



رده‌ای از پوشش‌ها و نیم پوشش‌ها بر اساس خاصیت بالابر هموتویی

مجید کوکبی^۱، حمید ترابی^{۲*}

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد، ایران.

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۲۷

چکیده

فرض کنیم X و $\tilde{X}$ فضاهای توپولوژیک باشند و $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ پوشش باشد. گوییم نگاشت p دارای خاصیت بالابر مسیری است هرگاه برای هر مسیر دلخواه α در X ، مسیری مانند $\tilde{\alpha}: (I, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ وجود داشته باشد به طوری که $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. همچنین نگاشت p دارای خاصیت بالابر مسیری یکتا است اگر برای هر مسیر α در X حداکثر یک بالابر $\tilde{\alpha}: (I, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ از α با آغاز $\tilde{x}_0$ موجود باشد. اخیراً برآزاس نیم پوشش‌ها را که تعمیمی از پوشش‌ها هستند، معرفی کرده است. کوکبی، مشایخی و ترابی ثابت کردند، نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ نیم پوشش است اگر و فقط اگر همسان‌ریختی موضعی بوده و خواص بالابر مسیری و یکتایی بالابر مسیری را دارا باشد. چون هر پوشش و نیم پوشش $p: \tilde{X} \rightarrow X$ خاصیت بالابر هموتویی را دارد، برای هر مسیر α در X با آغاز $\tilde{x}$ که $[p \circ \alpha] = 1$ ، یعنی $p \circ \alpha$ طوقه پوچ باشد می‌توان نتیجه گرفت α طوقه پوچ است. این مطلب به ما کمک کرد که در این مقاله (G, H) -پوشش و (G, H) -نیم پوشش را تعریف کنیم و تأکید می‌کنیم که یک (G, H) -پوشش، یک پوشش است و در نتیجه خواص پوشش‌ها مانند محک بالابر، خواص بالابر مسیری، یکتایی بالابر مسیری و ... را داراست. در این مقاله به بررسی خواص (G, H) -پوشش و (G, H) -نیم پوشش می‌پردازیم. برای مثال اگر $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ یک (G, H) -پوشش و یا (G, H) -نیم پوشش باشد، α مسیری در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ و پایان $\tilde{x}$ باشد، آن‌گاه $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ یک $(\alpha^{-1}G\alpha, (p \circ \alpha)^{-1}H(p \circ \alpha))$ -پوشش و یا $(\alpha^{-1}G\alpha, (p \circ \alpha)^{-1}H(p \circ \alpha))$ -نیم پوشش است.

واژه‌های کلیدی: گروه بنیادین، نگاشت پوششی، نگاشت نیم پوششی و خاصیت بالابری هموتویی.

۱. مقدمه

از دیدگاه تاریخی باید گفت نظریه پوشش‌ها، مانند بسیاری دیگر از شاخه‌های هندسه، توسط پوانکاره ظهور و پیدایش یافته است. ولی اولین باری که پوشش‌ها به طور منسجم معرفی و مطالعه گردید توسط زایفرت و ثرلفال [1] در سال ۱۹۳۵ بود. فضاهای پوششی نه تنها در توپولوژی، بلکه در شاخه‌های دیگری از ریاضیات مانند هندسه دیفرانسیل، آنالیز مختلط و گروه‌های لی نیز بسیار پرکاربرد است.

در سال ۲۰۱۱، نیم‌پوشش‌ها که تعمیمی از پوشش‌ها هستند، توسط برازاس [2] معرفی شدند. البته باید یادآوری کنیم برازاس در یادآوری ۲-۵ از [3] تعریف ساده‌تری برای نیم‌پوشش ارائه کرده است. کوکی، مشایخی و ترابی در قضیه ۲-۴ از [8] ثابت کردند، نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ نیم‌پوشش است اگر و فقط اگر همسان‌ریختی موضعی بوده و خواص بالابر مسیری و یکتایی بالابر مسیری را دارا باشد.

