دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

بسته‌بندی‌های باز در درخت‌ها

مهدی محمدی[1]، محمد مقاصدی[2]*

(۱و۲) گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۰۵

چکیده

فرض کنم G یک گراف باشد. زیر مجموعه S از رأس های G را یک بسته بندی باز G گوییم هرگاه همسایگی باز رأس های S در G دو به دو مجزا باشند. به ماکزیمم اندازه چنین بسته بندی هایی، عدد بسته بندی باز گراف گفته می شود. و آن را با $\rho^{\circ}(G)$ نمایش می دهیم. دراین مقاله نشان می دهیم که برای هر درخت T از مرتبه $n \geq 3$، داریم $\rho^{\circ}(T) \leq \frac{2n}{3}$ و به علاوه درخت های T با $\rho^{\circ}(T) = \frac{2n}{3}$ را دسته بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: بسته بندی گراف، بسته بندی باز گراف، عدد بسته بندی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: maghasedi@kiau.ac.ir

۱- مقدمه

بسته بندهای باز یکی از موضوعات مهم و مورد توجه بسیاری از محققین در نظریه گراف است. کارهای زیادی در مورد این مفهوم صورت گرفته، که به عنوان مثال می‌توان به [۱،۲،۳، ۴،۵، ۱۱،۱۰،۹] اشاره کرد. نمادگذاری های ما در این مقاله مطابق با [۶] است. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. برای هر $v \in V$ منظور از همسایگی باز رأس v مجموعه‌ی $N(v) = \{u \in V \mid u$ است و همسایگی بسته رأس v عبارت است از $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ زیر مجموعه‌ی $S \subseteq V$ را یک بسته بندی باز برای G گوییم هرگاه برای هر $u, v \in S$ که $u \neq v$، $N(u) \bigcap N(v) = \emptyset$. به ماکزیمم اندازه چنین S ای عدد بسته بندی باز G گفته می شود و این عدد را با $\overset{\circ}{\rho}(G)$ نمایش می-دهیم. مجموعه $S \subseteq V$ را یک $\overset{\circ}{\rho}(G)$-مجموعه می‌نامیم، هرگاه S یک بسته بندی باز با $|S| = \overset{\circ}{\rho}(G)$ باشد. زیر مجموعه‌ی $S \subseteq V$ را یک بسته بندی برای G گوییم هرگاه برای هر $u, v \in S$ که $u \neq v$، $N[u] \bigcap N[v] = \emptyset$. به ماکزییم اندازه چنین Sای عدد بسته‌بندی G گفته می شود واین عدد را با $\rho(G)$ نمایش می دهیم. همچنین مینیموم اندازه چنین S ای را با $\rho_L(G)$ نشان می‌دهیم. منظور از یک مسیر بطول n در گراف G دنباله ای است از رأس‌های دو به دو متمایز G به فرم $v_0, v_1, \ldots, v_n$، بطوریکه هر دو رأس متوالی در این دنباله مجاور باشند. طول کوتاهترین مسیر ممکن بین دو رأس را فاصله بین آن دو رأس نامند. بیشترین فاصله یک رأس با سایر رأس ها را خروج از مرکز آن رأس می‌نامند. بیشترین خروج از مرکز را قطر گراف می‌نامند. گراف همبند بدون دور را درخت گوییم. گراف $G = (V, E)$ را جهت‌دار گوییم هرگاه ۱ $E \subseteq V \times$. گراف جهت‌دار را درخت جهت دار گوییم هرگاه گراف بدون جهت مربوط به آن، یک درخت باشد. یک درخت جهت دار را درخت ریشه دار گوییم هرگاه یک رأس منحصر به فرد به نام ریشه با درجه ورودی صفر داشته باشد و سایر رأس های آن از درجه ورودی یک باشند. راس والد در یک درخت ریشه دار یک رأس غیر از ریشه است که راسی مجاور با آن مانند v موجود باشد که فاصله آن تا ریشه از فاصله v تا ریشه یک واحد کمتر است. همچنین فرزند یا مولود یک رأسی است مجاور با راسی مانند v که فاصله آن تا ریشه از فاصله v تا ریشه یک واحد بیشتر است. رأس درجه یک را برگ و رأس مجاور برگ را محمل‌می‌نامند. گراف G با $n + 1$ رأس که یک رأس آن از درجه n و سایر رأسهای آن از درجه یک باشند را گراف ستاره می نامند و با $K_{1,n}$ نمایش می دهند. یک عنکبوت یا ۲- ستاره گرافی است شامل دو ستاره که راس های ماکزیمم درجه در دو ستاره مجاوراند.گراف مسیر به طول n را با P_{n+1} نمایش می دهیم.

