

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و هشتم، بهمن و اسفند ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

جایگاه خطاپذیری در ادراک هستی‌شناختی ریاضیات با توسل بر واقع‌گرایی

محمود کوه‌گشت^۱، احمد شاهورانی سمنانی^{۲*}، محمود عبائی کوپایی^۳

^(۱) گروه فلسفه و کلام اسلامی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

^(۲) گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۵/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۸/۰۵

چکیده

درک هستی‌شناسی از ریاضیات وقتی از افلاطون‌گرایی عبور می‌کند و آن را علاوه بر امری انتزاعی و ذهنی به امری واقعی و فیزیکی تعبیر می‌کند، دچار چالشی جدی می‌شود. پاسخ دادن به این چالش زمانی دشوارتر می‌شود که حقایق ریاضی را امری انسانی تلقی کنیم، انسانی که خود امکان خطا دارد. حال ریاضی که بنا بود به واسطه امر ذهنی، اثبات‌پذیر و ایقانی تلقی شود، مورد تردید واقع می‌شود. برای برطرف ساختن این تردیدها فلاسفه سعی می‌کنند که فاصله میان اشیاء ذهنی و فیزیکی را در ریاضیات کاهش دهند، اما فرآیند درک آن‌ها در واقع‌گرایی آن‌ها با چالش جدی‌تر مواجه می‌کند تا مفهوم خطاپذیری به وجود آید. خطاپذیری خود را به عنوان یک مسئله معرفی نمی‌کند، بلکه یک ویژگی مثبت برای ریاضی است و جایگاه آن در ادراک هستی‌شناسی ریاضیات با توسل بر واقع‌گرایی به عنوان عنصر محرک در پیشرفت ریاضیات و قلب تپنده آن است.

واژه‌های کلیدی: ریاضیات، خطاپذیری، هستی‌شناسی، واقع‌گرایی، انتزاع

۱- مقدمه

جست‌وجوی حقیقت همیشه به‌عنوان یک دغدغه خاص انسانی، اگر آن را یک دغدغه وجودی ندانیم، یک ویژگی ممتاز طبیعت انسانی در اضطراب آن برای تکیه بر قطعیت‌های فکری ظاهر می‌شود. حقیقت درجه عظیمی از لذت روانشناختی را ایجاد می‌کند که فرانسیس بیکن^۱ (۱۵۶۱-۱۶۲۶) آن را با یک کنش اروتیک مقایسه می‌کند. او با تکیه بر تصویری از لذت مفرط، جست‌جوی حقیقت را به عنوان شکلی از عشق یا دوست‌داشتن توصیف می‌کند. پیشرفت حقیقت به عنوان یک سلسله پیشرفت‌های عاشقانه به تصویر کشیده می‌شود که مراحل بعدی شادی را به ارمغان می‌آورد و در ادامه شناخت حقیقت که وجود آن است و ایمان به حقیقت، که لذت بردن از آن است را پدید می‌آورد. بیکن نتیجه می‌گیرد که همه این‌ها «خیر مطلق طبیعت بشر است» [۲۰]

ریاضیات پیچیده است، اما به نظر می‌رسد معرفت‌شناسی ریاضیات به نسبت ساده‌تر است. اثبات‌ها اغلب به عنوان مسیری غیرقابل بحث و منحصر به فرد برای دستیابی به دانش ریاضی دست اول در نظر گرفته می‌شوند. توجیه ریاضی خطاناپذیر فرض می‌شود، به طوری که وقتی موضوعی دست اول در باور قضیه‌ای ریاضی توجیه می‌شود، می‌توان آن را باور کرد. این نوع باور با انواع دیگر باورها مانند باورهای ادراکی و شهودی که معمولاً بین توجیه و حقیقت شکاف وجود دارد، متفاوت است.

در این مقاله هستی‌شناختی ریاضیات با ادراک خطاپذیری آن مورد بررسی قرار می‌گیرد و مبنای این ادراک بر تجزیه و تحلیل واقعی از دانش ریاضی بنا شده است. اینکه اشیاء ریاضی به‌طور واقعی وجود دارند یا خیر و اینکه صرفاً تحلیل مفاهیم ریاضی نتایجی واقعی را ارائه می‌دهد، تفاوت‌هایی دارد که مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲. هستی‌شناسی دانش ریاضی

هستی‌شناسی ریاضیات به وجود و ماهیت اشیایی می‌پردازد که ریاضیات در مورد آن‌ها هستند. یک پدیده مهم در این زمینه، نیاز به ایجاد تعادل بین چالش‌های معرفتی و هستی‌شناختی است. برای مثال، در ابتدا، ساده‌ترین گزینه از نظر هستی‌شناختی، فرض وجود اشیاء ریاضی انتزاعی (مانند اعداد یا مجموعه‌ها) است که اصطلاحات ریاضی به آن‌ها اشاره می‌کنند. با این حال، توضیح اینکه چگونه ما، موجودات دنیوی، می‌توانیم از چنین اشیاء فضایی و زمانی آگاهی داشته باشیم، بسیار دشوار است. جایگزین صرفه‌جویانه هستی‌شناختی، انکار وجود چنین اشیایی است. اما پس از آن، باید توضیح داد که چه چیزی نظریه‌های ریاضی را درست (یا حداقل، صحیح می‌کند) و چگونه می‌توانیم حقایق ریاضی را بدانیم. مواضع مختلفی از روش‌های مختلف پرداختن به سؤالات این دو نوع ناشی می‌شود. بنابراین می‌توان گفت هستی‌شناسی دانش ریاضی به چیستی و حقیقت ریاضی می‌پردازد. اگر بخواهیم در مورد وجود اشیاء به پرسش‌های پاسخ‌پذیر بپردازیم، باید از قلمرو هستی فاصله بگیریم و به انتساب وجود برویم. اگر می‌خواهیم در هر زمینه هستی‌شناختی پیش برویم، باید خودمان را نه به آنچه واقعاً وجود دارد، بلکه به آنچه بهترین نظریه‌های ما می‌گویند وجود دارد، هدایت کنیم. اشیایی که توسط هر نظریه مفروض می‌شود، به معنای درونی در محدوده آن نظریه وجود دارند. در حین کار در یک نظریه، پرسش از واقعیت اشیاء یا حقیقت قوانین آن بی‌معنی است، مگر اینکه در این کار به فکر رها کردن نظریه و پذیرش نظریه دیگری باشیم [۱۷]. بنابراین پذیرش نظریه، مقدم بر تعهدات هستی‌شناختی است. به جای اینکه بپرسیم واقعاً چه نوع موجوداتی وجود دارند، تمرکز ما بر روی انواع اشیایی است که بهترین نظریه‌های ما به آن‌ها متعهد است.

کواچین معیاری را برای کمک به انتخاب بین نظریه‌های مختلف رقیب و گستره تعهدات هستی‌شناختی آن‌ها ارائه می‌کند. بنابراین، معیارهای تعیین هستی‌شناسی را می‌توان به دو ملاحظه کاهش داد:

۱. سادگی سیستم کلی.

۲. کاربرد آن در ارتباط با تجربه.