با توجه به اینکه خاصیت یکتایی بالابر برای پوشش‌ها و نیم‌پوشش‌ها برقرار است، اگر $p: \tilde{X} \rightarrow X$ پوشش و یا نیم‌پوشش باشد و $\alpha: I \rightarrow \tilde{X}$ مسیری با آغاز $\tilde{x}$ باشد به طوری که $[p \circ \alpha] = 1$ ، آن‌گاه $p \circ \alpha$ پوچ است و با توجه به خاصیت بالابر هموتوپی باید α نیز طوقه پوچ باشد.

این مطلب به ما کمک کرد که در این مقاله (G, H) -پوشش و (G, H) -نیم‌پوشش را تعریف کنیم. در این مقاله به بررسی خواص این مفهوم جدید می‌پردازیم. برای مثال اگر $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$ یک (G, H) -پوشش و یا (G, H) -نیم‌پوشش باشد، α مسیری در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ و پایان $\tilde{x}$ باشد، آن‌گاه p یک $(\alpha^{-1}G\alpha, (p \circ \alpha)^{-1}H(p \circ \alpha))$ -پوشش و یا $(\alpha^{-1}G\alpha, (p \circ \alpha)^{-1}H(p \circ \alpha))$ -نیم‌پوشش است.

۲. پیش‌نیازها

در مطالب این بخش عمدتاً از مراجع [6, 7] و [2] استفاده شده است.

تعریف ۱-۲. نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ بین دو فضای توپولوژیک را در نظر می‌گیریم. گوئیم زیر مجموعه باز U از فضای توپولوژیک X توسط نگاشت p به طور هموار پوشیده می‌شود هرگاه $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$ که V_j ها مجزا و باز و $p|_{V_j}: V_j \rightarrow U$ همسان‌ریختی باشد.

تعریف ۲-۲. فضاهای توپولوژیک X و $\tilde{X}$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ را پوشش و $\tilde{X}$ را فضای پوششی برای X گویند هرگاه برای هر $x \in X$ همسایگی باز $U \subseteq X$ شامل x وجود داشته باشد به طوری که توسط p به طور هموار پوشیده شده باشد (تعریف ۱-۲). پوشش $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ را بدیهی و $p^{-1}(x)$ را تار x می‌گوئیم. برای مثال نگاشت $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ با ضابطه $\exp(t) = e^{(2\pi it)}$ ، پوشش است.

لم ۲-۳. (خاصیت بالابر مسیری) فرض کنیم $p: \tilde{X} \rightarrow X$ پوشش و $\alpha: I \rightarrow X$ مسیری با آغاز x باشد. آن‌گاه برای هر $y \in p^{-1}(x)$ ، مسیری مانند $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \tilde{X}$ وجود دارد به طوری که $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ و $\tilde{\alpha}(0) = y$. مسیر $\tilde{\alpha}$ را بالابر از α در $\tilde{X}$ با آغاز از y گوئیم.

قضیه ۲-۴. اگر x_0 عضوی از فضای توپولوژیک X باشد، آن‌گاه مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی رابطه‌ی هموتوپی نسبی نسبت به $\{0, 1\}$ روی تمام مسیرهای بسته (در x_0) در X با عمل زیر تشکیل گروه می‌دهد که به آن گروه بنیادین فضای X در نقطه x_0 گویند و آن را با نماد $\pi_1(X, x)$ نشان می‌دهند.

$$[f]_X * [g]_X = [f * g]_X$$

قضیه ۲-۵. فرض کنیم نگاشت π_1 از رسته‌ی Top_* به رسته‌ها چنان باشد که هر فضای نقطه‌دار مثل (X, x_0) را به $\pi_1(X, x_0)$ و هر ریخت در Top_* مثل $p: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ را به هم‌ریختی

$$p_* = \pi(p): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

با ضابطه $p_*([f]_X) = [p \circ f]_Y$ بنگارد. در این صورت π_1 تابع‌گون همورد می‌باشد.

از این به بعد برای سادگی از نوشتن اندیس برای $[f]$ یا $[p \circ f]$ خودداری می‌کنیم و عالم سخن، این اندیس را مشخص خواهد کرد و بنابراین بجای $p_*([f]_X)$ برای راحتی خواهیم نوشت $p_*[f]$ و همچنین بجای $[p \circ f]_Y$ می‌نویسیم $[p \circ f]$ که منظور همان $p_*[f]$ می‌باشد.