بعضی از نتایج مهم و کلیدی بدست آمده در مورد بسته بندی ها به شرح زیر است:

در [۷] ثابت شده است اگر G گرافی همبند از مرتبه ی $n \geq 2$ باشد آنگاه:

$$\overset{\circ}{\rho}(G) \leq \frac{n}{\delta(G)}.$$

هنینگ در [۸] به بسته بندی درخت‌ها پرداخته و نشان داده است که اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد آنگاه $\overset{\circ}{\rho}(T) - \rho(T) \leq \frac{n}{3}$ و بعلاوه:

$$\overset{\circ}{\rho}(T) - \rho_L(T) \leq \frac{n-1}{2}$$

وی در همان مقاله ثابت می کند که اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد آنگاه :

$$\rho_L(T) \le \frac{n+3-2\sqrt{n}}{2}.$$

در این مقاله نشان می دهیم که برای هردرخت T از مرتبه $n \ge 3$ داریم:

$$\overset{\circ}{\rho}(T) \le \frac{2n}{3}$$

و به علاوه درخت‌های T با $\overset{\circ}{\rho}(T) = \frac{2n}{3}$ را دسته بندی می کنیم.

۲- نتایج اصلی

با تعریف زیر این بخش را شروع می‌کنیم.

تعریف ۲. ۱. رأس v از درخت T را رأس معمولی گوییم هرگاه به تمام $\overset{\circ}{\rho}(T)$ – مجموعه‌ها تعلق نداشته باشد.

تبصره ۲ . ۲. مسیر P_2 تنها درخت فاقد رأس معمولی است.

قضیه ۲ . ۳. برای هر درخت T از مرتبه $n \ge 3$ داریم: $\overset{\circ}{\rho}(T) \le \frac{2n}{3}$.

اثبات. به استقرا روی $n \ge 3$ مطلب را ثابت می‌کنیم.

اگر $n = 3$ باشد بدیهی است که $T = P_3$. فرض کنیم حکم برای‌هر درخت از مرتبه‌ی کمتر از n برقرار باشد. درخت T از مرتبه‌ی $n \ge 4$ با قطر d را در نظر می‌گیریم. اگر $d = 2$ ، آنگاه T یک ستاره و $\overset{\circ}{\rho}(T) = 2 < \frac{2n}{3}$ زیرا $n > 3$.اگر $d = 3$ آنگاه T یک ۲- ستاره و $\overset{\circ}{\rho}(T) = 2 < \frac{2n}{3}$.

اینک فرض کنیم که $d \ge 4$ ، $x_0, x_1, \cdots, x_d$ یک مسیر به طول قطر در T و بعلاوه S را یک $\overset{\circ}{\rho}(T)$ - مجموعه در T چنان انتخاب می‌کنیم که $|S \cap \{x_{d-1}, x_d\}|$ حداقل باشد. فرض کنیم $d = 4$، واضح است که هر رأس در $N(x_1) - \{x_2\}$ یک برگ است. اگر x_1 و x_3 تنها رأس‌های $N(x_2)$ باشند که برگ نیستند آنگاه $\{x_0, x_1, x_4\}$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T)$ - مجموعه است و بعلاوه:

$$3 = \overset{\circ}{\rho}(T) < \frac{10}{3} < \frac{2n}{3}.$$

پس فرض می‌کنیم تعداد $a(\ge 1)$ رأس در $N(x_2) - \{x_1, x_3\}$ وجود دارد که برگ نیستند. بنابراین :

$$\overset{\circ}{\rho}(T) = 3 + a < \frac{2(5+2a)}{3} \le \frac{2n}{3}$$

اکنون برای $d \ge 5$ حالت های زیر را در نظر می گیریم.