زمانی که به دنبال شکل‌دهی نظریه‌ها هستیم، آنچه می‌کوشیم این است که قطعات تجربه حسی را در ساده‌ترین سیستم ادغام کنیم. در تلاش‌هایمان برای سیستم‌سازی، ممکن است به‌طور شگفت‌انگیزی دریابیم که به‌خاطر سادگی و یکپارچگی کلی سیستم، یک نظریه باید وجود اشیاء اضافی و مشاهده نشده را بپذیرد. کواین تفاوت زیادی بین تعهد یک نظریه به اشیاء فیزیکی ماکروسکوپی و تعهد نظریه دیگر به موجودات انتزاعی نمی‌بیند. تفاوت بین این هستی‌شناسی‌ها فقط در درجه است. از نظر کواین، پرسش‌های مربوط به وجود در موارد متافیزیکی‌تر مانند اعداد و مجموعه‌ها به‌طور گسترده‌تری نظام‌مند هستند. بنابراین، اشیاء فیزیکی و اشیاء انتزاعی، زمانی که در یک نظریه فرض می‌شوند، تقریباً «یک پایه» دارند. حق آن‌ها برای قرار گرفتن به عنوان ابژه توسط یک نظریه به مشارکت آن‌ها در سادگی کلی سازمان‌زبانی یا مفهومی تجربه ما بستگی دارد. زمانی که نوبت به قضاوت در مورد نظریه‌ها می‌شود، کواین رویکردی جامع از لحاظ روش شناختی دارد. تئوری‌ها نه تنها باید با داده‌ها تناسب داشته باشند، بلکه ملاحظات عمل‌گرایانه نیز مجاز هستند به عنوان فضایل نظری در تعیین بهترین نظریه به حساب آیند [۱۷]. در رابطه با این سؤال که چه چیزی به عنوان حقیقت ریاضی باور می‌شود، ساختارگرایان^{□□}، دست‌کم از سوی بروئر^{□□} (۱۸۸۱-۱۹۶۶) ریاضی‌دان و فیلسوف هلندی، به خوبی از دلیل داویت هیلبرت^{□□} (۱۸۶۲-۱۹۴۳) ریاضی‌دان آلمانی برای رد قانون عدم تکرار حد وسط[□] و از رد نتیجه‌اش از پروژه ریاضی فرمالیستی او آشکار می‌شود. با این وجود و قبل از بیان جزئیات، لازم است دو نکته کلی در مورد تصور بروئر از براهین ریاضی و حقیقت آن بیان کنیم. هر دو نکته مهم‌ترین و توصیفی‌ترین این ایده‌ها است که برهان معیار صدق برای بروئر است [۸]

برای اینکه چیزی درست باشد، باید قابل اثبات باشد و در این بسط است که ساخت‌گرایی از سایر فلسفه‌های ریاضیات متمایز می‌شود. هنگامی که به این معنای قوی‌تر در نظر گرفته شود، مشاهده می‌شود که بروئر معتقد است که حقیقت مستلزم اثبات‌پذیری است [۱۶] دلیل بروئر برای حفظ این معیار، یعنی اثبات صدق از نظر تحلیلی از پروژه کلی شهودگرایی او خارج می‌شود. به دلیل رد قاطعانه فرض ریاضی افلاطونی (این فرض که اشیاء ریاضی به معنایی مشابه اشکال افلاطونی وجود دارند)، نظر بروئر این است که حقایق ریاضی به همان اندازه که برهان‌های ریاضی وجود دارند، تنها تا جایی وجود دارند که توسط ذهن ما ساخته شده‌اند. توسل به حس افلاطونی از یک شیء ریاضی که مستقل از ذهن وجود دارد و یک اثبات ریاضی که مدعی است به چیزی که به صورت ذهنی ساخته نشده است، برای بروئر آشکارا مزخرف است. دلیل این امر این است که وقتی انسان قابلیت ساخت ذهنی را جایگزین هستی کرد، دیگر معقول نیست که به چیزی فراتر از آن چیزی که داریم یا حداقل می‌توانیم با ذهن خود بسازیم، متوسل شویم. با این مفهوم است که رد قانون عدم تکرار حد وسط بروئر معقول می‌شود. طبق قانون، برای هر گزاره A ، $(A \vee \sim A)$ درست است. برای مثال خاصی از قانون، یک اثبات شرعی اثبات یکی از موارد منفصل است، اما حتی برای بروئر، اثبات قانون نیازی به اثبات یکی از موارد منفصل برای هر نمونه ندارد: در حقیقت، اگر می‌دانستیم که هر نمونه درست است، قانون ایجاد می‌شود؛ بنابراین می‌توان با توصیف یک روش ثابت کرد که برای هر نمونه معینی می‌توانیم یکی از موارد منفصل را ثابت کنیم. اما این چیزی نیست که ما در حال حاضر داریم. اگرچه می‌توانیم مطمئناً مواردی را تصور کنیم که این مسئله مشکل‌ساز نیست، مواردی که می‌توانیم اثباتی بسازیم که کدام طرف تفکیک به دست می‌آید. در واقع قانون عدم تکرار حد وسط در مواردی که کدام طرف عملگر به دست می‌آید، غیرقابل تصمیم‌گیری است و بسیار مشکل‌ساز می‌شود. برای در نظر گرفتن مثال آماده، می‌توانیم این سؤال را تصور کنیم که آیا γ ، که به عنوان گزاره‌ای تعریف می‌شود و توالی خاصی از ارقام در بسط اعشاری π ظاهر می‌شود، قابل اثبات یا رد است. علاوه بر این، برای هدف فعلی ما، اجازه دهید γ را به عنوان دنباله‌ای از ارقام تعریف کنیم که هنوز

مشخص نشده است که در بسط اعشاری π یافت شود. برای درک بهتر موضع برووئر، می‌توانیم این سؤال را بپرسیم:

از این ادعا که γ درست است یا خیر، چه باید بکنیم، یعنی اینکه $\gamma \sim \sqrt{2}$ ؟

در حالی که مطمئناً در ابتدا به نظر می‌رسد که این درست است که $\gamma \sim \sqrt{2}$ ، از درون شهودگرایی برووئر، در حقیقت γ نامشخص است تا جایی که بسط اعشاری π فقط تا یک نقطه معین ساخته شده است. برای درک نظر برووئر، ضروری است که بپذیریم که بسط اعشاری π فقط تا جایی وجود دارد که به صورت ذهنی توسط ما ساخته شده باشد. برای نتیجه‌گیری مثبت که $\gamma \sim$ درست است، باید دلیلی داشت که γ در بسط اعشاری π رخ نمی‌دهد. از دیدگاه برووئر، ما نمی‌توانیم γ را بر اساس چنین قطعه کوچکی از شواهد کل رد کنیم (توالی π که در حال حاضر ساخته‌ایم، دنباله‌ای که از آنجایی که بسط اعشاری را می‌دانیم (یعنی ثابت کرده‌ایم) بسط اعشاری به طور بالقوه نامتناهی و غیرتکرار بخش بی‌نهایت کوچکی از کل بسط اعشاری است) و نتوانسته‌اند از این فرض که $\gamma \sim$ تناقضی به دست آورند و همچنین نمی‌توان گفت که ما شواهدی داریم که نشان می‌دهد γ درست است. در نتیجه، ما نه می‌توانیم حقیقت γ را رد کنیم و نه نسبت به آن ادعا صحیح بودن، داشته باشیم و بنابراین ما فاقد دانش کافی برای گفتن اینکه تفکیک به یک طریق به دست می‌آید، نداریم. حتی بدتر از آن، «فرض کنیم که [در این مورد γ] درست یا نادرست در غیاب چنین دانشی به این معناست که بسط اعشاری π وجودی فراذهنی دارد» [۸]