لم ۲-۶. (خاصیت یکتایی بالابر مسیری) فرض کنیم $p: \tilde{X} \rightarrow X$ پوشش و $\alpha: I \rightarrow X$ مسیری با آغاز x باشد. در این صورت اگر برای $y \in p^{-1}(x)$ دو بالابر مانند $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2: I \rightarrow \tilde{X}$ موجود باشد به طوری که $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ آن‌گاه برای $i = 1, 2$ $\tilde{\alpha}_i(0) = y$ و $p \circ \tilde{\alpha}_i = \alpha$

قضیه ۲-۷. (محک بالابر برای پوشش‌ها) فرض کنیم X فضایی همبند و همبند مسیری موضعی بوده، $p: \tilde{X} \rightarrow X$ پوشش و $q: \tilde{Y} \rightarrow X$ نگاشت پیوسته باشد. نگاشت پیوسته $r: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ موجود است به طوری که $q = p \circ r$ ، اگر و فقط اگر برای هر $\tilde{y} \in p^{-1}(x)$ $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$.

در سال ۲۰۱۱، نیم‌پوشش را برآزاس به عنوان تعمیمی از پوشش‌ها تعریف کرد. کوکبی، مشایخی و ترابی در [8] قضیه ۲-۴ تعریف ساده‌تر برای نیم‌پوشش‌ها به صورت زیر ارائه دادند.

تعریف ۲-۸. نگاشت $p: \tilde{X} \rightarrow X$ نیم‌پوشش است اگر و فقط اگر همسان‌ریختی موضعی بوده که خواص بالابر مسیری (PLP) و یکتایی بالابر مسیری (UPLP) را دارا باشد.

برآزاس پس از تعریف نیم‌پوشش‌ها، نشان داد هر پوشش یک نیم‌پوشش است. اما هر نیم‌پوشش حتی اگر همبند هم باشد، لزوماً پوشش نمی‌باشد، او در مثالی یک نیم‌پوشش همبند برای فضای گوشواره‌ی هاوایی که پوشش نیست، ارائه داد (مثال 3.8 از [4]). یادآوری می‌کنیم گوشواره‌ی هاوایی زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ است که به صورت اجتماع خانواده شمارای بی پایان از دایره‌های G_i ، به شعاع $\frac{1}{i}$ و مرکز $(\frac{1}{i}, 0)$ که همگی در مبدا مختصات بر هم مماس هستند، با توپولوژی زیرفضایی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌گردد.

قضیه ۲-۹. (محک بالابر برای نیم‌پوشش‌ها) فرض کنیم X فضایی همبند و همبند مسیری موضعی بوده و $p: \tilde{X} \rightarrow X$ و $q: \tilde{Y} \rightarrow X$ نیم‌پوشش‌های آن باشند. برای $\tilde{y} \in p^{-1}(x)$ اگر $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ آن‌گاه نیم‌پوششی مانند $r: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ موجود است به طوری که $q = p \circ r$.

در قضیه زیر به بیان قضیه هموتوپي برای پوشش‌ها و نیم‌پوشش‌ها می‌پردازیم که یکی از قضایای مهم در پوشش‌ها و نیم‌پوشش‌ها است.

قضیه ۲-۱۰. (قضیه هموتوپي برای پوشش‌ها و نیم‌پوشش‌ها) فرض کنیم $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ نگاشت پوششی یا نیم‌پوششی باشد. اگر نگاشت‌های پیوسته $\tilde{f}: I \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ و $f: I \times I \rightarrow (X, x_0)$ و نیز $\tilde{F}: I \times I \rightarrow I \times I$ با ضابطه $j(t) = (t, 0)$ موجود باشد. در این صورت نگاشت پیوسته یکتای $\tilde{F}: I \times I \rightarrow I \times I$ وجود دارد به طوری که $p \circ \tilde{F} = F$ و $\tilde{F} \circ j = \tilde{f}$.