حالت اول : $x_d \in S$.

ابتدا فرض کنیم که $x_{d-1} \notin S$. بدیهی که $S \cap V(T_{x_{d-1}}) = \{x_d\}$. با فرض $T' = T - T_{x_{d-1}}$، $S - \{x_d\}$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه است و بنا به فرض استقرا:

$$|S| - 1 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-2)}{3}$$

پس

$$|S| < \frac{2n}{3}.$$

بنابراین فرض می کنیم که $x_{d-1} \in S$ ، واضح است

که $x_{d-2} \notin S$. فرض کنیم $deg(x_{d-1}) \geqslant 3$. داریم که:

$$S \cap V(T_{x_{d-1}}) = \{x_{d-1}, x_d\}.$$

با فرض $T' = T - T_{x_{d-1}}$ ، $S - \{x_{d-1}, x_d\}$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه است و بنا به فرض استقرا:

$$|S| - 2 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-3)}{3}$$

در نتیجه:

$$|S| \le \frac{2n}{3}.$$

اکنون فرض کنیم $deg(x_{d-1}) = 2$ و بعلاوه $deg(x_{d-2}) \ge 3$. بنا به تعریف S، x_d تنها رأس $T_{x_{d-2}}$ با فاصله ۲ از x_{d-2} است. بنابراین هر مولود x_{d-2} به جز x_{d-1} یک برگ است. فرض کنیم $T' = T - T_{x_{d-2}}$ بنابراین $S - \{x_d, x_{d-1}\}$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه است و بنا به فرض استقرا:

$$|S| - 2 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-4)}{3}$$

و این نتیجه می دهد که:

$$|S| < \frac{2n}{3}.$$

پس فرض کنیم که $deg(x_{d-2}) = 2$. لذا $S - \{x_d, x_{d-1}\}$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T)$ - مجموعه است و بنا به فرض استقرا:

$$|S| - 2 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-3)}{3}$$

مانند حالات قبل نتیجه می شودکه:

$$|S| \le \frac{2n}{3}.$$

حالت دوم: $x_d \notin S$.

اگر $x_{d-1} \in S$، آنگاه با توجه به انتخاب S، $S \cap V(T_{x_{d-1}}) = \{x_{d-1}\}$ و $S - \{x_{d-1}\}$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T)$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-1}}$ است. لذا بنا به فرض استقرا:

$$|S| - 1 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-2)}{3}$$

لذا :

$$|S| < \frac{2n}{3}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم $x_{d-1} \notin S$. اگر $S \cap V(T_{x_{d-1}}) \ne \varnothing$، آنگاه $deg(x_{d-1}) \geqslant 3$ و $|S \cap V(T_{x_{d-1}})| = 1$ و $S \cap V(T_{x_{d-1}})$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-1}}$ است. لذا بنا به فرض استقرا:

$$|S| - 1 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-3)}{3}$$

و در نتیجه :

$|S| < \frac{2n}{3}$.

بنابراین فرض کنیم که $S \cap V(T_{x_{d-1}}) = \varnothing$.

بدیهی است که $x_{d-2} \in S$. بنابراین $|S \cap V(T_{x_{d-2}})| \le 2$ و $S - V(T_{x_{d-2}})$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T)$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-2}}$ است.

لذا بنا به فرض استقرا:

$$|S| - 2 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-3)}{3}$$

و در این حالت هم داریم:

$|S| \le \frac{2n}{3}$، و این اثبات را کامل می‌کند. □

در ادامه درخت‌هایی که در تساوی کران قضیه قبل صدق می کنند را دسته بندی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا به معرفی یک خانواده از درخت ها خواهیم پرداخت.