توسعه ریاضیات مدرن از دهه ۱۹۳۰ نشان داد که مشکل رابطه جوهر و هستی باید با تکیه بر «وجود» به جای «ماهیت» حل شود. در مطالعات منطق ریاضی، آلبرت لوتمن^{۱۱} نشان می‌دهد که «تکامل درونی منطق» وجود دارد که نظریه جدیدی از روابط بین ذات و هستی ارائه می‌کند که به همان اندازه از منطق‌گرایی فرمالیست‌ها و ساخت‌گرایی شهودگرایان متفاوت است. او با تشریح ویژگی‌های اصلی این نظریه جدید در منطق، سعی کرد تا فلسفه‌ای از زن‌های ریاضی استخراج کند که دامنه آن بسیار فراتر از حوزه منطق است [۱۰] در واقع لوتمن با اشاره به «روش گسترده» هیلبرت که تأیید می‌کند، شروع می‌کند. فرمول یک نظریه رسمی شده برای «گزاره واقعی» یا «قابل تحقق» به شرطی که حوزه‌های منفرد (حداقل یکی) بتوانند تحت این فرمول وجود داشته باشند. به عبارت دیگر، این حوزه‌های فردی به عنوان مقادیری برای آرگومان‌های^{۱۲} توابع منطقی فرمول استفاده شوند. فرار ریاضی هیلبرت تلاش می‌کند تا سازگاری و کامل بودن سیستم‌های بدیهی ریاضیات رسمی را بر اساس روش بدیهی او اثبات کند. این مفهوم ساختاری سازگاری، اکنون می‌تواند با «مفهوم گسترده تحقق» در یک حوزه معین ترکیب شود.

با در نظر گرفتن یک دامنه معین که فقط شامل تعداد محدودی از افراد به عنوان مثال است، به نظر می‌آید این دو روش را می‌توان در این موقعیت از نظر حل این سؤال به هم متصل کرد که بدانیم آیا انتخابی از مقادیر متغیرهایی وجود دارد که به گزاره به دست آمده اجازه می‌دهد یا خیر. با ترکیب همه بدیهیات سیستم پیشنهادی که باید تأیید شود. با آزمودن تمام ترکیبات ممکن و اثبات انتخاب بر حسب «قانون عدم تکرار حد وسط» (به این معنی که اگر ربط بدیهیات ابطال پذیر باشد، بنابراین نفی آن ابطال پذیر است و وضعیتی در وسط وجود ندارد) در متناهی، ما می‌توانیم تأیید کنیم که آنچه این انتخاب که نظام بدیهیات را آشکار می‌کند، چیزی نیست جز قوام سیستم. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بین ساختار غیر متضاد یک سیستم بدیهیات و وجود حوزه‌ای حاوی تعدادی افراد معین و به‌گونه‌ای که سیستم در این حوزه قابل تحقق است، معادلی در حد محدود وجود دارد [۱۰]

لوتمن نشان می‌دهد که این بینش حاوی «تطفه» نظریه جدیدی از روابط جوهر و هستی است: «دیگر این موضوع نیست که بدانیم آیا این تعریف مستلزم وجود است یا خیر، بلکه باید بررسی کرد که آیا ساختار یک نظام بدیهیات حوزه‌ای از افراد را پدید می‌آورند که روابط تعریف‌شده توسط بدیهیات را در میان خود پشتیبانی می‌کنند.» [۱۰] به

این معنا، حوزه فردی موجود که توسط نظام بدیهیات پدید آمده است، در واقع حوزه‌ای است که نظام بدیهیات در آن تحقق می‌یابد. این فرآیند تحقق همان چیزی است که لوتمن آن را «پیدایش» می‌نامد. حوزه تحقق یافته «تفسیری» از این سیستم بدیهیات است. با طرح چنین نظریه جدیدی از روابط ذات و وجود، این امکان به وجود آمد که قوام و تکمیل نظام بدیهیات را از حیث اثبات وجود حوزه‌ها یا تعبیری که این نظام را تحقق می‌بخشد، اثبات کرد.

پل بناسراف^[۱] در مقاله خود «حقیقت ریاضی»^[۲] به تنش ظاهری اشاره می‌کند که برای هر تلاشی برای یک نظریه کافی از صدق ریاضی، یعنی نماینده‌ای در یک معناشناسی کافی برای گزاره‌های ریاضی ایجاد می‌شود [۲]. وقتی مقصود، توضیحی از صدق برای برخی از حوزه‌های گفتمان باشد، آن گفتمان دارای یک معناشناسی استاندارد و الهام‌گرفته از آلفرد تارسکی^[۳] برای گزاره‌های معمولی مفرد و کمی است، در این شرایط مساوی بودن سایر چیزها یک محدودیت قابل قبول برای آن روایت از حقیقت است. در غیر این صورت، به سختی می‌توان دید که چگونه مفهومی که توضیح داده می‌شود یک مفهوم حقیقت است. منظور بناسراف را می‌توان با الزام مشابهی در مورد حقیقت، یعنی «کنوانسیون T» خود تارسکی (۱۹۴۴) نشان داد. طبق قرارداد T هر نظریه قابل اجرا صدق برای برخی از جملات S باید شرایط زیر را برآورده کند.

برای هر جمله p در $p : S$ درست است اگر p «T».

برای مثال، اگر می‌خواهیم توضیحی درباره درستی اظهارات درباره سگ من بدهیم، این روایت باید مستلزم این باشد که «سگ کوچک است» و درستی آن در صورتی که سگ کوچک باشد، به عنوان یک حقیقت تلقی می‌شود. این به طور کلی به عنوان یک محدودیت قابل قبول برای هر گونه گزارش از حقیقت در نظر گرفته می‌شود.

بناسراف فکر می‌کند که محدودیت دیگر بر نظریه صدق این است که جملات مربوطه دارای معنایی «استاندارد» هستند. این بدان معناست که معنایی که ایده ما از صدق ریاضی را توضیح می‌دهد باید معنایی معمول برای گزاره‌های معمولی و غیرریاضی باشد، به عنوان مثال، گزاره‌های ریاضی باید مانند سایر جملات نشان‌دهنده اشیاء معمولی از شرایط صدق برخوردار شوند [۲]. اما در معناشناسی معمولی و الهام‌گرفته از تارسکی، نام‌ها به اشیاء اشاره می‌کنند، کمیت‌کننده‌ها در دامنه‌ای از موجودیت‌ها قرار دارند، و محمول‌ها ویژگی‌ها یا روابطی را نشان می‌دهند که اشیاء یا موجودیت‌ها می‌توانند داشته باشند [۱۸]. بنابراین معناشناسی استاندارد یک قرائت افلاطونی به گزاره‌های ریاضی می‌دهد.

بناسراف از این معضل نتیجه می‌گیرد که اگر معنایی «یکنواخت» یا «هم‌جنس»^[۴] را برای گزاره‌های ریاضی و غیرریاضی بپذیریم، به نظر می‌رسد که جملات ریاضی را با تعهد به هستی‌شناسی می‌پوشانیم و این دریافت حقیقت آن‌ها را غیرممکن می‌کند [۲] اگرچه بناسراف چالش خود را به طور خاص بر اساس نظریه علی معرفت طرح می‌کند، اما اکثر فیلسوفان از این فرض استدلال او فراتر رفته‌اند [۱۲]

با این وجود پذیرش این ماشین خاص برای ادامه استدلال او غیرضروری است. ما می‌توانیم سؤال مشابهی را به این صورت مطرح کنیم: چگونه می‌توانیم به طور قابل قبولی بیشتر مردم را که دانش قابل اعتمادی از موجودیت‌هایی دارند که به طور علی از جهان فیزیکی جدا هستند، توضیح دهیم؟ [۲].

