, Z-H. Zhou, **Numerical ranges of composition operators with elliptic automorphism symbols,** Banach Journal of Mathematical Analysis,١٧(٣) DOI:١٠,١٠٠٧/s٤٣٠٣٧-٠٢٣-٠٠٢٦٤-٣.
[۷] K. E. Gustafon and K. M. Rao, The numerical range, the field of values of linear operators and matrices, Springer, New York. ١٩٩٧.
[۸] J. Guyker, on reducing subspaces of composition operators, , Acta Sci. Math. (Szeged) ٥٣. (١٩٨٩), ٣٦٩٣٧٦.
[۹] P. R. Halmos, A Hilbert space problem Book, second ed. , Springer, New York, ١٩٨٢.
[۱٠] T.R. Harris, M. Mazzella, L.J. Patton, D. Renfrew, I.M. Spitkovsky, Numerical ranges of cube roots of the identity, Linear Algebra Appl. ٤٣٥ (٢٠١١) ٢٦٣٩–٢٦٥٧
[۱۱] M. T. Heydari, A. Abdollahi, The numerical range of finite order elliptic automorphism composition operators, Linear Algebra and its Applications ۴۸۳ (۲۰۱۵) ۱۲۸–۱۳۸
[۱۲] R. A. Horn, C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, ١٩٨٥.
[۱۳] J. E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc. ٢٣ (١٩٢٥), ٤٨١٥١٩.
[۱٤] V. Matache, Numerical ranges of composition operators, Linear algebra appl., ٣٣١ (٢٠٠١), ٦١-٧٤
[۱٥] V. Matache, Aleksandrov Operators and Numerical Ranges of Composition Operators with Inner Symbols, to appear.
[۱٦] L.J. Patton, Some block Toeplitz composition, J. Math. Anal. Appl. ٤٠٠ (٢٠١٣) ٣٦٣–٣٧٦
[۱۷] W. Rudin, Real and complex analysis. Third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, ١٩٨٧.
[۱۸] J. H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, ١٩٩٣.
[۱۹] R. K. Singh and J. S. Manhas, Composition operators on function spaces, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, ١٩٩٣.