تعریف ۲. ۴. خانواده ی τ از درخت ها را به شکل‌زیر تعریف می‌کنیم:

$T \in \tau$ از روی دنباله $T_1, T_2, \cdots, T_j \ (j \ge 2)$ بدست می آید به طوری که $T_1 = P_3$ و برای $(j \ge 2)$، T_{i+1} از روی T_i $(i = 1, 2, \cdots, j-1)$ به طور بازگشتی با متصل کردن یک رأس معمولی T_i به یک رأس درجه یک P_3 بدست می آید. این عمل را عملگر O می نامیم.

قضیه ۲ . ۵. برای هر درخت T از مرتبه $n \ge 3$، $\overset{\circ}{\rho}(T) = \frac{2n}{3}$ اگر و تنها اگر $T \in \tau$.

اثبات. ابتداء فرض کنیم T درختی از مرتبه $n \ge 3$ و $\overset{\circ}{\rho}(T) = \frac{2n}{3}$ باشد، به استقرا روی $n \ge 3$ نشان می دهیم $T \in \tau$.

اگر $n = 3$ آنگاه $T = P_3 \in \tau$ و حکم برقرار است. فرض کنیم حکم برای هر درخت از مرتبه کمتر از n برقرار باشد. T را درختی از مرتبه $n \ge 4$ در نظر می‌گیریم که $\overset{\circ}{\rho}(T) = \frac{2n}{3}$. فرض کنیم $d = diam(T)$ و $x_0, x_1, x_2 \cdots, x_d$ و S به مانند آنچه در اثبات قضیه قبل گفته شد، انتخاب شده باشند. اگر $d = 2$، آنگاه T یک ستاره و اگر $3 \le d \le 4$ باشد آنگاه طبق اثبات قضیه قبل $\overset{\circ}{\rho}(T) < \frac{2n}{3}$ که این یک تناقض است. بنابراین لازم است که $d \ge 5$. ادعا می کنیم $x_d \in S$. فرض کنیم $x_d \notin S$. ابتدا فرض کنیم $x_{d-1} \notin S$. اگر $S \cap V(T_{x_{d-1}}) \ne \varnothing$ آنگاه:

$deg(x_{d-1}) \ge 3$ و $|S \cap V(T_{x_{d-1}})| = 1$.

فرض کنیم $a \in S \cap V(T_{x_{d-1}})$. لذا $S - \{a\}$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-1}}$ است. پس بنا به قضیه قبل :

$$|S| - 1 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n'}{3} \le \frac{2(n-3)}{3}$$

و درنتیجه:

$$\overset{\circ}{\rho}(T) < \frac{2n}{3}$$

که این ممکن نیست. پس $S \cap V(T_{x_{d-1}}) = \varnothing$،

بنابراین $x_{d-2} \in S$. اگر $|S \cap V(T_{x_{d-2}})| = 1$ آنگاه $S - \{x_{d-2}\}$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-2}}$ و بنا به قضیه قبل :

$$|S| - 1 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n'}{3} \le \frac{2(n-3)}{3}$$

پس

$$\overset{\circ}{\rho}(T) < \frac{2n}{3}$$

که باز ممکن نیست. بنابراین فرض می کنیم که $|S \cap V(T_{x_{d-2}})| \ge 2$ در این حالت داریم $deg(x_{d-2}) \ge 3$ و بعلاوه $|S \cap V(T_{x_{d-2}})| = 2$.
اکنون $S - V(T_{x_{d-2}})$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-2}}$ است. لذا بنا به قضیه قبل :

$$|S| - 2 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-4)}{3}$$

که این هم ممکن نیست. اینک حالتی را در نظر می‌گیریم که $x_{d-1} \in S$. اگر $|S \cap V(T_{x_{d-1}})| = 1$ آنگاه $S - \{x_{d-1}\}$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-1}}$ است. لذا با استفاده از قضیه قبل :

$$|S| - 1 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-2)}{3}$$

که تناقض است. بنابراین $|S \cap V(T_{x_{d-1}})| \ge 2$ و لذا $|S \cap V(T_{x_{d-1}})| = 2$ و بعلاوه $deg(x_{d-1}) \ge 3$. اگر $deg(x_{d-1}) \ge 4$ باشد آنگاه دوباره به تناقض می رسیم در نتیجه $deg(x_{d-1}) = 3$.