بناسراف استدلال می‌کند که ارضای این شرط مستلزم معناشناسی است که بین گفتمان ریاضی و غیرریاضی یکنواخت باشد؛ در این شرایط یک راه دیگر برای قرار دادن این شرط اولیه این است که بخواهیم هر نظریه صدق ریاضی با یک نظریه کلی صدق مطابقت داشته باشد و گواهی می‌دهد، ویژگی جملاتی که گزارش آن را «حقیقت» می‌نامد، در واقع صدق است. به نظر بناسراف این کار را می‌توان تنها بر اساس برخی نظریه‌های عمومی حداقل برای

کل زبان انجام داد. شاید کاربرد این شرط در مورد حاضر فقط به این ادعا باشد که دستگاه معنایی ریاضیات به عنوان بخشی از زبان طبیعی که در آن انجام می‌شود، دیده شود، بنابراین هر گونه گزارش معنایی که ما تمایل داریم از نام‌ها یا به طور کلی‌تر، اصطلاحات مفرد، محمول‌ها و کمیت‌ها در زبان مادری ارائه دهیم، شامل آن موارد می‌شود.

بخش‌هایی از زبان مادری که ما آن‌ها را به عنوان ریاضی طبقه‌بندی می‌کنیم [۲]

اگر معیار بناسراف برای معناشناسی کافی برای ریاضیات این باشد که بین ریاضیات و همه گفتمان‌های غیرریاضی شرایطی یکنواخت وجود داشته باشد، پس مسلماً این امر برای هر کسی، چه افلاطونی‌گرا یا غیر آن، غیرممکن است، اگر فقط به این دلیل که چیزی به نام «معناشناسی» برای همه گزاره‌های مفرد و کمی غیر ریاضی وجود ندارد (ارجاع به Burgess). [۳]

در واقع هستی‌شناسی ریاضی با تمامی نگرش‌هایش در نهایت درک آن را به واقعیت گره می‌زند و نسبت آن را با جهان پیرامون خود می‌سنجد تا بتواند به حقیقت هستی ریاضی دست یابد. بنابراین برای درک بهتر این هستی‌شناسی نیاز است ادعای فیلسوفان در رابطه با واقعیت را از ریاضی مورد مطالعه قرار دهیم.

۳. ریاضیات واقعی

از افلاطون‌گرایی، ساخت‌گرایی تا اندیشه‌های فردی فیلسوفان در هستی‌شناسی ریاضیات در نهایت این دیدگاه که ریاضیات در نسبت با واقعیت چگونه عمل می‌کند، اهمیت زیادی می‌یابد و با این دیدگاه است که ریاضیات فعلیت‌گرا^{۱۱۱۱} پدید می‌آید. ریاضیات فعلیت‌گرا از این جهت متفاوت است که صراحتاً جایگزینی واقع‌گرایانه برای افلاطونیسم ریاضی را تأیید می‌کند که همچنین بر اساس معناشناسی ارجاعی بنا شده است. از این نظر، بزرگترین فایده گزارش حاضر این است که فعلیت‌گرایی می‌تواند عناصر مهم و مطلوب را از هر دو اردوگاه رئالیستی و ضد رئالیستی به هم پیوند دهد. اینکه می‌تواند این دو را ترکیب کند و به چالش بناسراف در ارائه همزمان یک ارجاع پاسخ دهد. معناشناسی که به موازات بقیه زبان است و در عین حال امکان معرفت‌شناسی رضایت بخشی را فراهم می‌کند. فعلیت‌گرایی این کار را با پرهیز از مسائل متافیزیکی و معرفت‌شناختی افلاطونی انجام می‌دهد و همزمان از نیاز ساخت‌گرایی به نظریه معنایی غیر ارجاعی جایگزین اجتناب می‌کند.

ویژگی تعیین‌کننده ریاضیات فعل‌گرا، اولویت دادن به امر بالفعل (در اینجا به عنوان امر فیزیکی درک می‌شود) و این مفهوم متعاقب آن است که ادعای واقعی یا موجود بودن (وضعیت هستی‌شناختی مثبت) را می‌توان تنها به ارجاعات ریاضی که بالفعل یا فیزیکی هستند، تعمیم داد. به این ترتیب، فعلیت‌گرایی به عنوان یک فلسفه ریاضیات، بر خلاف ساخت‌گرایی، به مراتب بیشتر به هستی‌شناسی واقعی توجه دارد، زیرا هدف آن ارائه یک معناشناسی ارجاعی واقع‌گرایانه و همچنین پاسخی مثبت به پرسش هستی‌شناختی است [۱۴]. از سوی دیگر، مانند ساخت‌گرایی، نظریه فعلیت‌گرایانه نیز کاملاً با موضع افلاطونیسم در مورد اشکال غیرمادی موجود و مستقل از ذهن مخالف است. اگرچه آن‌ها را رد می‌کند، بدون اینکه نیازی به این داشته باشد که اشیاء ریاضی فقط به معنای ضعیف شده مناسب برای «اشیاء» ساخته شده ذهنی وجود دارند. برخلاف این‌ها، یک فلسفه ریاضیات واقعی‌گرا بر حس دقیق‌تری از «وجود» پافشاری می‌کند و فقط وضعیت هستی‌شناختی مثبت «موجود» را به آنچه بالفعل یا فیزیکی است، بسط می‌دهد. با وجود پرسش هستی‌شناختی، نظریه واقع‌گرایانه با ساخت‌گرایی در رابطه با جنبه‌های پیچیده‌تر ریاضیات، مانند نظریه مجموعه‌ها، که به عنوان بسط‌های ساخته‌شده از آنچه به‌طور فیزیکی و به طور واقعی ارائه می‌شود،

همدلی دارد [۱۵]

صدق ادعاهای اساسی ریاضی را می‌توان به توصیفات واقعی، اغلب به شکل تعمیم، که با حقایق مربوط به جهان واقعی مطابقت دارد، تقلیل داد. با این حال، برای فعلیت‌گرایی، مشکل باقیمانده دیگری وجود دارد که این است:

ادعاهای قلمروهای پیچیده‌تر ریاضی، آنهایی که مستقیماً به جهان واقعی قابل تقلیل نیستند، از چه نظر درست هستند؟ برای توضیح این چالش، فعلیت‌گرایی نظریه‌ای مرکب از صدق را مطرح می‌کند که به موجب آن معتقد است دو «نوع» متفاوت از حقیقت ریاضی وجود دارد. اولین مورد، حقیقت واقعی^[۱۱]، در مواردی رخ می‌دهد که گزاره‌ای با توصیف آن به حالتی که از نظر فیزیکی مصداق پیدا می‌کند، مطابقت دارد؛ وقتی گزاره‌ای اطلاعات یا دانشی در مورد دنیای خارج به ما می‌دهد. دومین مورد، حقیقت صوری^[۱۲]، از طریق کاربرد صحیح یا منطبق قواعد، بدیهیات، یا شیوه یک سیستم نمادین صوری برای ارجاع‌های راحت رخ می‌دهد. در حالی که حقایق صوری نیازی به گزارشی واقع‌گرایانه از مطابقت ندارند (از آنجایی که آن‌ها مدعی ارجاع به دنیای فیزیکی بیرونی نیستند)، به نظر می‌رسد که حقایق واقعی مستلزم بیان و دفاع از این است که چگونه می‌توان گفت که حس یک گزاره ریاضی با برخی از وضعیت‌های واقعی یا فیزیکی مطابقت دارد^[۱۴]

به عبارت دیگر، فعل‌گرایی معتقد نیست که مطابقت بین یک گزاره و واقعیت، خود بالفعل یا فیزیکی است، بلکه زمانی که یک گزاره توصیف دقیقی از برخی وضعیت‌های خارجی ارائه می‌دهد که به صورت فیزیکی تجسم یافته است و با واقعیت تطبیق دارد؛ این به معنای آن است که یک گزاره ریاضی وقتی حقیقتی واقعی را بیان می‌کند «واقع‌گرایانه» است.