۳. نتایج اصلی

با توجه به اینکه خاصیت بالابر هموتوپي برای پوشش‌ها برقرار است (قضیه ۲-۱۰)، اگر $p: \tilde{X} \rightarrow X$ پوشش بوده و $\alpha: I \rightarrow \tilde{X}$ مسیری با آغاز $\tilde{x}$ باشد به طوری که $[p \circ \alpha] = 1$ ، آن‌گاه $p \circ \alpha$ پوچ است و با توجه به

خاصیت بالابر هموتوپیک (قضیه ۲-۱۰) و نیز تعریف پوشش‌ها (تعریف ۲-۲) باید α نیز طوقه پوچ باشد. این مطلب به ما کمک کرد که (G, H) -پوشش را تعریف کنیم. در ادامه به بررسی خواص این مفهوم جدید می‌پردازیم. تمام فضاهای توپولوژیک مورد بحث در این مقاله همبند مسیری در نظر گرفته شده‌اند.

تعریف ۳-۱. فرض کنیم X و $\tilde{X}$ دو فضای توپولوژیک، $x \in X$ و $p: \tilde{X} \rightarrow X$ نگاشت پوششی باشد. $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x)$ زیر گروهی از $G = \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ بوده و H نیز زیر گروهی از $\pi_1(X, x)$ باشد. p را یک (G, H) -پوشش گوئیم هرگاه برای هر مسیر α در $\tilde{X}$ که آغاز آن $\tilde{x}_0$ باشد و $[p \circ \alpha] \in H$ ، آن‌گاه بتوان نتیجه گرفت $[\alpha] \in G$.

خطر نشان می‌سازیم (G, H) -پوشش، یک پوشش است و خواص پوشش‌ها مانند محک بالابر، خواص بالابر مسیری (PLP)، یکتایی بالابر مسیری (UPLP) و ... را داراست و توجه داریم (G, H) -پوشش‌ها یک رده‌ای از پوشش‌ها است به طوری که برای هر مسیر α در $\tilde{X}$ که آغاز آن $\tilde{x}_0$ باشد و توسط p به طوقه‌ای که کلاسش در H (که H زیر گروهی از $\pi_1(X, x)$ است) برود، آن‌گاه بتوان نتیجه گرفت اولاً α طوقه است و ثانیاً کلاس آن در G (که G زیر گروهی از $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ است) قرار دارد.

فرض کنیم $p: \tilde{X} \rightarrow X$ پوشش بوده و $\alpha: I \rightarrow \tilde{X}$ مسیری با آغاز $\tilde{x}$ باشد به طوری که $[p \circ \alpha] = 1$. آن‌گاه $p \circ \alpha$ پوچ است و با توجه به اینکه خاصیت بالابر هموتوپیک برای پوشش‌ها برقرار است، باید α نیز طوقه پوچ باشد. بنابراین هر پوشش یک $(1, 1)$ -پوشش است. منظور از زیر گروه ۱ همان زیر گروه بدیهی در گروه‌ها می‌باشد. همچنین می‌توان گفت هر پوشش $p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ یک $(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0), p_* \pi_1(X, x))$ -پوشش است.

گزاره ۳-۲. فرض کنیم $p: \tilde{X} \rightarrow X$ یک (G, H) -پوشش، G زیر گروهی از G' و H' زیر گروهی از H باشد. در این صورت p یک (G', H') -پوشش است.

برهان. فرض کنیم $[p \circ \alpha] \in H'$ و $H' \subseteq H$ بنابراین $[p \circ \alpha] \in H$ و از طرفی $p: \tilde{X} \rightarrow X$ یک (G, H) -پوشش است، پس با توجه به تعریف ۳-۱ داریم، $[\alpha] \in G$ و در نتیجه $[\alpha] \in G'$. بنابراین p یک (G', H') -پوشش است.

نتیجه ۳-۳. اگر برای هر $j \in J$ یک (G_j, H) -پوشش باشد، در این صورت p یک $(\bigcap_{j \in J} G_j, H)$ -پوشش است.

برهان. فرض کنیم α مسیری در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ باشد و $[p \circ \alpha] \in H$. از طرفی برای هر $j \in J$ ، $p: \tilde{X} \rightarrow X$ یک (G_j, H) -پوشش است، پس $[\alpha] \in G_j$ و در نتیجه $[\alpha] \in \bigcap_{j \in J} G_j$. بنابراین با توجه به گزاره ۳-۲ خواهیم داشت، p یک $(\bigcap_{j \in J} G_j, H)$ -پوشش است.