اگر $deg(x_{d-2}) = 2$ آنگاه $S - V(T_{x_{d-2}})$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-2}}$ است.
و بنا به قضیه قبل :

$$|S| - 2 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n'}{3} \le \frac{2(n-4)}{3}$$

که امکان پذیر نیست. بنابراین $deg(x_{d-2}) \ge 3$. واضح است $N(x_{d-2}) \cap S = \{x_{d-1}\}$. فرض کنیم x_{d-2} یک مولود $a \ne x_{d-1}$ دارد که a یک رأس محمل است. در این صورت مولودی مانند b از a به S تعلق خواهد داشت که این با انتخاب مسیر به طول قطر در تناقض است.

بنابراین هر مولود x_{d-2}، متفاوت از x_{d-1}، یک برگ است. حال $S - V(T_{x_{d-2}})$ یک $\overset{\circ}{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-2}}$ است و بنا به قضیه قبل :

$$|S| - 2 \le \overset{\circ}{\rho}(T') \le \frac{2n'}{3} \le \frac{2(n-4)}{3}$$

که این یک تناقض است. بنابراین $x_d \in S$ است.
اگر $x_{d-1} \notin S$، آنگاه با در نظر گرفتن درخت $T - T_{x_{d-1}}$ و قضیه قبل خواهیم داشت $\overset{\circ}{\rho}(T) < \frac{2n}{3}$ که یک تناقض است. لذا

$x_{d-1} \in S$. واضح است که $x_{d-2} \notin S$. اگر $deg(x_{d-1}) \ge 4$، آنگاه بدیهی است :

$$S \cap V(T_{x_{d-1}}) = \{x_d, x_{d-1}\}.$$

پس $S - \{x_d, x_{d-1}\}$ یک $\mathring{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-1}}$، و در نتیجه $|S| < \frac{2n}{3}$ که یک تناقض است. بنابراین فرض می کنیم :

$2 \le deg(x_{d-1}) \le 3$.

فرض کنیم $deg(x_{d-2}) \ge 3$. باتوجه به انتخاب S، x_d تنها راس از $T_{x_{d-2}}$ با فاصله ۲ از x_{d-2} است. بنابر این هر مولود x_{d-2} به جز x_{d-1} یک برگ است. پس $S - \{x_{d-1}, x_d\}$ یک $\mathring{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-2}}$ است و بنا به قضیه قبل :

$$|S| - 2 \le \mathring{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-4)}{3}$$

و لذا خواهیم داشت که :

$$|S| < \frac{2n}{3}.$$

که این یک تناقض است. بنابراین فرض کنیم $deg(x_{d-2}) = 2$. اگر $deg(x_{d-1}) = 3$ باشد آنگاه $S - \{x_d, x_{d-1}\}$ یک $\mathring{\rho}(T')$ - مجموعه برای $T' = T - T_{x_{d-2}}$ است و بنا به قضیه قبل :

$$|S| - 2 \le \mathring{\rho}(T') \le \frac{2n(T')}{3} \le \frac{2(n-4)}{3}$$

بنابراین نتیجه می شودکه:

$$|S| < \frac{2n}{3}.$$

که این یک تناقض است. بنابراین فرض کنیم $deg(x_{d-1}) = 2$. فرض کنیم $T' = T - T_{x_{d-2}}$ واضح است $S - \{x_{d-1}, x_d\}$ یک $\mathring{\rho}(T')$ - مجموعه برای T' است و لذا :