از سوی دیگر لوتمن معتقد است که در درک انسان از واقعیت، ریاضیات نقشی بی‌بدیل، یعنی نقش میانجی و مدل ضروری ایفا می‌کند: «ریاضیات با توجه به سایر حوزه‌های تجسم، واقعیت فیزیکی، واقعیت اجتماعی، واقعیت انسانی، نقش الگویی که در آن نحوه به وجود آمدن اشیاء مشاهده می‌شود را ایفا می‌کند»^[۱۰]. بنابراین برای حمایت از این اعتقاد، نمایش گذر از واقعیت ریاضی به واقعیت فیزیکی ضروری است. ریاضی باید خواندگانش را متقاعد کند که چه هماهنگی عمیقی بین ساختار شماتیک و تحقق مادی وجود دارد. مفهوم واقعی که فراتر از قلمرو ریاضیات است، باید بیشتر توضیح داده شود. در تحقیقات نهایی لوتمن در مورد مسائل فیزیکی ارائه شده در ریاضیات، ایده‌ها و واقعیت فیزیکی، می‌توان تلاش او را برای نشان دادن این گذر از دنیای ریاضی به دنیای فیزیکی، از ساختارهای ریاضی انتزاعی به جهان انضمامی مشاهده کرد. این وظیفه اما به دلیل مرگ ناگهانی او در سال ۱۹۴۴ متوقف شد. نمایش لوتمن از گذر از ریاضیات به فیزیک مبتنی بر یک قیاس است: فرآیند اتصال واقعیت ریاضی و واقعیت فیزیکی که پیوند ایده‌ها و نظریه‌های ریاضی را قیاس می‌کند. در اینجا، ریاضیات طرحواره‌های ساختاری را ارائه می‌دهد، در حالی که فیزیک تحقق مادی این طرحواره‌های ساختاری را انجام می‌دهد. او مخالف هر موضعی در فلسفه فیزیک است که یافته‌های تجربی واقعیت و نظریه ریاضی را که آن‌ها را به یکدیگر مرتبط می‌کند، از هم جدا سازد، مثلاً از نئوپوزیتیویسم^[۱۳] حلقه وین تا «ایدئالیسم فیزیکدانان متافیزیک انگلیسی» مانند آرتور ادینگتون^[۱۴] (۱۸۸۲-۱۹۴۴). او اشاره می‌کند که هر نقدی بر علم معاصر نشان‌دهنده ضعف فلسفی چنین نگرشی و عدم امکان در نظر گرفتن یک نتیجه تجربی خارج از چارچوب ریاضی است که در آن معنا می‌یابد^[۱۰]. همانند واقعیت ذاتی ریاضیات که شامل نظریه‌های ریاضی است، واقعیت فیزیکی در سطح یک تجربه مجزا دخالت نمی‌کند، بلکه در سطحی که ممکن است یک سیستم فیزیکی نامیده شود، دخالت می‌کند. این سیستم فیزیکی در مطالعات مجموعه پدیده‌های فیزیکی که در یک فرآیند خاص رخ می‌دهد، دیدگاهی جهانی ارائه می‌دهد. در رابطه با کمیت‌هایی که در این فرآیند نقش دارند، می‌توان یک سری اندازه‌گیری را انجام داد. در رابطه با این اندازه‌گیری‌ها، لوتمن نقش بی‌بدیلی را که ریاضیات در فیزیک ایفا می‌کند، می‌بیند؛ در فرض او این امکان به وجود می‌آید که یافته یک اندازه‌گیری منفرد مقدم بر هر توضیح ریاضی است، اما هر جمله یا رابطه‌ای که دو اندازه‌گیری با آن هماهنگ می‌شوند، نشان می‌دهد که عبارت به دست آمده قبلاً در ریاضیات قرار داشته است^[۱۰]

همانطور که حرکت یک نظریه ریاضی در عین حال طرحواره‌ای منطقی از روابط بین ایده‌ها بود، توصیف وضعیت یک سیستم در هر لحظه یا تکامل این سیستم در طول زمان، به این معناست که بزرگی این سیستم طبق قانون ساختاری ریاضیات قابل نظم است. بنابراین واقعیت فیزیکی نسبت به این ریاضیاتی که آن را توصیف می‌کند، بی‌تفاوت نیست [۱۰] به عبارت دیگر، ریاضیات یک واسطه یا «زبان» ضروری در علوم فیزیکی است. به عنوان مثال، یک فیزیکدان مدرن باید به محض طرح سوال اصلی پروژه تحقیقاتی، یک نظریه ریاضی ایجاد کند. به عنوان مثال دیگر، مطالعه برخی پدیده‌های فیزیکی مربوط به شرایط وجود راه‌حل‌های معادله دیفرانسیل یا معادله دیفرانسیل جزئی، طیف گسترده‌ای از پدیده‌ها و فرآیندهای فیزیکی مانند تعادل گرمایی و انتشار نور را قادر می‌سازد تا توصیف شوند و در طرحواره قطعی اداره می‌شود، بنابراین می‌توان به حدود (حداکثر و حداقل) که این پدیده‌ها و فرآیندهای فیزیکی را تجویز می‌کرد، دست یافت [۱۰].

توسعه فیزیک مدرن و دیدگاه ترکیبی آن، موضع لوتمن را تأیید کرده و پذیرفته است که اشکال ریاضی و مواد فیزیکی در هر سیستمی می‌توانند با یک تعیین همزمان و متقابل متحد شوند. برای تحقیقات فیزیکی، حل مسئله فیزیک به معنای کشف و فرمول بندی ساختاری است که با توجه به موضوعی که با روابط آن جان می‌بخشد، سازماندهی می‌کند. در این روش، «این ساختار ریاضی با سیستم فیزیکی اندازه‌گیری‌های آزمایشی انجام‌شده یا ممکن، منطبق است. ساختارهای ریاضی ایده‌هایی هستند که بر واقعیت‌های فیزیکی حاکم هستند، در حالی که واقعیت‌های فیزیکی در مشارکت آن‌ها در این ایده‌ها قرار دارند. ماهیت امر واقعی، ساختار آن و شرایط پیدایش آن تنها با صعود دوباره به ایده‌هایی که پیوندهای آن‌ها توسط علم تجسم یافته است، قابل شناخت است [۱۰] به طور خلاصه، لوتمن گذر از واقعیت ریاضی به واقعیت فیزیکی را با وارد کردن «نتیجه افلاطونی» به فلسفه فیزیک نشان می‌دهد، جایی که افلاطون‌یسم او همچنان زیربنای این اثبات است.