نتیجه ۳-۴. اگر برای هر $i \in I$ ، $p: \tilde{X} \rightarrow X$ یک (G, H_i) -پوشش باشد، در این صورت p یک $(G, \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle)$ -پوشش است.

برهان. فرض کنیم α مسیری در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ باشد و $[p \circ \alpha] \in \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle$. در نتیجه $[p \circ \alpha] = [\beta_1 * \beta_2 * \dots * \beta_k]$ که برای هر $i \in I$ ، $\beta_i \in H_i$ و H_i زیر گروهی از $\pi_1(X, x)$ است. اگر α_i بالابر β_i در $\tilde{X}$ با آغاز از نقطه $\tilde{x}_0$ برای هر $i \in I$ باشد داریم $\alpha_i = \beta_i$ از طرفی برای هر $i \in I$ ، $p: \tilde{X} \rightarrow X$

X یک (G, H_i) -پوشش است و نیز $[p \circ \alpha_i] = \beta_i \in H_i$ پس $\alpha_i \in G$ از طرفی $[p \circ \alpha] = [\beta_1 * \beta_2 * \dots * \beta_k]$ پس

$$[p \circ \alpha] = [p \circ \alpha_1 * p \circ \alpha_2 \dots p \circ \alpha_k] = [p \circ (\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_k)]$$

و لذا با توجه به خاصیت بالابر هموتوپیک برای پوشش‌ها (قضیه ۲-۱۰) خواهیم داشت:

$$[p \circ \alpha] = [\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_k].$$

یک نوع از پوشش‌ها که در نظریه پوشش‌ها بسیار مورد توجه است، پوشش جهانی است. یادآوری می‌شود پوشش $p: \tilde{X} \rightarrow X$ را جهانی گویند هرگاه $\tilde{X}$ همبند ساده بوده یعنی $\tilde{X}$ همبند مسیری و $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ گروه بدیهی باشد. به سادگی دیده می‌شود که این گزاره معادل این است که $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1$.

قضیه ۳-۵. اگر $p: \tilde{X} \rightarrow X$ یک $(1, \pi_1(X, x))$ -پوشش باشد، آن‌گاه p پوشش جهانی است.

برهان. فرض کنیم $[\alpha] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ، پس با توجه به تعریف پوشش (تعریف ۲-۲)،

$$[p \circ \alpha] = p_*([\alpha]) \in \pi_1(X, x) \quad \text{و} \quad p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1 \quad \text{در نتیجه} \quad [p \circ \alpha] = 1. \quad \text{با توجه به}$$

تعریف پوشش جهانی می‌توان گفت، p پوشش جهانی است.

نتیجه ۳-۶. هر نگاشت پوششی $p: \tilde{X} \rightarrow X$ یک $(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0), 1)$ -پوشش است.

برهان. فرض کنیم α مسیری در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ باشد به طوری که $[p \circ \alpha] = 1$. با توجه به خاصیت بالابر

هموتوپیک (قضیه ۲-۱۰)، باید $[\alpha] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ باشد. با توجه به برهان قضیه ۳-۵ داریم،

$$p: \tilde{X} \rightarrow X \quad \text{یک} \quad (\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0), 1)\text{-پوشش است.}$$

نتیجه ۳-۷. اگر $p: \tilde{X} \rightarrow X$ یک (G, H) -پوشش باشد، آن‌گاه H زیرگروه $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ است.

برهان. فرض کنیم $[\beta] \in H$ و H زیرگروه $\pi_1(X, x)$ باشد. β یک بالابر در $\tilde{X}$ مانند α با آغاز $\tilde{x}_0$ دارد. پس

$$\beta = p \circ \alpha \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \quad \text{بنابراین} \quad H \text{ زیرگروه} \quad p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \text{ است.}$$

مثال ۳-۸. فرض کنیم $p: (\tilde{X} = S^1) \rightarrow (X = S^1)$ نگاشت پوششی معروف با ضابطه $p(z) = z^4$ و

$\alpha: I \rightarrow S^1$ مسیری با ضابطه $\alpha(t) = \exp(t)$ باشد. می‌دانیم $\pi_1(S^1) = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}$ است و $2\mathbb{Z}$ و