$$\mathring{\rho}(T') \ge |S| - 2 = \frac{2n}{3} - 2 = \frac{2(n-3)}{3}$$

از طرفی بنا به قضیه قبل $\mathring{\rho}(T') \le \frac{2(n-3)}{3}$. بنابراین $\mathring{\rho}(T') = \frac{2(n-3)}{3}$ و بنا به فرض استقرا $T' \in \tau$. چون $S - \{x_{d-1}, x_d\}$ یک $\mathring{\rho}(T')$ - مجموعه برای T' است، x_{d-3} یک رأس معمولی T' است و بنابراین T از T' به وسیله عملگر O بدست می آید. در نتیجه $T \in \tau$.

بر عکس فرض کنیم که $T \in \tau$. بنابراین T از روی دنباله $T_1, T_2, \cdots, T_j$ $(j \ge 2)$ بدست می آید به طوری که $T_1 = P_3$ و اگر $j \ge 2$ باشد T_{i+1} $(i = 1, \cdots, j-1)$، به طور بازگشتی از روی T_i توسط عملگر O بدست می آید. استقرا را روی تعداد عملیات عملگر O تا رسیدن به T به کار می بریم.

واضح است $\mathring{\rho}(T) = \frac{2n}{3}$ اگر $T = P_3$.

فرض کنیم حکم برای T_i برقرار باشد، بنابراین $\mathring{\rho}(T_i) = \frac{2n(T_i)}{3}$. فرض کنیم v یک رأس معمولی از T_i باشد و T_{i+1} از T_i با اتصال v به برگ x از مسیر $P_3 : x, y, z$ بدست آید. واضح است با اضافه کردن y و z به $\mathring{\rho}(T_i)$ - مجموعه، یک مجموعه بسته بندی باز برای T_{i+1} بدست می آید و

لذا داریم :

$$\rho^{\circ}(T_{i+1}) \geq \rho^{\circ}(T_i) + 2 = \frac{2n(T_i)}{3} + 2$$
$$= \frac{2n(T_{i+1})}{3} = \frac{2n}{3}$$

و بنابر قضیه قبل خواهیم داشت که

$$\square.\ \rho^{\circ}(T_{i+1}) = \frac{2n}{3}$$

۳- نتیجه گیری

در این مقاله نویسندگان، یک کران بالا برای عدد دسته‌بندی باز درخت ها ارایه کرده‌اند. و بعلاوه نشان دادن که این کران بالا توسط خانواده ای از درخت ها اخذ می شود.

فهرست منابع

[۱] G. Chartrand and L. Lesniak (۲۰۰۵). *Graphs and Digraphs*, Fourth Edition, Boca Raton: CRC Press.

[۲] E. Gyori, A. Kostochka, A. McConveyd and D. Yager (۲۰۱۶). *A list version of graph packing*, Discrete Math., ۳۳۹, ۲۱۷۸-۲۱۸۵.

[۳] I.S. Hamid and S. Saravanakumar (۲۰۱۵). *Packing parameters in graphs*, Discuss. Math. Graph Theory, ۳۵, ۵-۱۶.

[۴] M. A. Henning and A. Yeo(۲۰۱۳). *Total domination*, Springer-Verlag New York, New York.

[۵] A. Zak (۲۰۱۴). *On packing two graphs with bounded sum of size and maximum degree*, SIAM J. Discrete Math. ۲۸, ۱۶۸۶-۱۶۹۸.

[۶] D. B. West (۲۰۰۱). *Introduction to graph theory*, ۲nd Edition, Prentice-Hall.

[۷] M.A. Henning, P.J. Slater (۱۹۹۹). *Open packing in graphs*, J. Comb. Math. Comb. Comput, ۲۹, ۳-۱۶.

[۸] M. A. Henning (۱۹۹۸). *Packing in trees*, Discrete Math. ,۱۸۶, ۱۴۵-۱۵۵.

[۹] N. Biggs (۱۹۷۳). *Perfect codes in graphs*, J. Combin Theory (B), ۱۵, ۲۸۹-۲۹۶.