چه نگرش دوگانه از واقعیت در فعلیت‌گراها و چه نگرش وحدت‌پذیر لوتمن، هر دو این واقعیت را که این هستی‌شناسی بنا دارد، ریاضیات را بر مبنای واقعیت پایدار سازد و یا بالعکس واقعیت را بر مبنای ریاضیات تفسیر کند، تأیید می‌کنند و هر یک خود را موفق می‌دانند. اما مسئله اینجاست که محاسبات ریاضی گاهی دچار خطاهایی می‌شود، بنابراین واکنش این نگرش واقع‌گرایانه به ریاضیات بایستی چه باشد؟ آیا ریاضیات هستی‌شناسی خود را با درک واقعی بر مبنای خطاپذیری ارائه دهد و یا آنکه این خطاها را نادیده بگیرد و یا آن‌ها را رد کند؟ پاسخ به این پرسش‌ها نیازمند درک لازم و کافی از مفهوم خطاپذیری ریاضیات است.

۴. خطاپذیری ریاضیات

خطاپذیری به معنای «قادر به اشتباه کردن یا اشتباه کردن» است (Oxford, n.d). همچنین این عبارت دو مفهوم «خطای انسانی» و «فریفتن» را در بر می‌گیرد. این اصطلاح در اواخر قرن نوزدهم توسط فیلسوف آمریکایی چارلز سندرز پیرس به عنوان پاسخی به بنیادگرایی ابداع شد. نظریه پردازان، به تبعیت از فیلسوف اتریشی-بریتانیایی کارل پوپر، به خطاپذیری به عنوان این تصور اشاره کرده‌اند که دانش ممکن است نادرست باشد [۱].

ریاضیات توسط انسان ساخته شده است و دارای تمام خطاپذیری و عدم قطعیتی است که انسان نیز به آن دچار است و همین دلالت کافی است. ریاضیات خارج از ذهن انسان وجود ندارد و ویژگی‌های خود را از ذهن افرادی که آن را خلق کرده‌اند، می‌گیرد. از آنجایی که ریاضیات توسط انسان ساخته می‌شود و فقط در ذهن انسان وجود دارد، باید در ذهن هر فردی که آن را یاد می‌گیرد، ساخته یا بازسازی شود. از این نظر، ریاضیات را تنها با خلق شدن می‌توان آموخت [۱۹].

خطاپذیری به نوعی جریانی است که در مقابل اثبات‌گرایی خود را بروز می‌دهد. در آغاز قرن بیستم، مفهوم اثبات ریاضی ابتدا با «استنتاج از بدیهیات» برابر شد؛ در واقع صرفاً فرض بر این بود که دانش ریاضی باید یک امر اثباتی باشد، یعنی استنتاج از بدیهیات. پس تنها سوال این بود که چگونه بدیهیات و قواعد استنتاج سیستم‌های بدیهی مربوطه را می‌توان توجیه کرد. بنابراین، معرفت‌شناسی کشف فردی به سادگی از دستور کار خارج شد. هر گونه نگرانی در مورد تفکر واقعی در ریاضیات نیز همین‌طور است [۷]. نتیجه چنین رویکردی حقایق تغییرناپذیر و روش‌های انکارناپذیر را به وجود می‌آورد، در حالی که با رویکرد خطاناپذیری و استنتاج مفاهیم، ریاضیات توسعه نمی‌یابند، بنابراین حقایق قبلی با عدم کشف حقیقتی جدید، بدون تغییر باقی می‌مانند. در نتیجه ریاضیات توسط یک انباشتی از حقایق ریاضی و به عنوان ساختاری غیرقابل انعطاف و پیشینی ارائه می‌شود که با ماهیت دانش و علم سازگاری ندارد [۴].

خطاپذیری یک فلسفه ساخت‌گرایانه است که استدلال می‌کند، مردم دانش را از جمله دانش ریاضی را در ذهن خود می‌سازند. بنابراین، تمام دانش ریاضی محصول خلقت انسان و محصول هوش آن‌ها است. خطاپذیری رشد اجتماعی-فرهنگی و تاریخی ریاضیات را در تبیین ماهیت ریاضیات مهم می‌داند. خطاپذیری استدلال می‌کند که دانش به شواهد کامل نیاز ندارد. خطاپذیری توسعه ریاضیات را ناشی از تشخیص این موضوع می‌داند که برخی از نتایج طولانی مدت در ریاضیات دارای خطا هستند [۶] اولین بحران در ریاضیات کشف فیثاغورث است که $\sqrt{2}$ عقلانی نیست. این بحران به وضوح نشان داد که فرمول‌های ریاضی حتی برای بااستعدادترین و تواناترین ریاضیدانان مانند فیثاغورثی‌ها مستعد اشتباهات و تصورات غلط هستند. همچنین فرض اقلیدس مبنی بر اینکه کوتاهترین فاصله بین هر دو نقطه یک خط مستقیم است توسط لوبافسکی رد شد. در حالی که برای قرن‌ها ریاضیدانان این دیدگاه را اصلاح‌ناپذیر و غیرقابل تردید می‌دانستند تا اینکه لوبافسکی هندسه ماه را معرفی کرد. سپس اصل اقلیدس ناگهان آشکار شد. به طور مشابه، قضایای گودل ثابت کردند که ریاضیات از نظر هستی‌شناختی اصلاح‌ناپذیر نیستند و راسل (۱۹۱۹) نشان داد که حقایق ریاضی اساساً در بحران سوم ریاضیات متناقض هستند [۱۳]

در واقع خطاپذیری یک فرض عملی فیلسوفان، در تمرین ریاضی بوده است و این به مفهوم درک ریاضی در واقعیت و به نوعی عمل است. ایمره لاکاتوش [۱۹۶۳] الهام بخش بسیاری از تحقیقات مبتنی بر تمرین بود. او با در نظر گرفتن تاریخ ریاضیات به عنوان نقطه شروع، گزارشی شبه تجربی از توسعه ریاضیات بیان کرد. تحقیقات میان رشته‌ای همچنین به ترسیم تصویری از ریاضیات که توسط افراد انسانی و افراد خطاپذیر انجام می‌شود، کمک کرده است [۵]. لاکاتوش براهین ریاضی را در آنچه که پوپرین «خطاپذیری انتقادی» نامید، پیاده کرد. خطاپذیری ریاضی لاکاتوش این دیدگاه کلی است که همه قضایای ریاضی خطاپذیر هستند [۹]

حله مسئله خطاپذیری به طور کامل، از طریق اثبات‌گرایی و یا هر روش دیگری، تقریباً امکان‌ناپذیر است. دی تفولی (۲۰۲۱) در مقاله‌ی خود «مقدمه‌ای برای یک حساب خطاپذیر از ریاضیات» اشتراک‌پذیری در ادراک مباحث ریاضی را مطرح می‌کند و آن را تا حدی راه‌گشا می‌داند. اشتراک‌پذیر بودن، برخلاف قانع‌کننده بودن، مستلزم این نیست که یک دلیل باید توسط یک ذهن فردی قابل درک باشد. برای برخی از شواهد، جامعه‌ای از ذهن‌ها، که هر کدام بر روی بخشی کار می‌کنند، ممکن است دلیلی را درک کنند و همین کافی است، حتی اگر هیچ فردی کل را درک نکند. برای مثال، شواهد طبقه‌بندی گروه‌های ساده محدود بسیار زیاد است و به عوامل متعددی نیاز دارد تا آن‌ها را به طور کامل بررسی کنند. وجود براهین بسیار طولانی و پیچیده، پدیده‌ای است که در ریاضیات معاصر بسیار رایج‌تر است و به‌طوری‌که دیگر نمی‌توان آن‌ها را توسط هر تحلیل قابل قبولی از اثبات نادیده گرفت [۵] ایده اشتراک‌پذیری

بر خلاف نگرش لاکاتوش سمت و سویی به مفهوم اثبات دارد. البته ما نگزیر از تکیه بر این رویه برای درک و استفاده از ابزار ریاضی با حفظ خطاپذیری آن هستیم.