$4\mathbb{Z}$ زیرگروه‌های $\mathbb{Z}$ می‌باشند. $G = \langle \alpha^2 \rangle \cong 2\mathbb{Z}$ و $\pi_1(\tilde{X} = S^1) = \langle \alpha^4 \rangle \cong 4\mathbb{Z}$ و $H = \langle \alpha^4 \rangle \cong 4\mathbb{Z}$ نیز زیرگروهی از $\pi_1(X = S^1)$ باشد. p یک $(\pi_1(\tilde{X} = S^1) \cong \mathbb{Z}, H \cong 4\mathbb{Z})$ -پوشش است، که $\mathbb{Z}$ گروه

اعداد صحیح است. البته p یک $(G \cong 2\mathbb{Z}, H \cong 4\mathbb{Z})$ -پوشش نیست چون فرض کنیم $\alpha^4 \in H \cong 4\mathbb{Z}$ از

طرفی می‌دانیم $p_*[\alpha] = p \circ \alpha = \alpha^4 \in H \cong 4\mathbb{Z}$ پس $p_*[\alpha] = p \circ \alpha = \alpha^4 \in H \cong 4\mathbb{Z}$ اما

$$\alpha \notin G = \langle \alpha^2 \rangle \cong 2\mathbb{Z}.$$

داریم $(G \cong 2\mathbb{Z}, H \cong 4\mathbb{Z})$ -پوشش نیست.

در تعریف (G, H) -پوشش، فرض کردیم G زیرگروهی از $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ باشد و اگر نقطه فضای $\tilde{X}$ را بجای $\tilde{x}_0$

نقطه‌ی $\tilde{x}$ در نظر بگیریم دیگر ممکن است G زیرگروه $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ نباشد. برای بدست آوردن نتایجی جالب‌تر

کافیست زیرگروهی از $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ را که با G یک‌ریخت است در نظر بگیریم. برای این منظور فرض کنیم α مسیر

دلخواهی از $\tilde{x}_0$ به $\tilde{x}$ باشد، یک‌ریختی $\psi_\alpha: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$

$$\psi_\alpha([f]) = [\alpha^{-1} * f * \alpha]$$

با ضابطه‌ی

را در نظر بگیرید، (منظور از $*$ ضرب یا همان چسباندن مسیرهاست، قضیه ۲-۴ و ۲-۵) لذا G یکرخت با $[\alpha]^{-1} G [\alpha]$ است و ما در این مقاله آن را با نماد $\alpha^{-1} G \alpha$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳-۹. اگر $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$ یک (G, H) -پوشش باشد، α مسیری در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ و پایان $\tilde{x}$ باشد، آن گاه p یک $(\alpha^{-1} G \alpha, (p \circ \alpha)^{-1} H (p \circ \alpha))$ -پوشش است.

برهان. فرض کنیم α مسیری دلخواه در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ و پایان $\tilde{x}$ باشد و β نیز مسیری دیگر در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}$ باشد به طوری که $[p \circ \beta] \in (p \circ \alpha)^{-1} H (p \circ \alpha)$ فرض کنیم پایان β نقطه $\tilde{x}_1$ باشد. چون $p \circ \beta$ طوقه است در نتیجه ابتدا و انتهای β در یک تار است یعنی $p(\beta(0)) = p(\beta(1))$ و از طرفی $p(\beta(0)) = p(\alpha(1))$ و بنابراین $p(\beta(1)) = p(\alpha(1))$

در نتیجه $p(\beta(1)) = p(\alpha(1))$ پس $p(\beta(1)) = p(\alpha(1))$ حال بالابر $(p \circ \alpha)^{-1}$ با آغاز $\tilde{x}_1$ در $\tilde{X}$ را $\bar{\alpha}$ می‌نامیم در نتیجه $p \circ \bar{\alpha} = (p \circ \alpha)^{-1}$ اکنون مسیر $\alpha * \beta * \bar{\alpha}$ را با آغاز $\tilde{x}_0$ در نظر می‌گیریم و از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} [p \circ (\alpha * \beta * \bar{\alpha})] &= [(p \circ \alpha) * (p \circ \beta) * (p \circ \bar{\alpha})] = \\ &= [(p \circ \alpha) * (p \circ \beta) * (p \circ \alpha)^{-1}] = [(p \circ \alpha)] [(p \circ \beta)] [(p \circ \alpha)^{-1}] \\ &= [p \circ (\alpha * \beta * \bar{\alpha})] \in H \end{aligned}$$

مسیر $\alpha * \beta * \bar{\alpha}$ دارای نقطه آغاز $\tilde{x}_0$ است و با توجه به اینکه p یک (G, H) -پوشش است، پس باید $\alpha * \beta * \bar{\alpha} \in G$ و چون G زیر گروهی از $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ است، پس یک طوقه حول $\tilde{x}_0$ است. بنابراین پایان $\bar{\alpha}$ همان $\tilde{x}_0$ است حال برای $p \circ \alpha$ از نقطه‌ای $\tilde{x}_0$ دو بالابر α و $(\bar{\alpha})^{-1}$ داریم که با توجه به یکتایی بالابر برای پوشش‌ها (قضایای ۲-۳ و ۲-۶)، باید $\alpha = (\bar{\alpha})^{-1}$. بنابراین $\alpha * \beta * \alpha^{-1} \in G$ و در نتیجه $\alpha * G * \alpha^{-1} \in G$. بنابراین $[\beta] \in \alpha^{-1} * G * \alpha$. بنابراین p یک $(\alpha^{-1} G \alpha, (p \circ \alpha)^{-1} H (p \circ \alpha))$ -پوشش است.

نتیجه ۳-۱۰. اگر $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$ یک (G, H) -پوشش باشد و α مسیری در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ و پایان $\tilde{x}$ باشد به طوری که $p \circ \alpha$ یک طوقه و H زیر گروه نرمال $\pi_1(X, x)$ باشد، آن گاه p یک $(\alpha^{-1} G \alpha, H)$ -پوشش است.

برهان. فرض کنیم α مسیری در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ و پایان $\tilde{x}$ باشد. چون $p \circ \alpha$ یک طوقه است پس $[p \circ \alpha] \in \pi_1(X, x)$ و همچنین H زیر گروه نرمال $\pi_1(X, x)$ است، بنابراین $(p \circ \alpha)^{-1} H (p \circ \alpha) = H$ و با توجه به قضیه قبل p یک $(\alpha^{-1} G \alpha, H)$ -پوشش است.

نتیجه ۳-۱۱. اگر $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$ یک (G, H) -پوشش باشد و α یک طوقه در $\tilde{X}$ حول $\tilde{x}_0$ باشد و G زیر گروه نرمال $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ باشد، آن گاه p یک $(G, (p \circ \alpha)^{-1} H (p \circ \alpha))$ -پوشش است.

برهان. فرض کنیم α طوقه‌ای در $\tilde{X}$ حول $\tilde{x}_0$ باشد و G زیر گروه نرمال $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ باشد. $\alpha^{-1} G \alpha = G$ و با توجه به قضیه ۳-۹ p یک $(G, (p \circ \alpha)^{-1} H (p \circ \alpha))$ -پوشش است.

نتیجه ۳-۱۲. اگر $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$ یک (G, H) -پوشش باشد، γ مسیری در X با آغاز x باشد و $\tilde{\gamma}$ بالابر γ با آغاز $\tilde{x}_0$ باشد، آن گاه p یک $(\tilde{\gamma}^{-1} G \tilde{\gamma}, \gamma^{-1} H \gamma)$ -پوشش است.

برهان. کافی است در برهان قضیه ۳-۸ قرار دهیم، $\alpha = \tilde{\gamma}$ لذا $\alpha \circ p = \tilde{\gamma} \circ p = \gamma$ و بنابراین p یک (G, H) -پوشش است.