در سوی دیگر پذیرش خطاپذیری به معنای تمام و کمال آن است؛ به گفته‌ی لاکاتوش، دلیلی وجود ندارد، صادقانه خطاپذیری ریاضی را نپذیریم و سعی نکنیم از شأن دانش خطاپذیر در برابر شکاکیت بدبینانه دفاع کنیم، نه اینکه خودمان را فریب دهیم که می‌توانیم به طور نامرئی نقص‌هایی را در تار و پود شهودهای «نهایی» درباره ریاضی ترمیم کنیم [۹]. در همین راستا اسکار وایلد^[۱۰] بیان می‌کند که «این تمایل است که «محصولات فکری» خود را بر اساس ارزش صدق، اثبات‌پذیری و تأییدپذیری آن‌ها قضاوت کنیم، آن‌ها را به الگوهای سخت استدلال علمی وادار کنیم و در نهایت، آن‌ها را «حقیقت مطلق» اعلام کنیم یا دلایل اشتباه بودن آنها را رد کنیم» [۲۰]. بنابراین، ایده‌های پر جنب و جوش تحت یک فرآیند شیء شدن قرار می‌گیرند، یعنی به واقعیت‌های متحجر و امر عادی تغییر ناپذیر تبدیل می‌شوند. این منجر به انتقاد بیشتر در کار وایلد می‌شود. مکان‌های عام توسط دیدگاه‌های اکثریت تشکیل می‌شوند. اغلب گفته می‌شود که این دیدگاه‌ها درست هستند، زیرا بسیاری از مردم به آن‌ها اعتقاد دارند. وایلد همچنین این موضوع را برمی‌گرداند: «حقیقت، وقتی واقعیت ندارد که بیش از یک نفر به آن باور داشته باشند» [۲۰] درک وایلد کاملاً در مقابل تأییدپذیری یا در واقع همان اشتراک‌پذیری قرار می‌گیرد. در ریاضی نیز اینکه اجماع به اثبات یک ایده رأی دهند نمی‌تواند دال بر خطاناپذیری آن ایده باشد، حتی اگر آن را بارها مورد محاسبه قرار داده باشند، ممکن است زمانی فردی از راه برسد و خطاپذیری آن را اثبات کند که نمونه‌های آن مورد اشاره قرار گرفتند. در واقع خطاپذیری حاصل رابطه‌ی میان هستی‌شناسی و واقعیت است، زمانی که درک هستی‌شناسی از ریاضیات می‌خواهد خود را به سرمنزل مقصود برساند، به ریشه‌های ریاضی می‌نگرد و در آن شکی ندارد که انسان خود ریاضیات را به وجود آورده است. بنابراین هستی‌شناسی آن بایستی با واقعیت انسانی درک و تفسیر شود. از سویی واقعیت انسانی توأمان با خطاپذیری است و این ویژگی خطاپذیری دانش انسانی و در واقع خطاپذیری دانش ریاضی را انکارناپذیر می‌کند.

۵. نتایج

مطالعات نشان داد که هستی‌شناسی دانش ریاضی می‌تواند نگرش‌های مختلفی را شامل شود. کواین تفاوتی میان اشیاء انتزاعی و فیزیکی نمی‌بیند و از طرفی در نگرش به ریاضیات واقعی، لوتمن نیز اشکال انتزاعی ریاضی را با مواد فیزیکی متحد می‌داند. هر چند تفاوتی در این دو دیدگاه وجود دارد که در آن لوتمن، ریاضی را به عبارتی به مثابه زبانی برای درک آسان‌تر فیزیک می‌داند، اما نمی‌توان تلاش او برای وحدت هستی‌شناختی از ریاضیات نادیده گرفت. برووئر با رد قانون عدم تکرار حد وسط، میانه مفهوم اثباتی را در نظر می‌گیرد و برای او حقایق ریاضی تا جایی وجود دارند که توسط ذهن ما ساخته شده‌اند. چرخش ریاضیات مدرن از ماهیت به وجود نقطه‌ی عطفی در نگرش به هستی‌شناسی ریاضی محسوب می‌شود و نوعی هدف‌گذاری است که پیشرفت‌های بعدی ریاضیات را موجب می‌شود. در پی همین نگرش است که ریاضیات واقعی و یا دیدگاه واقع‌گرایی به ریاضیات مورد توجه قرار می‌گیرد. برای دست‌یابی به دیدگاهی واقعی از هستی‌شناسی ریاضی بناسراف نیز با نوعی یکسان‌سازی میان گفتمان ریاضی و همه‌ی گفتمان‌های غیر ریاضی دیدگاهی معناشناختی را مطرح می‌سازد که اغلب بر جنبه‌ای قراردادی تأکید می‌کند، به همین جهت جنبه‌ی انتزاعی ریاضی را بیشتر مورد توجه قرار می‌دهد که البته نسبتی با جنبه‌ی زبان‌گونه لوتمن دارد. بنابراین این دیدگاه علی‌رغم ادعای خود در نسبت عملگرایی خود با واقعیت فاصله گرفته‌اند و نیاز است نوعی عملگرایی در آن‌ها جنبه واقعی بودن ریاضی را تقویت کند.

ریاضیات فعلیت‌گرا یکی دیگر از نگرش‌های هستی‌شناختی بود که البته در دل دیدگاه واقع‌گرایی ریاضی پدید آمده است. اولویت دادن به امل بالفعل به عنوان امر فیزیکی واقعیت ریاضی بهتر دقیق‌تر مطرح می‌کند. هر چند فعلیت‌گرایی حقیقت ریاضی را در نهایت به دو نوع حقیقت واقع (بیان‌گر جنبه فیزیکی) و حقیقت صوری (بیان‌گر جنبه انتزاعی) تقسیم می‌کند و در برخی مواقع آن‌ها را بر یکدیگر منطبق می‌داند. این نگرش نیز به نظر چندان تفاوتی با نگرش لوتمان و کواین ندارد و تعاریف از جنبه‌های مختلف آن به یک مقصد راه می‌یابند و آن این است که جنبه‌های انتزاعی و واقعی ریاضیات صرفاً امکان این را دارند که در برخی مواقع جنبه واقعی یا فیزیکی به خود بگیرند و در عین ماهیت انتزاعی دانش ریاضی در مواقع دیگر پا بر جا است.