۴. نتیجه‌گیری

اگر $p: \tilde{X} \rightarrow X$ یک پوشش باشد و $\alpha: I \rightarrow \tilde{X}$ مسیری با آغاز $\tilde{x}$ باشد به طوری که $[p \circ \alpha] = 1$ ، آن‌گاه $p \circ \alpha$ پوچ است و با توجه به خاصیت بالابر هموتوپی باید α نیز یک طوقه پوچ باشد. این مطلب به ما کمک کرد که (G, H) -پوشش را تعریف کنیم. در این مقاله به تعریف و بررسی خواص این مفهوم جدید می‌پردازیم. برای مثال اگر $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$ یک (G, H) -پوشش باشد، α مسیری در $\tilde{X}$ با آغاز $\tilde{x}_0$ و پایان $\tilde{x}$ باشد، آن‌گاه p یک $(\alpha^{-1}G\alpha, (p \circ \alpha)^{-1}H(p \circ \alpha))$ -پوشش است. اما از طرفی در بخش دوم، با تعریف نیم‌پوشش (تعریف ۲-۸) آشنا شدیم و محک بالابر را در قضیه ۲-۹ برای نیم‌پوشش‌ها بیان کردیم در نتیجه به کمک محک بالابر برای نیم‌پوشش‌ها و هم‌چنین قضیه هموتوپی برای نیم‌پوشش‌ها (قضیه ۲-۱۰) می‌توان تعریف ۱-۳ را برای (G, H) -نیم‌پوشش‌ها به صورت زیر مطرح کرد.

تعریف ۴-۱. فرض کنیم X و $\tilde{X}$ دو فضای توپولوژیک باشد. $p: \tilde{X} \rightarrow X$ و $x \in X$ نگاشت نیم‌پوششی باشد. $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x)$ ، G زیر گروهی از $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ باشد و H نیز زیر گروهی از $\pi_1(X, x)$ باشد. p را یک (G, H) -نیم‌پوشش گوئیم هرگاه برای هر مسیر α در $\tilde{X}$ که آغاز آن $\tilde{x}_0$ باشد و $[p \circ \alpha] \in H$ ، آن‌گاه بتوان نتیجه گرفت $[\alpha] \in G$.

توجه داریم (G, H) -نیم‌پوشش، یک نیم‌پوشش است و خواص نیم‌پوشش‌ها مانند محک بالابر، خواص بالابر مسیری (PLP)، یکتایی بالابر مسیری (UPLP) و قضیه هموتوپی (قضیه ۲-۱۰) و ... را داراست. بنابراین تمام نتایج فصل سوم که بر پایه دو قضیه مهم محک بالابر (قضیه ۲-۹) و قضیه هموتوپی (قضیه ۲-۱۰) هستند برای (G, H) -نیم‌پوشش‌ها نیز با همان برهان‌ها قابل اثبات است.

توجه شود که هر پوشش، یک نیم‌پوشش نیز هست در نتیجه هر (G, H) -پوشش، یک (G, H) -نیم‌پوشش نیز هست اما عکس آن برقرار نیست و می‌توان همان مثالی که برازاس برای نیم‌پوششی که پوشش نیست ارائه کرده است را بیان کرد که بعد از تعریف ۲-۸ آورده شده است. بنابراین یک $(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0), p_*\pi_1(X, x))$ -نیم‌پوشش داریم که $(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0), p_*\pi_1(X, x))$ -پوشش نیست. توجه داریم هر پوشش یک $(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0), p_*\pi_1(X, x))$ -پوشش هست و هر نیم‌پوشش یک $(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0), p_*\pi_1(X, x))$ -نیم‌پوشش است. اما از آنجا که پوشش‌ها مفهوم قدیمی‌تر و پرکاربردتری می‌باشند در نتیجه ما مقاله را برای پوشش‌ها ارائه دادیم اما با توجه به مشابهت برهان‌ها می‌توان نتایج این مقاله را برای نیم‌پوشش‌ها نیز در نظر گرفت.

فهرست منابع

- [1] H. Seifert , W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig, 1934.
- [2] J. Brazas, *The topological fundamental group and free topological groups*, Topology and its Application, 158 (2011) 779–802.
- [3] J. Brazas, *Semicoverings, coverings, overlays, and open subgroups of the quasitopological fundamental group*, Topology Proceedings, 44 (2014) 285–313.
- [4] J. Brazas, *Semicoverings: A generalization of covering space theory*, Homology Homotopy Appl, 14 (2012) 33-63.
- [5] H. Fischer and A. Zastrow, *A core-free semicovering of the Hawaiian Earring*, Topology and its Applications, 160 (2013) 1957-1967.
- [6] J. J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, New york, Springer-Verlag, 1988.
- [7] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [8] M. Kowkabi, B. Mashayekhy, H. Torabi, *When is a local homeomorphism a semicovering map?*, Acta math. vietnam. 42 (2017), 653–663.