اما نکته قابل توجه، زمانی است که ریاضیات در قلمرو واقعیت قرار می‌گیرد و نسبت واقعی در شرایط مختلف دچار خطا می‌شوند و اثبات یقینی ریاضی را زیر سوال می‌برند. در چنین شرایطی است که مفهوم خطاپذیری به وجود می‌آید و سپس با پیگیری آن به مفاهیم انتزاعی نیز وارد می‌شود. به نظر می‌آید مفهوم خطاپذیری به دلیل همین تلاقی واقعیت و انتزاع در ریاضیات است که خود را بروز می‌دهد و در وجود مستمر و عمل بالفعل خود را اثبات می‌رساند تا درک اثباتی و پایدار ریاضی را مخدوش کند. در واقع خطاپذیری ریاضیات مسئله‌ای نیست که بتوان آن را حل کرد بلکه بایستی آن را به عنوان یک ویژگی پذیرفت چرا که باعث پیشرفت در ریاضیات و نظریات جدید در این حوزه می‌شود. بنابراین جایگاه خطاپذیری می‌تواند به عنوان عنصر محرک در پیشرفت ریاضیات و قلب تپنده‌ی آن تلقی گردد و موجودیت و هستی ریاضی را به طور مستمر زنده نگاه دارد.

فهرست منابع

- [1]Anastas, Jeane W. (1999). *Research Design for Social Work and the Human Services*. Columbia University Press
- [2]Benacerraf, P. (1983) "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*. 70: 403–420.
- [3]Boolos, G. (1998) *Logic, Logic, and Logic*, Richard Jeffrey (ed.), Cambridge, MA: Harvard University Press.
- [4]Confrey, J. (1981) "Conceptual Change Analysis: Implications for Mathematics and Curriculum" *Curriculum Inquiry*. 11, 5: 243–257.
- [5]De Toffoli, S. (2021). "Groundwork for a Fallibilist Account of Mathematics" *The Philosophical Quarterly* Vol. 71, No.4: 823-844.
- [6]Eves, H. (1990). *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Saunders.
- [7]Giaquinto, M. (2007) *Visual Thinking in Mathematics*. Oxford: OUP.
- [8]Hansen, C. S. (2016) "Brouwer's Conception of Truth." *Philosophia Mathematica*. 24.3: 379-400.
- [9]Lakatos, I. (1978). *Mathematics, Science and Epistemology (Philosophical Papers Vol 2)*, Cambridge, Cambridge University Press.
- [10]Lautmen, A. (2011). *Mathematics, Ideas and the Physical Real*. Trans. Simon Duffy. London, New York: Continuum
- [11]Linnebo, Ø. (2017) *Philosophy of Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [12]Maddy, P. (1996) "The Legacy of Mathematical Truth", In Adam Morton & Stephen P. Stich (eds.), *Benacerraf and His Critics*. Blackwell. 60-72.
- [13]Makonye, J. P. (2013). "Learners' Philosophy of Mathematics in Relation to their Mathematical Errors" *Pedota*. Volume 3, Number 1: 45-50
- [14]Naraniecki, A. J. (2015). "LEJ Brouwer and Karl Popper: two perspectives on mathematics." *Cosmos and History: The Journal of Natural and Social Philosophy*. 11.1: 239-255.
- [15]Noonan, H. W. (1976). "Dummett on abstract objects." *Analysis* 36.2: 49-54.
- Oxford. (n.d.). *Fallibility*. In *OxfordLearnersDictionary.com* dictionary. Retrieved from: <https://www.oxfordlearnersdictionaries.com/us/>
- [16]Posy, Carl (2020). *Mathematical Intuitionism*. Cambridge Elements in the Philosophy of Mathematics. Cambridge University Press.
- doi.org/10.1017/9781108674485
- [17]Quine, W.V. (1976). *The Ways of Paradox and Other Essays*. Cambridge: Harvard University Press.
- [18]Tarski, A. (1944) "The Semantic Conception of Truth", *Philosophy and Phenomenological Research*, 4 (3): 341–376.

[19]Wheeler, D.H. (2007). Notes on Mathematics in Primary Schools, Cambridge, Cambridge University Press.

[20]Zelter, J. (1995). "Critical Fallibilism in Oscar Wilde: Karl Popper anticipated?" Journal of English and American Studies. 43: 218-233.

پی‌نوشت

□ Francis Bacon

□□ Structuralists

□□□ Luitzen Egbertus Jan Brouwer؛ ریاضیدان و فیلسوف هلندی که در توپولوژی، نظریه مجموعه‌ها، نظریه اندازه‌گیری و تحلیل پیچیده کار می‌کرد. او که به عنوان یکی از بزرگترین ریاضیدانان قرن بیستم در نظر گرفته می‌شود، به عنوان بنیانگذار توپولوژی مدرن، به ویژه برای ایجاد قضیه نقطه ثابت و تغییر ناپذیری توپولوژیکی ابعاد، شناخته می‌شود.

□□ David Hilbert؛ او از اثرگذارترین ریاضی‌دانان در پیدایش و گسترش مکانیک کوانتومی و نظریه نسبیت است. هیلبرت طیف وسیعی از ایده‌های اساسی را در بسیاری از زمینه‌ها شامل نظریه ناوردا، حساب تغییرات، جبر جابجایی، نظریه جبری اعداد، بنیان‌های هندسه، نظریه طیفی عملگرها و کاربردهای آن در معادله انتگرالی، ریاضی فیزیک و نظریه برهان، کشف و توسعه داد.

□ Law of excluded middle؛ در منطق، قانون حد وسط بیان می‌کند که برای هر گزاره یا این قضیه صادق است یا نفی آن. این یکی از به اصطلاح قانون‌های سه گانه فکری به همراه قانون عدم تضاد و قانون هویت است. از نظر منطق‌دانان محور اصلی قیاس همان حد وسط است که در صفرا و کبرا وجود دارد و در نتیجه حذف می‌شود و کوچک‌ترین اخلال در آن، موجب اخلال در کل قیاس اقترانی خواهد شد. □□ Albert Lautman؛ (۱۹۰۸-۱۹۴۴) فیلسوف فرانسوی ریاضیات، متولد پاریس بود. او یک اسیر جنگی فراری بود که در ۱ اوت ۱۹۴۴ توسط مقامات نازی در تولوز مورد اصابت گلوله قرار گرفت.

□□□ Argument

□□□□ Genesis

□□□□ Paul Joseph Salomon Benacerraf؛ (۱۹۳۱) فیلسوف آمریکایی فرانسوی‌الاصل است که در زمینه فلسفه ریاضیات کار می‌کند و تمام دوران حرفه‌ای خود را از سال ۱۹۶۰ تا زمان بازنشستگی در سال ۲۰۰۷ در دانشگاه پرینستون تدریس کرد.

□ Mathematical Truth

□□ Alfred Tarski؛ (۱۹۰۱-۱۹۸۳) ریاضیدان و منطق‌دان برجسته لهستانی-آمریکایی.

□□□ homogeneous

□□□□ Actualist mathematics

□□□ actual truth

□□ formal truth

□□□ Neopositivism

□□□□ Arthur Eddington؛ (۱۸۸۲-۱۹۴۴) اختر فیزیکدان انگلیسی و استاد پلومی دانشگاه کمبریج در نیمه نخست سده ۲۰ (میلادی) بود.

□□□□ Imre Lakatos؛ (۱۹۲۲-۱۹۷۴) فیلسوف ریاضیات و علم.

□□□ critical fallibilism

□□ Oscar Wilde؛ (۱۸۵۴-۱۹۰۰) شاعر، داستان‌نویس، نمایش‌نامه‌نویس، فیلسوف و نویسنده داستان‌های کوتاه ایرلندی